

# Magnetická rezonance

J. Kybic, J. Hornak<sup>1</sup>, M. Bock, J. Hozman, P.Doubek

2008–2020

---

<sup>1</sup><http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri/>

# Magnetická rezonance

- Úvod a motivace
- Fyzikální základy
- NMR spektroskopie
- Prostorové zobrazování
- Lékařské MR systémy
- Speciální techniky: rychlé techniky, funkční MRI, ...

## Úvod

### Základy

Historie

Všeobecně. . .

### Fyzika MRI

Jaderný spin

Interakce

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

Relaxace a precese

Excitace

Blochova rovnice

## Názvy a zkratky pro MRI

MR	Magnetic Resonance
MRI	Magnetic Resonance Imaging (zobrazování magnetickou rezonancí)
MRT	Magnetic Resonance Tomography Magnetic Resonance Technology
MRS	Magnetic Resonance Spectroscopy
NMR	Nuclear Magnetic Resonance
JMR	Jaderná Magnetická Rezonance
KST	Kernspintomografie
pMRI	positional MRI
fMRI	functional MRI
	MR scanner

## Permanentní magnety - architektura „OPEN“



## Elektromagnety - architektura „OPEN“



**Philips-Marconi  
Panorama 0.23T a 0.6T**

**FONAR Stand-Up MRI**

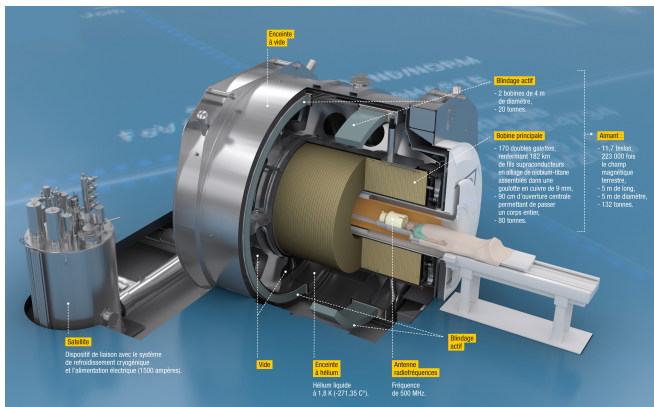


# Uzavřený magnet

solenoid, válcový magnet



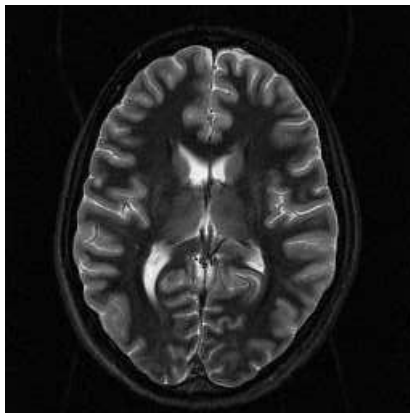
# 11.7T MRI





## MRI – Example

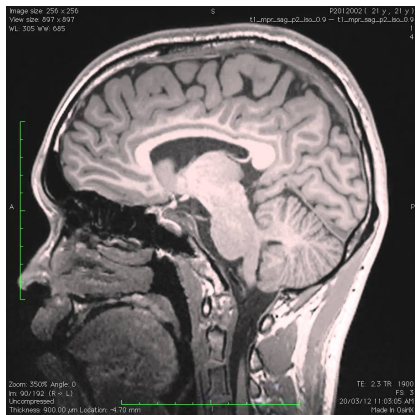
Brain slice:



all 3D

## MRI – Example

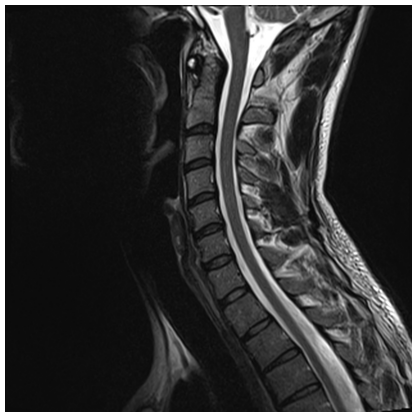
Brain slice:



all 3D

## MRI – Example

Spine:



all 3D

## MRI – Example



all 3D

## MRI principles

1. Insert object (subject) into a strong magnetic field
2. Repeatedly send a radio-frequency impuls
3. Spins are excited and then relax to equilibrium
4. Receive and record emitted radio-frequency waves
5. Reconstruct image from data
6. Remove the object (subject) from the magnetic field

## Úvod

## Základy

Historie

Všeobecně...

## Fyzika MRI

Jaderný spin

Interakce

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

Relaxace a precese

Excitace

Blochova rovnice

## Stručná historie MRI

- 1946 – Felix Bloch, Edward Purcell, nezávislý objev jevu
- 1950–1970 — NMR, spektroskopická analýza
- 1971 — Raymond Damadian, relaxační časy tkání jsou různé
- 1973 — Hounsfield, CT ukázalo ochotu nemocnic investovat do zobrazování
- 1973 — Paul Lauterbur, tomografické MRI (zpětná projekce)
- 1975 — Richard Ernst, Fourier MRI
- 1977 — Peter Mansfield, echo-planar imaging (EPI), později umožní 30 ms/řez

## Stručná historie MRI (2)

- 1980 — Edelstein, MRI těla (3D), 5 min/řez
- 1986 — MRI těla (3D), 5 s
- 1986 — MRI+NMR mikroskop, rozlišení  $10\ \mu\text{m}$  v 1 cm vzorku
- 1987 — zobrazení srdečního cyklu v reálném čase
- 1987 — MRA (angiografie), tok krve (bez kontrast. látek)
- 1992 — funkční MRI, mapování funkcí mozku



## Nobelovy ceny

- 1952 — Felix Bloch, Edward Purcell, fyzika, objev jevu
- 1991 — Richard Ernst, chemie, Fourier MRI
- 2003 — Paul Lauterbur, Peter Mansfield, lékařství, MRI v medicíně

## Rozšíření MRI

- V r. 2013 bylo ve světě asi 20000 MRI skenerů
- 75 miliónů vyšetření za den (20/den na každém skeneru)
- V ČR desítky (17 v roce 2000, 80 v roce 2013)
- Zařízení stojí 10 ~ 100 mil. Kč
- Jedno vyšetření ~ 10 tis. Kč

## Potřebné profese, možnosti uplatnění

- Při vyšetření
  - Lékař radiolog („čte“ MR obrazy)
  - Operátor skeneru
  - Operátor dodatečného zpracování
  - Zdravotní sestra
- Údržba
  - Technik
- Vývoj
  - Fyzika magnetické rezonance
  - Fyzika supravodivých magnetů
  - Mechanika konstrukce
  - Zpracování signálů a obrazů
  - Elektronika, výpočetní technika
  - Architektura

