

PRO'2020 Test-02 CZ

1. Mějme pohyb zadaný jako zobrazení obecného bodu X do bodu Y předpisem

$$\vec{y}_\beta = \mathbf{R} \vec{x}_\beta + \vec{o}'_\beta,$$

kde \vec{x}_β , resp. \vec{y}_β , jsou souřadnice vektoru, který zaměřuje bod X , resp. bod Y , v souřadném systému s ortonormální bází β . Matice \mathbf{R} a vektor $\vec{o}'_\beta = \overrightarrow{OO'}$ jsou zadány následovně

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{o}'_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Sestavte maticovou rovnici, která určuje body na ose pohybu.
- (b) Najděte všechny body osy pohybu.

2. Mějme jednotkový kvaternion

$$\vec{q} = \left[\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right]^\top$$

- (a) K rotaci danou \vec{q} najděte všechny dvojice $[\theta, \vec{v}]$, které odpovídají úhlu rotace $-\pi < \theta \leq \pi$ a ose reprezentované jednotkovým vektorem \vec{v} .
- (b) Sestrojte rotační matici.

3. Mějme rotaci s osou generovanou vektorem $\vec{v} = [1, 1, 1]^\top$, která zobrazuje vektor $[0, 0, 1]^\top$ na $[1, 0, 0]^\top$.

- (a) Najděte úhel rotace $-\pi < \theta \leq \pi$.
- (b) Napište matici rotace \mathbf{R} .
- (c) Napište vlastní čísla matice \mathbf{R} .

4. Mějme matici rotace

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Najděte všechny jednotkové kvaterniony reprezentující \mathbf{R} .

PRO'2020 Test-02 EN

1. Consider motion given by a mapping of a general point X to point Y by

$$\vec{y}_\beta = \mathbf{R}\vec{x}_\beta + \vec{o}'_\beta,$$

where \vec{x}_β , resp. \vec{y}_β , are coordinate vectors representing point X , resp. point Y , in a coordinate system with an orthonormal basis β . Matrix \mathbf{R} and vector $\vec{o}' = \overrightarrow{OO'}$ are given as follows

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{o}'_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Write down a matrix equation determining the coordinates of points on the axis of motion.
- Find all the points on the axis of motion.

2. Consider the following unit quaternion

$$\vec{q} = \left[\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right]^\top$$

- For the rotation given by \vec{q} , find all pairs $[\theta, \vec{v}]$ of the corresponding rotation angle $-\pi < \theta \leq \pi$ and rotation axis represented by a unit vector \vec{v} .
- Construct the corresponding rotation matrix.

3. Consider the rotation matrix with rotation axis generated by vector $\vec{v} = [1, 1, 1]^\top$ that maps vector $[0, 0, 1]^\top$ to vector $[1, 0, 0]^\top$.

- Find its rotation angle $-\pi < \theta \leq \pi$.
- Find its rotation matrix \mathbf{R} .
- Find eigenvalues of \mathbf{R} .

4. Consider the following rotation matrix

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Find all unit quaternions that represent \mathbf{R} .