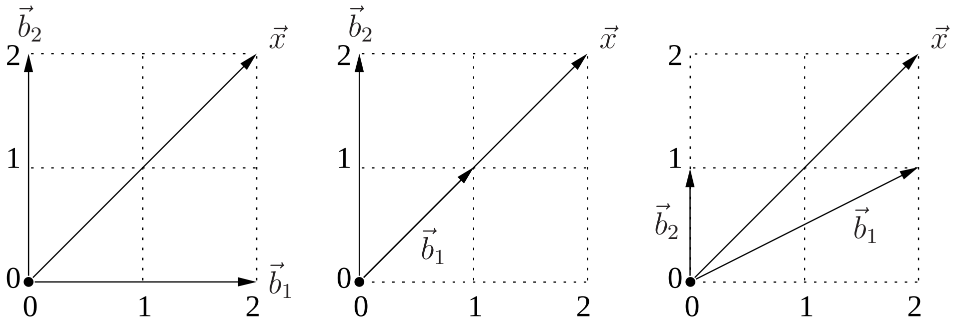
GVG'2021 Test-α CZ

Jméno: **Body:**

1. Doplňte vektory $\vec{b}_2$ a $\vec{b}_3$ na bázi v $\mathbb{R}^3$: $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \end{bmatrix}$ $\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \end{bmatrix}$

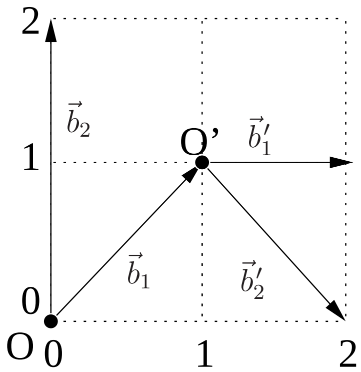
2. Napište souřadnice vektoru $\vec{x}$ v uspořádané bázi $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$:



$\vec{x}_\beta = \begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$ $\vec{x}_\beta = \begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$ $\vec{x}_\beta = \begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$

3. Vektor $\vec{x}$ má v uspořádané bázi $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ souřadnice $(1, -1)$. Jaké souřadnice má v bázi $\vec{b}'_1 = 2\,\vec{b}_1$, $\vec{b}'_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$?

4. Následující obrázek zachycuje dvě souřadné soustavy (O, β) a (O', β'), s bázemi $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ a $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$



   (a) Napište souřadnice vektorů báze β v bázi β'.

   (b) Napište souřadnice vektorů báze β' v bázi β.

   (c) Napište vzorec pro přepočet souřadnic vektoru $\vec{x}_\beta$ zaměřujícího obecný bod X v souřadné soustavě (O, β) na souřadnice vektoru $\vec{x}'_{\beta'}$, zaměřujícího X v souřadné soustavě (O', β') a dosaďte do něj konkrétní hodnoty podle obrázku.

5. Změňte v následující matici jeden prvek, aby měla hodnost rovnu jedné

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Najděte všechna řešení soustav

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

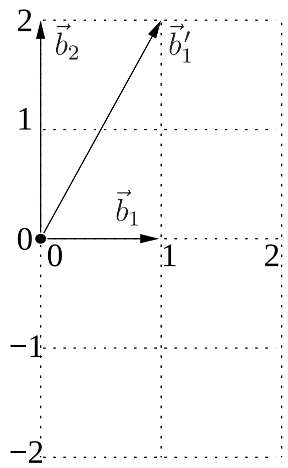
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Kolik kořenů včetně násobností má rovnice $x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0$ v oboru komplexních čísel? Najděte co nejvíce jejích kořenů.

9. Změňte následující matici jeden prvek tak, aby byla ortonormální

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Následující obrázek zachycuje bázi $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ a vektor $\vec{b}'_1$ z báze $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$. Zakreslete vektor $\vec{b}'_2$, aby byla matice přechodu od β' k β ortogonální.



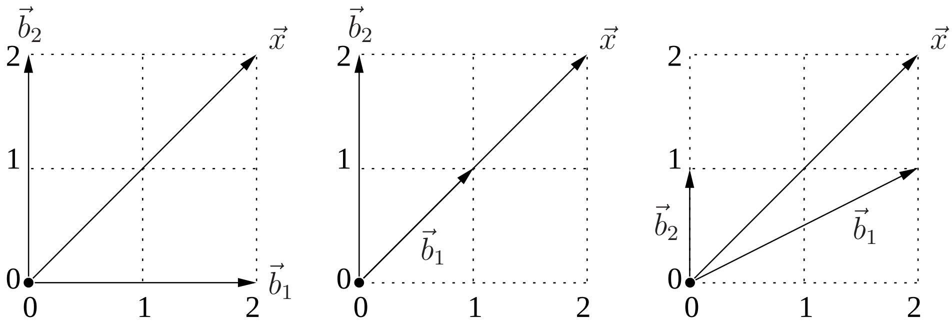
K řešení použijte další papíry. Podepište je a přiložte je.

GVG'2021 Test-α EN

Name: **Points:**

1. Complete vectors $\vec{b}_2$ and $\vec{b}_3$ to form a basis in $\mathbb{R}^3$: $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \end{bmatrix}$ $\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \end{bmatrix}$

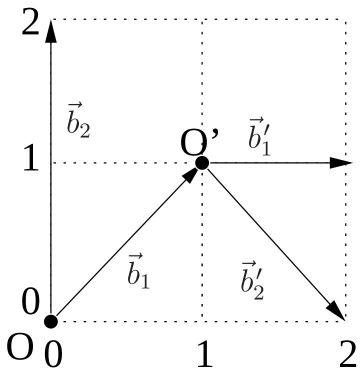
2. Write the coordinates of vector $\vec{x}$ in ordered basis $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$:



$\vec{x}_\beta = \begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$ $\vec{x}_\beta = \begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$ $\vec{x}_\beta = \begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$

3. Vector $\vec{x}$ has coordinates $(1, -1)$ in ordered basis $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$. What are its coordinates in ordered basis $\vec{b}'_1 = 2\,\vec{b}_1$, $\vec{b}'_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$?

4. The picture below shows two coordinate systems (O, β) and (O', β') with bases $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ and $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$



   (a) Write the coordinates of basis vectors of β in basis β'.

   (b) Write the coordinates of basis vectors of β' in basis β.

   (c) Write a formula transforming the coordinates of vector $\vec{x}_\beta$ describing a general point X in coordinate system (O, β) into the coordinates of vector $\vec{x}'_{\beta'}$ describing X in coordinate system (O', β') and substitute the particular values from the picture into the formula.

5. Change one element of the following matrix so it becomes a rank one matrix.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Find all solutions to the systems

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Find the eigenvalues and eigenvectors of matrix

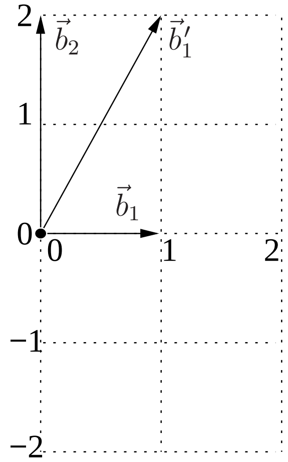
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. How many roots, including multiplicities, does the equation $x^6+x^4-x^2-1=0$ have in complex space? Find as many of its roots as possible.

9. Change one element in the matrix below to make it orthonormal

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. The following figure shows basis $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ and vector $\vec{b}'_1$ from basis $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$. Draw vector $\vec{b}'_2$ such that the transition matrix from β' to β is orthogonal.



Use additional paper sheets if necessary.