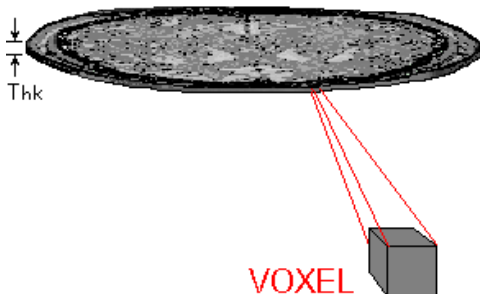
# Výrobci

Fonar, General Electric, Hitachi, Philips, Siemens, Toshiba

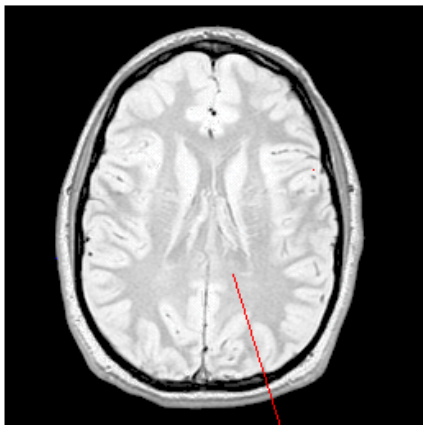
## Tomografické zobrazování



# Tomografické zobrazování

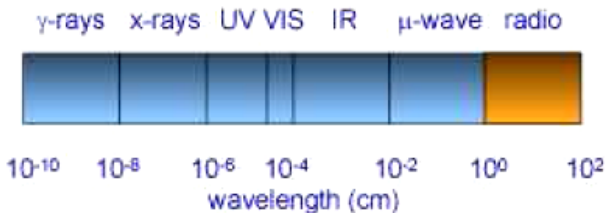


## Tomografické zobrazování



Pixel

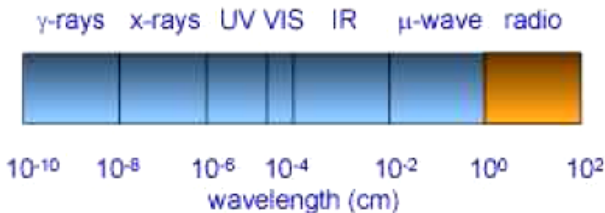
# Rozlišení



- Abbe, Rayleigh → nelze zobrazovat objekty o mnoho menší než  $\lambda$
- U MRI  $\lambda \approx 5 \sim 10$  m, rozlišení  $\sim 1$  mm. Jak to?



# Rozlišení



- Abbe, Rayleigh  $\rightarrow$  nelze zobrazovat objekty o mnoho menší než  $\lambda$
- U MRI  $\lambda \approx 5 \sim 10$  m, rozlišení  $\sim 1$  mm. Jak to?
- Standardní zobrazování používá prostorovou závislost amplitudy absorbovaného či emitovaného záření.
- MRI používá prostorovou závislost frekvence a fáze absorbovaného a emitovaného záření.

# Principy MRI

- Lidské tělo: tuk a voda. 63 % vodíku.
- Jádro vodíku = proton.
- Proton má vlastnost zvanou jaderný **spin** (podobně jako hmotnost a elektrický náboj). Něco jako rotace kolem své osy.
- Částice s nenulovým spinem se přibližně chová jako magnet  
→ MRI signál

## Úvod

## Základy

Historie

Všeobecně...

## Fyzika MRI

**Jaderný spin**

Interakce

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

Relaxace a precese

Excitace

Blochova rovnice

## Jaderný spin

- Jaderný spin  $I$  je násobkem  $1/2$
- Volné protony, neutrony, elektrony mají spin  $1/2$
- Atom deuteria  ${}^2\text{H}$  (elektron, proton, neutron): celkový elektronový spin  $1/2$ , celkový jaderný spin  $1$ .
- U párů částic se spin může vyrušit. Helium (He, 2 elektrony, 2 protony, 2 neutrony): celkový spin  $0$
- Jen nespárované spiny ( $I \neq 0$ ) jsou užitečné pro MRI
- sudé hmotové číslo & sudé atomové číslo  $\Rightarrow I = 0$  ( ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ )
- sudé hmotové číslo & liché atomové číslo  $\Rightarrow I \in \{1, 2, \dots\}$  ( ${}^{14}\text{N}$ ,  ${}^2\text{H}$ ,  ${}^{10}\text{B}$ )
- liché hmotové číslo  $\Rightarrow I \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\}$  ( ${}^1\text{H}$ ,  ${}^{13}\text{C}$ ,  ${}^{15}\text{N}$ )

## Magnetické kvantové číslo, magnetický moment

- magnetické kvantové číslo  $m \in \{I, I - 1, \dots, -I\}$  udává spinový stav elektronu, pro  $^1\text{H}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{19}\text{N}$ ,  $^{31}\text{P}$  (nejběžnější jádra)

$$I = 1/2 \Rightarrow m = \pm 1/2$$

existují tedy dva možné spinové stavy

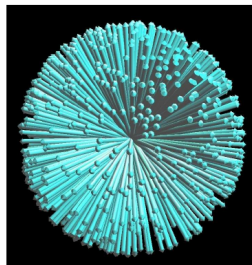
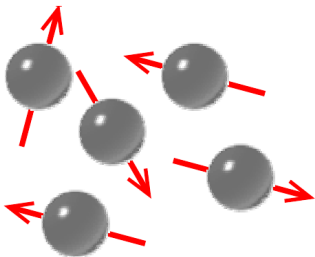
- magnetický moment  $\vec{\mu}$  [ $\text{Am}^2 = \text{Nm}/\text{T}$ ] je vektorová veličina

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{I} \hbar$$

kde  $\hbar = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{Js}$  je Planckova konstanta

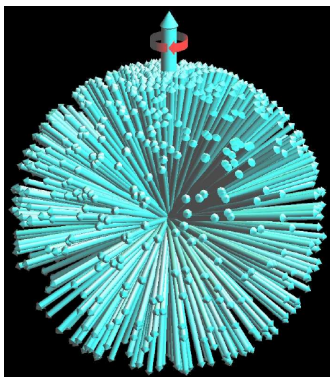
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \mathbf{B}$$

## Spiny v magnetickém poli



magnetická indukce  $B_0 = 0$

## Spiny v magnetickém poli



$B_0 \neq 0$  (jednotky Tesla)

- Spinový paket
- Makroskopicky pozorovatelná magnetizace  $\mathbf{M}$  (průměrné  $\mu$ )
- Magnetizace klesá s teplotou a roste s  $B_0$  (Boltzmannova statistika)

## Spin v magnetickém poli

$$f = \gamma B$$

- $f$  rezonanční frekvence, také *Larmorova* frekvence
- $B$  [Tesla] intenzita magnetického pole
- $\gamma$  gyromagnetická konstanta daného jádra
- Pro  $^1\text{H}$ ,  $\gamma = 42.58 \text{ MHz/T}$   
(někdy udávaná v [rad/T], pak se píše  $\frac{\gamma}{2\pi}$  místo  $\gamma$ )
- Spin (částice) může absorbovat foton o frekvenci právě  $f$



## Vlastnosti relevantních prvků

<b>Izotop</b>	<b>Nukleární spin / <math>\gamma</math> [MHz/T]</b>	<b>citlivost [%]</b>
$^1\text{H}$	1/2 42.58	100%
$^2\text{H}$	1 6.54	
$^{13}\text{C}$	1/2 10.71	2%
$^{19}\text{F}$	1/2 40.08	83%
$^{23}\text{Na}$	3/2 11.27	9%
$^{31}\text{P}$	1/2 17.25	7%

## Spin v magnetickém poli (2)

Konfigurace:



nížká energie



vysoká energie

## Přechod mezi energetickými stavy

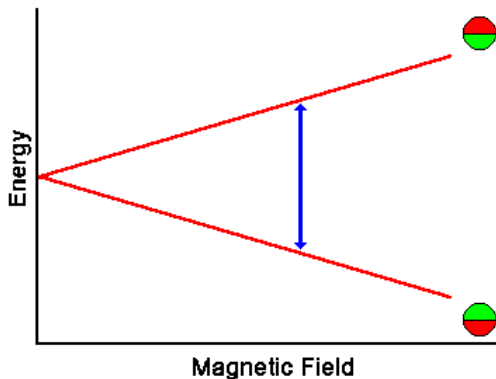
- Absorbováním fotonu s energií

$$E = hf = h\nu = h\gamma B$$

může spin přejít do vysokoenergetického stavu (excitace)

- Při zpětném přechodu (relaxace) se foton vyzáří

## Energetický diagram



$$E = hf = h\gamma B$$

Pro H, typicky  $f = 15 \sim 80$  MHz.

## Úvod

## Základy

Historie

Všeobecně...

## Fyzika MRI

Jaderný spin

**Interakce**

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

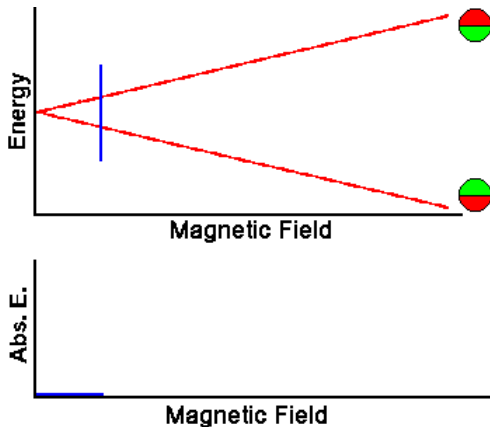
Relaxace a precese

Excitace

Blochova rovnice

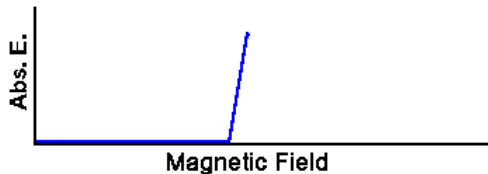
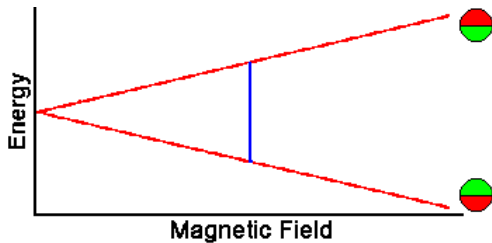
## Continuous wave NMR (1)

- Konstantní frekvence
- Proměnné magnetické pole
- Měříme absorbovanou energii



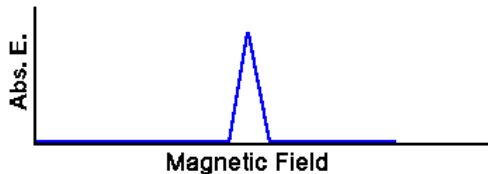
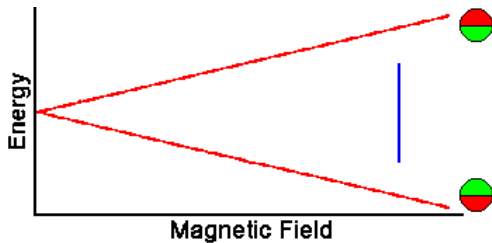
## Continuous wave NMR (1)

- Konstantní frekvence
- Proměnné magnetické pole
- Měříme absorbovanou energii



## Continuous wave NMR (1)

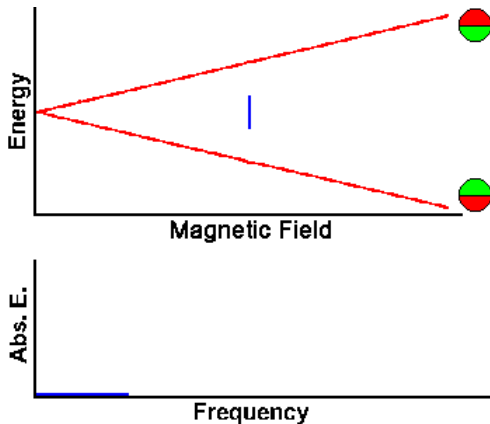
- Konstantní frekvence
- Proměnné magnetické pole
- Měříme absorbovanou energii





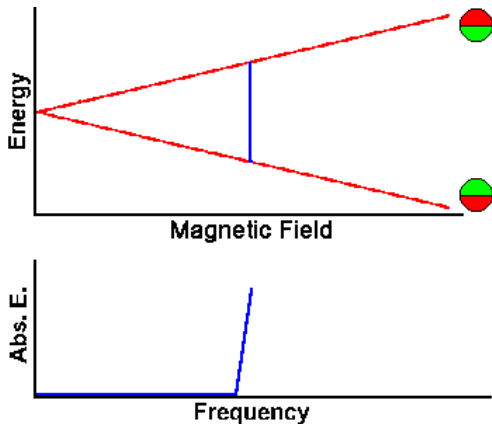
## Continuous wave NMR (2)

- Konstantní magnetické pole
- Proměnná frekvence
- Měříme absorbovanou energii



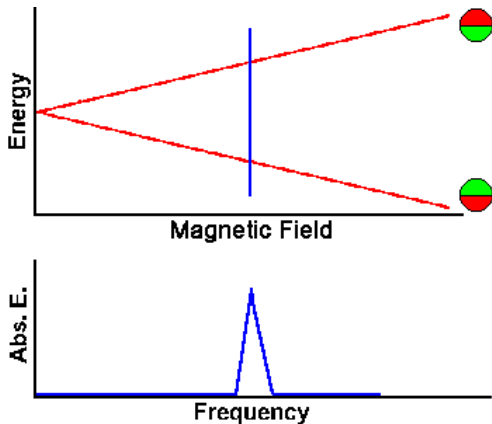
## Continuous wave NMR (2)

- Konstantní magnetické pole
- Proměnná frekvence
- Měříme absorbovanou energii



## Continuous wave NMR (2)

- Konstantní magnetické pole
- Proměnná frekvence
- Měříme absorbovanou energii



## Úvod

## Základy

Historie

Všeobecně...

## Fyzika MRI

Jaderný spin

Interakce

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

Relaxace a precese

Excitace

Blochova rovnice

## Spin v magnetickém poli (2)

Konfigurace:



nížká energie



vysoká energie

## Boltzmannova statistika

- Spiny v magnetickém poli
- Počet spinů s nízkou energií  $N^-$
- Počet spinů s vysokou energií  $N^+$

$$\frac{N^-}{N^+} = e^{-\frac{E}{kT}}$$

kde  $k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$  je Boltzmannova konstanta  
 $T$  [Kelvin] je teplota

## Boltzmannova statistika a NMR

$$\frac{N^-}{N^+} = e^{-\frac{E}{kT}}$$

- NMR detekuje (velmi malý) rozdíl  $N^- - N^+$
- nízká  $T \rightarrow$  větší rozdíl
- vysoká  $T \rightarrow N^- - N^+ \rightarrow 0$

## Odvození Boltzmannovy statistiky

- Systém  $S$  + rezervoár  $R$  (s teplotou  $T$ )
- Mějme stavy  $s_i$  s energií  $\varepsilon_i$  s  $N_i$  částicemi.
- Jaké jsou pravděpodobnosti stavů  $s_i$ ?



## Odvození Boltzmannovy statistiky (2)

- **Fundamentální předpoklad termodynamiky (2.zákon):**
  - Izolovaný systém v rovnováze má maximální entropii
  - Izolovaný systém má všechny stavy stejně pravděpodobné
- $S + R$  je izolovaný
- Zachování energie:  $U_R + U_S = U_0 = \text{const}$

## Odvození Boltzmannovy statistiky (2)

- **Fundamentální předpoklad termodynamiky (2.zákon):**
  - Izolovaný systém v rovnováze má maximální entropii
  - Izolovaný systém má všechny stavy stejně pravděpodobné
- $S + R$  je izolovaný
- Zachování energie:  $U_R + U_S = U_0 = \text{const}$
- Necht' počet stavů  $R$  s energií  $U$  je  $\Omega(U)$
- Pravděpodobnost  $P(U) \sim \Omega(U)$
- Pravděpodobnost  $P(s_i) \sim \Omega_R(U_0 - \varepsilon_i)\Omega_S(\varepsilon_i) = \Omega(U_0)$

## Odvození Boltzmannovy statistiky (2)

- **Fundamentální předpoklad termodynamiky (2.zákon):**
  - Izolovaný systém v rovnováze má maximální entropii
  - Izolovaný systém má všechny stavy stejně pravděpodobné
- $S + R$  je izolovaný
- Zachování energie:  $U_R + U_S = U_0 = \text{const}$
- Necht' počet stavů  $R$  s energií  $U$  je  $\Omega(U)$
- Pravděpodobnost  $P(U) \sim \Omega(U)$
- Pravděpodobnost  $P(s_i) \sim \Omega_R(U_0 - \varepsilon_i)\Omega_S(\varepsilon_i) = \Omega(U_0)$

$$\frac{P(s_1)}{P(s_2)} = \frac{\Omega_R(U_0 - \varepsilon_1)}{\Omega_R(U_0 - \varepsilon_2)}$$

# Entropie

**Entropie** = míra neuspořádanosti

Statistická definice

$$S = k \log \Omega$$

Termodynamická definice

$$dS = \frac{dU}{T}$$

kde  $\Omega$  je počet stavů a  $\Delta U$  je rozptýlená nevyužitelná energie.

## Odvození Boltzmannovy statistiky (3)

Odvozené pravděpodobnosti:

$$\frac{P(s_1)}{P(s_2)} = \frac{\Omega_R(U_0 - \varepsilon_1)}{\Omega_R(U_0 - \varepsilon_2)}$$

z definice entropie:  $S = k \log \Omega \rightarrow \Omega = e^{S/k}$

$$\begin{aligned} \frac{P(s_1)}{P(s_2)} &= \frac{e^{S_R(U_0 - \varepsilon_1)/k}}{e^{S_R(U_0 - \varepsilon_2)/k}} = e^{S_R(U_0 - \varepsilon_1)/k - S_R(U_0 - \varepsilon_2)/k} \\ &= e^{\frac{\Delta S_R}{k}} \end{aligned}$$

## Odvození Boltzmannovy statistiky (3)

$$\frac{P(s_1)}{P(s_2)} = e^{S_R(U_0 - \varepsilon_1)/k - S_R(U_0 - \varepsilon_2)/k} = e^{\frac{\Delta S_R}{k}}$$

jelikož  $\varepsilon_i \ll U_0$

$$S_R(U_0 - \varepsilon_i) \approx S_R(U_0) - \varepsilon_i \frac{dS_r}{dU} \Big|_{U=U_0}$$

$$\Delta S_R = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{dS_r}{dU} \Big|_{U=U_0}$$

z termodynamické definice  $dS = dU/T$ :

$$\Delta S_R = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{T}$$

## Odvození Boltzmannovy statistiky (3)

$$\frac{P(s_1)}{P(s_2)} = e^{S_R(U_0 - \varepsilon_1)/k - S_R(U_0 - \varepsilon_2)/k} = e^{\frac{\Delta S_R}{k}}$$

$$\Delta S_R = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{T}$$

$$\frac{P(s_1)}{P(s_2)} = \frac{e^{-\varepsilon_1/(kT)}}{e^{-\varepsilon_2/(kT)}}$$

$$P(s_i) \propto e^{-\varepsilon_i/(kT)}$$

kde  $e^{-\varepsilon_i/(kT)}$  je Boltzmannův faktor.

## Boltzmannova statistika

- Spiny v magnetickém poli
- Počet spinů s nízkou energií  $N^-$
- Počet spinů s vysokou energií  $N^+$

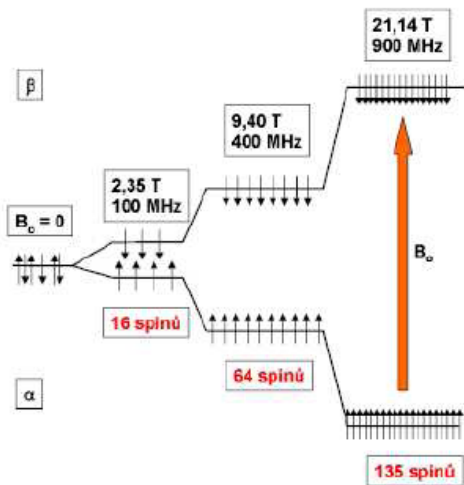
$$\frac{N^-}{N^+} = e^{-\frac{E}{kT}}$$

kde  $k = 1.3805 \cdot 10^{-23}$  je Boltzmannova konstanta  
 $T$  [Kelvin] je teplota



# Vliv magnetického pole ( $I = 1/2$ )

Je-li stav  $\beta$  obsazen  $10^2$  spinů, stav  $\alpha$  obsahuje  $10^6$  přebytek.



příklad  $^1\text{H}$ :

$$f = 400 \text{ MHz}$$

$$B = 9.5 \text{ T}$$

$$\Delta E = 3.8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Kcal}}{\text{mol}}$$

$$\frac{N^-}{N^+} = 1.000064$$

## Úvod

## Základy

Historie

Všeobecně...

## Fyzika MRI

Jaderný spin

Interakce

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

Relaxace a precese

Excitace

Blochova rovnice

## Vlastnosti relevantních prvků

<b>Izotop</b>	<b>Nukleární spin / <math>\gamma</math> [MHz/T]</b>	<b>citlivost [%]</b>
$^1\text{H}$	1/2 42.58	100%
$^2\text{H}$	1 6.54	
$^{13}\text{C}$	1/2 10.71	2%
$^{19}\text{F}$	1/2 40.08	83%
$^{23}\text{Na}$	3/2 11.27	9%
$^{31}\text{P}$	1/2 17.25	7%

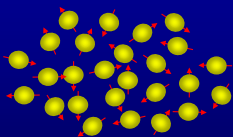
## Výskyt izotopů v přírodě

<b>Prvek</b>	<b>Četnost [%]</b>
$^1\text{H}$	99.985
$^2\text{H}$	0.015
$^{13}\text{C}$	1.11
$^{14}\text{N}$	99.63
$^{15}\text{N}$	0.37
$^{23}\text{Na}$	100
$^{31}\text{P}$	100
$^{39}\text{K}$	93.1
$^{43}\text{Ca}$	0.145

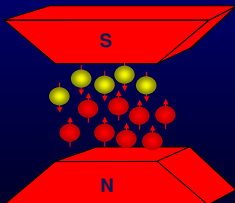
## Biologická četnost prvků

Prvek	Četnost [%]	
H	63	
O	26	hlavní izotop $^{16}\text{O}$ s nulovým spinem
C	9.4	hlavní izotop $^{12}\text{C}$ s nulovým spinem
N	1.5	
P	0.24	
Ca	0.22	
Na	0.041	

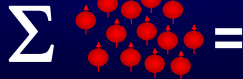
## Macroscopic Magnetisation



$$B = 0$$



$$B = B_0$$

 $M_0$ 

dkfz

## Spinový paket

- **Spinový paket** = prostorově ohraničený soubor spinů, na které působí stejné magnetické pole.
- **Vektor magnetizace  $\mathbf{M}$**  magnetické pole spinového paketu

$$\mathbf{M} = \sum \vec{\mu}$$

$$\|\mathbf{M}\| \propto N^+ - N^-$$

- **Celková/čistá Magnetizace** (net magnetization) = součet magnetizací od všech paketů
- **Soubor spinů** = v NMR všechny spinové pakety v měřeném vzorku

## Úvod

## Základy

Historie

Všeobecně...

## Fyzika MRI

Jaderný spin

Interakce

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

Relaxace a precese

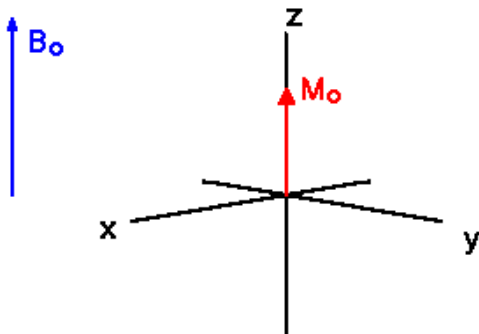
Excitace

Blochova rovnice



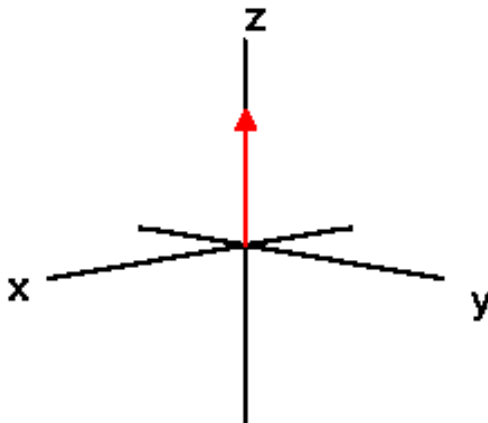
## $T_1$ relaxace

- V rovnováze,  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$ ,  $M_z = M_0$  klidová magnetizace.



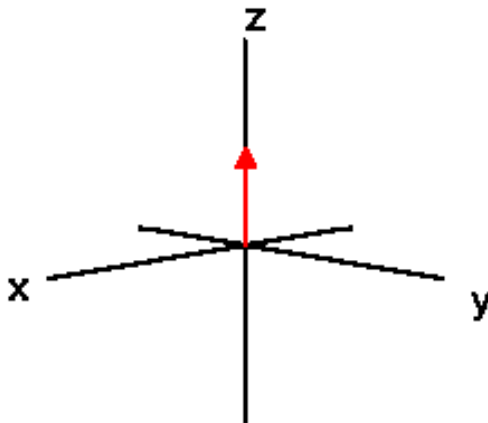
## $T_1$ relaxace

- V rovnováze,  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$ ,  $M_z = M_0$  klidová magnetizace.
- Vyšleme elmag. (RF) impuls. Vhodnou energií  $M_z = 0$



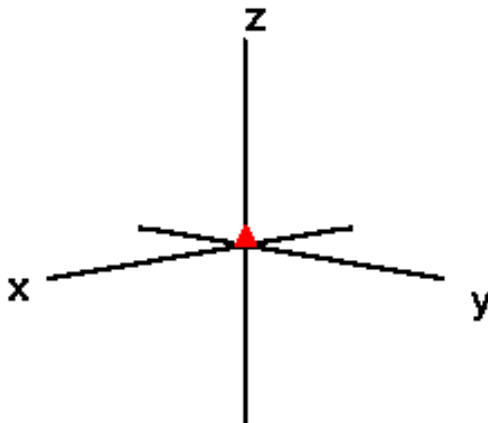
## $T_1$ relaxace

- V rovnováze,  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$ ,  $M_z = M_0$  klidová magnetizace.
- Vyšleme elmag. (RF) impuls. Vhodnou energií  $M_z = 0$



## $T_1$ relaxace

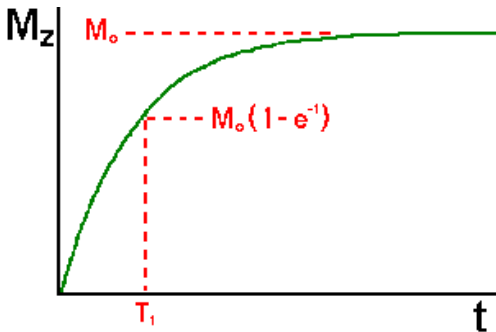
- V rovnováze,  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$ ,  $M_z = M_0$  klidová magnetizace.
- Vyšleme elmag. (RF) impuls. Vhodnou energií  $M_z = 0$



## $T_1$ relaxace (2)

Po odeznění impulsu se  $M_z$  vrací do rovnovážného stavu.

$$M_z = M_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

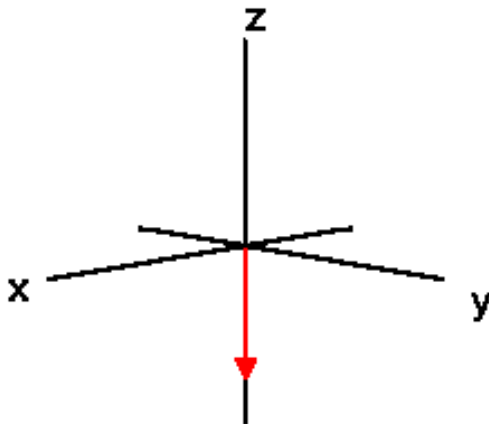


$T_1$  — mřížková relaxační časová konstanta  
(spin-lattice relaxation time)  
energie se přenáší na mřížku (lattice) jako teplo

## $T_1$ relaxace (3)

Silnější impuls může překlopit  $M_z = -M_0$ .

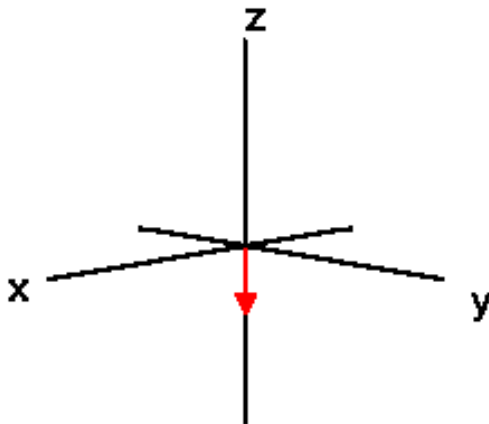
$$M_z = M_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$



## $T_1$ relaxace (3)

Silnější impuls může překlopit  $M_z = -M_0$ .

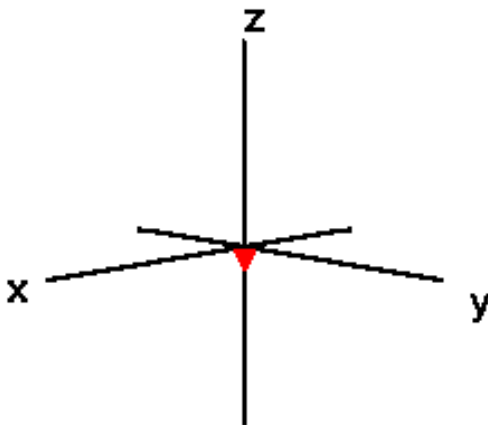
$$M_z = M_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$



## $T_1$ relaxace (3)

Silnější impuls může překlopit  $M_z = -M_0$ .

$$M_z = M_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

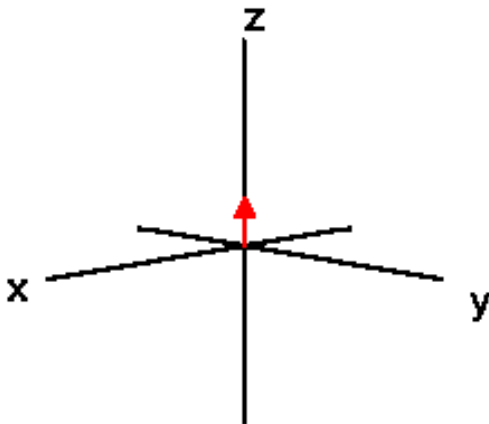




## $T_1$ relaxace (3)

Silnější impuls může překlopit  $M_z = -M_0$ .

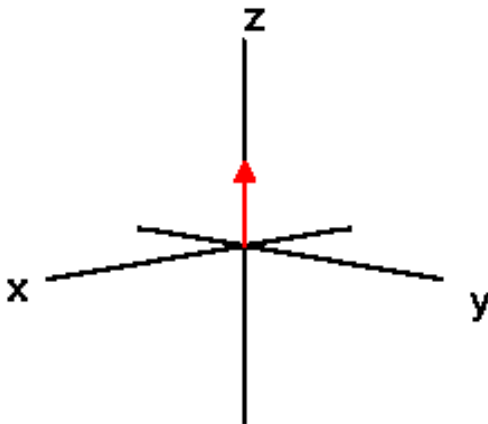
$$M_z = M_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$



## $T_1$ relaxace (3)

Silnější impuls může překlopit  $M_z = -M_0$ .

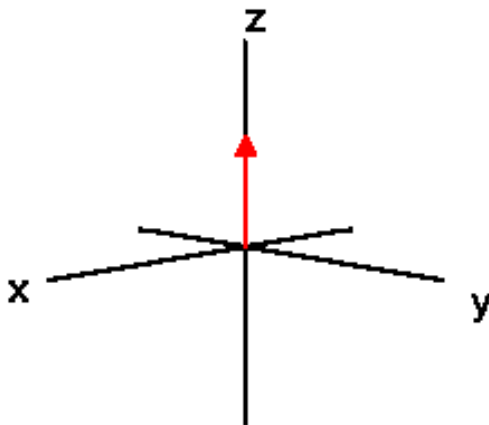
$$M_z = M_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$



## $T_1$ relaxace (3)

Silnější impuls může překlopit  $M_z = -M_0$ .

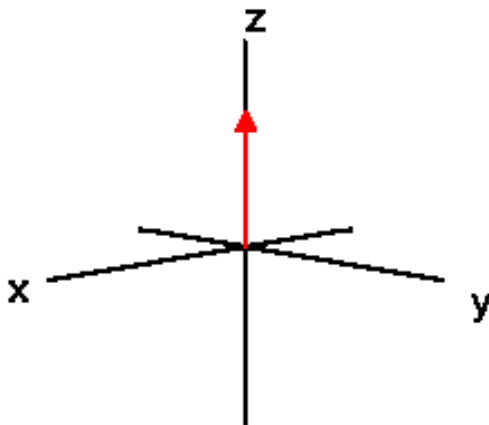
$$M_z = M_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$



## $T_1$ relaxace (3)

Silnější impuls může překlopit  $M_z = -M_0$ .

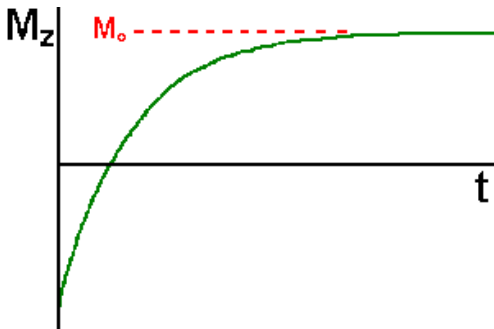
$$M_z = M_0 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$



## $T_1$ relaxace (3)

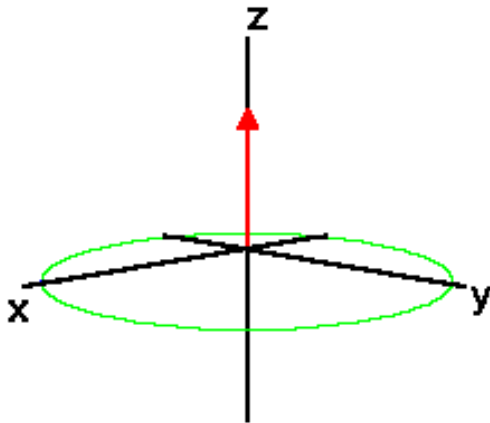
Silnější impuls může překlopit  $M_z = -M_0$ .

$$M_z = M_0 \left( 1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$



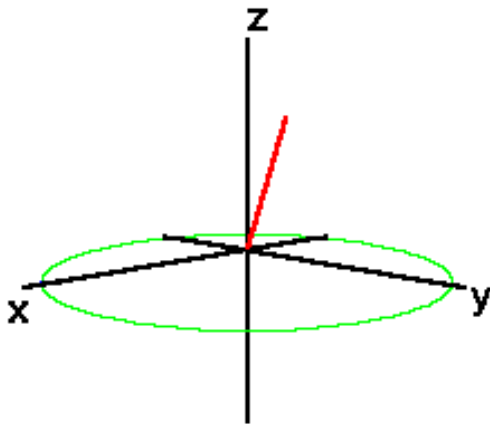
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...



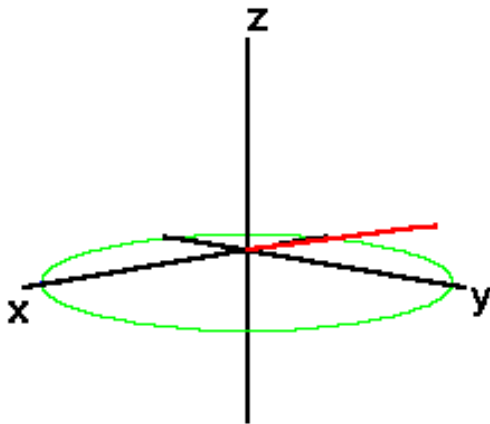
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...



## Precese

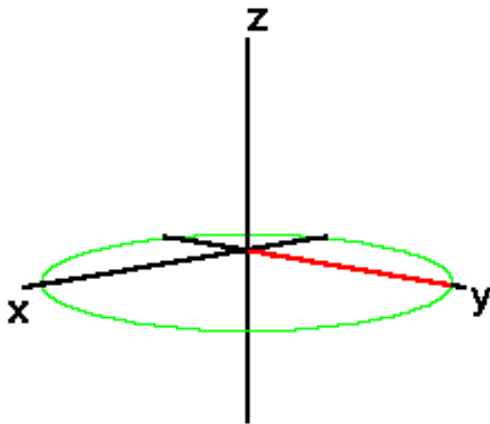
- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...





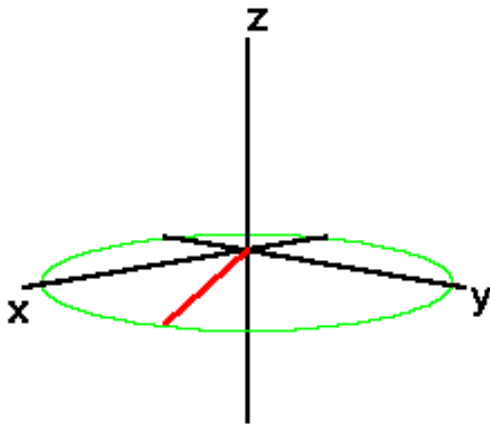
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



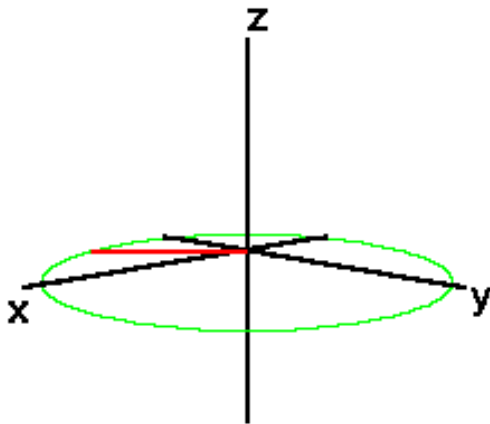
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



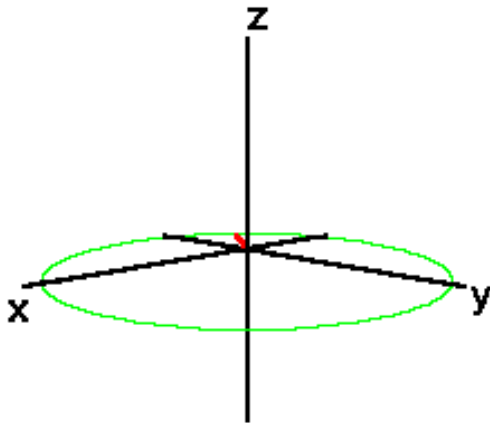
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



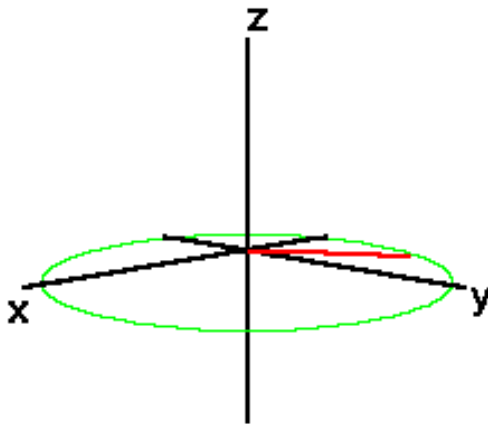
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



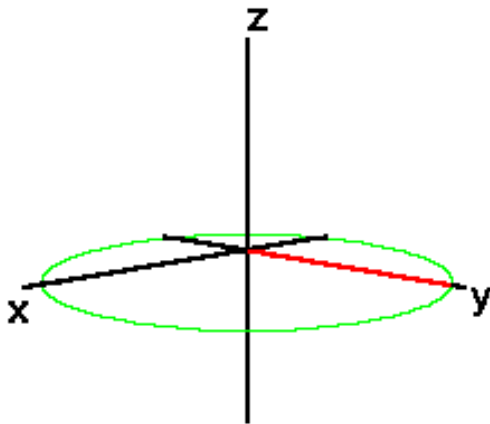
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



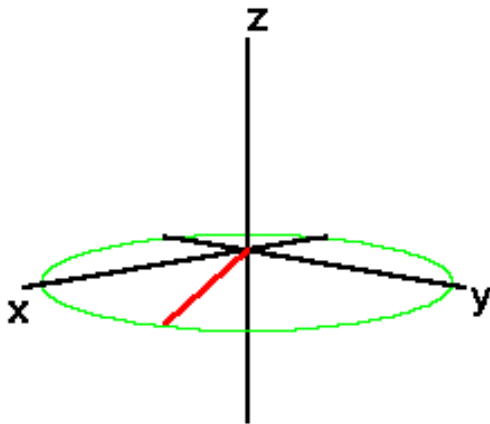
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



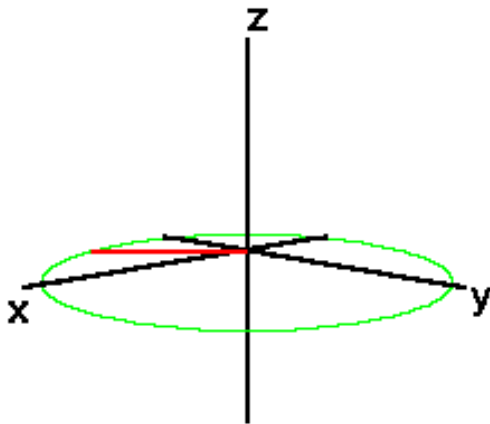
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



## Precese

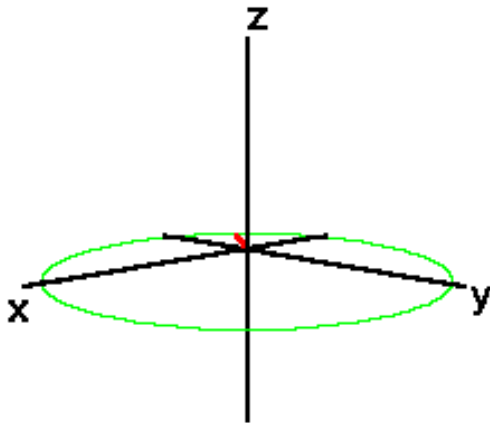
- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$





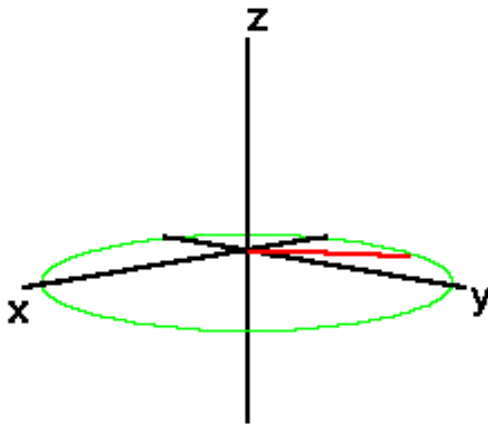
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



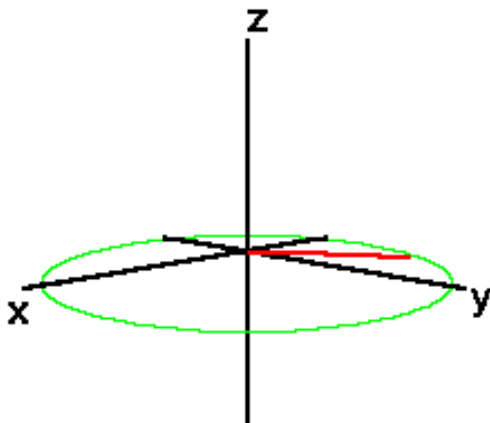
## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



## Precese

- Pokud je  $\mathbf{M}$  překlopena do  $xy$ ...
- ...  $\mathbf{M}$  začne rotovat s Larmorovou frekvencí  $f = \gamma B$



Frekvence je stejná jako rezonanční frekvence pro změnu orientace.

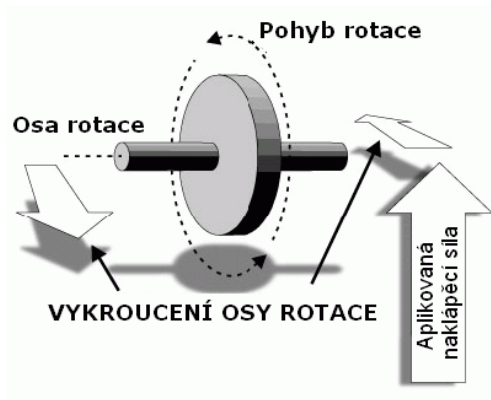
## Precese — použití pro měření

Jak uvidíme později, měřitelný signál vyvolává pouze rotující komponenta magnetizace v rovině  $xy$ , neboť pro indukci napětí v RF cívce (které je měřeno) je nutný magnetický tok měnící se v čase. Komponenta  $M_z$  takové napětí neindukuje.

## Precese (2) — klasický popis

Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

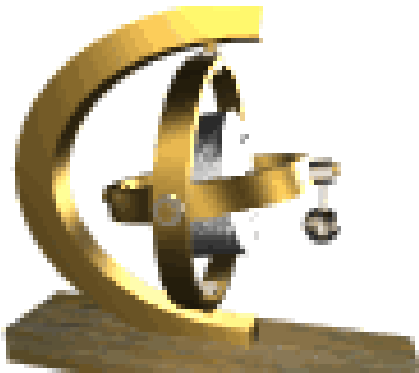
$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0$$



## Precese (2) — klasický popis

Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

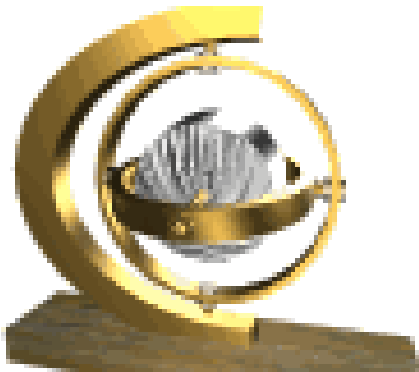
$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0$$



## Precese (2) — klasický popis

Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

$$\mathbf{C} = \mu \times \mathbf{B}_0$$



## Precese (2) — klasický popis

Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0$$

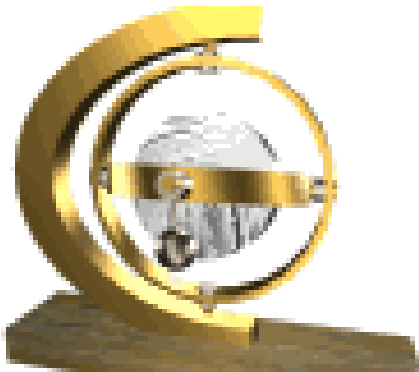




## Precese (2) — klasický popis

Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

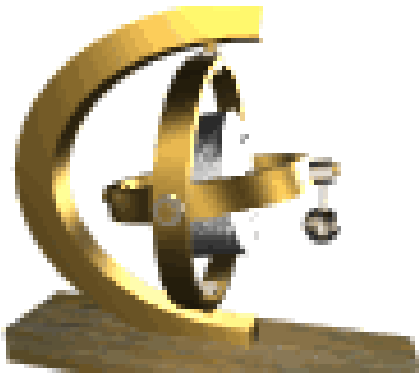
$$\mathbf{C} = \mu \times \mathbf{B}_0$$



## Precese (2) — klasický popis

Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

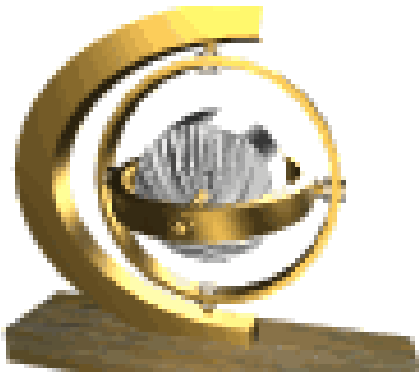
$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0$$



## Precese (2) — klasický popis

Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

$$\mathbf{C} = \mu \times \mathbf{B}_0$$



## Precese (2) — klasický popis

Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

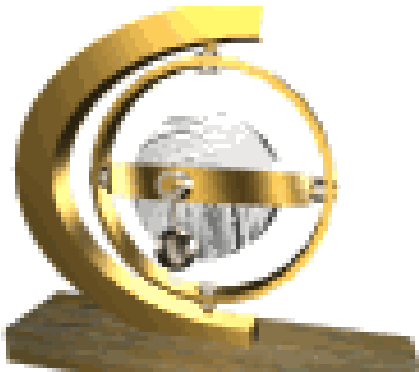
$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0$$



## Precese (2) — klasický popis

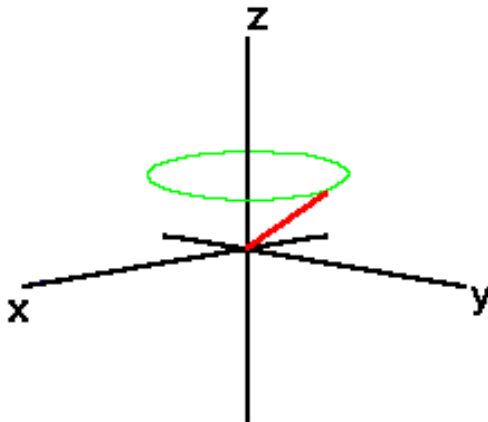
Magnetické pole se snaží natočit spin  $\mu$  do směru  $\mathbf{B}_0$ . To vytváří moment síly

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0$$



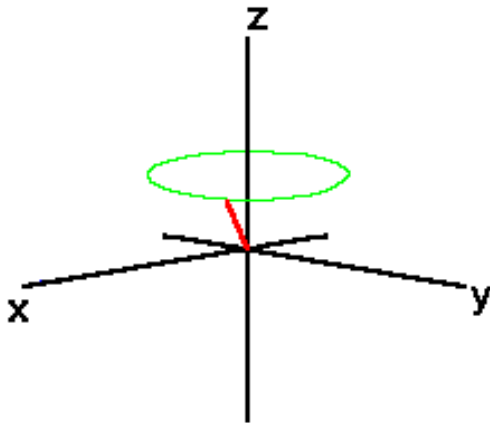
## Precese (3)

Pro magnetizaci ne zcela v rovině  $xy$



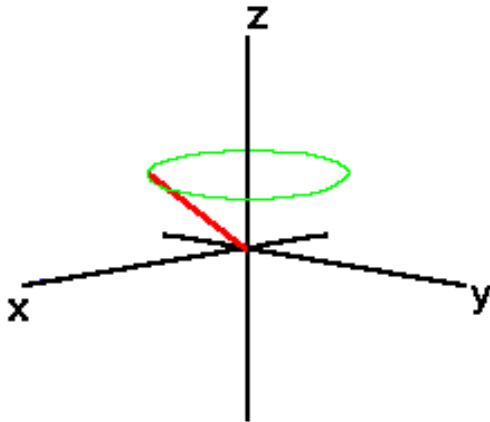
## Precese (3)

Pro magnetizaci ne zcela v rovině  $xy$



## Precese (3)

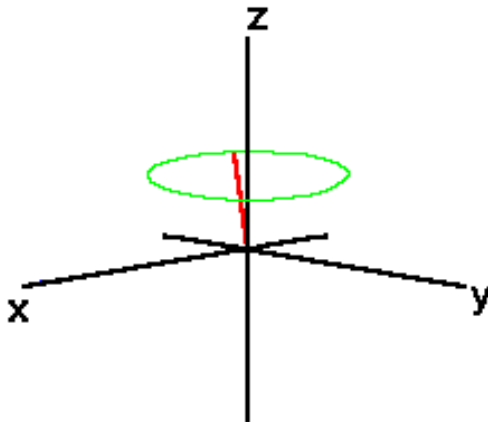
Pro magnetizaci ne zcela v rovině  $xy$





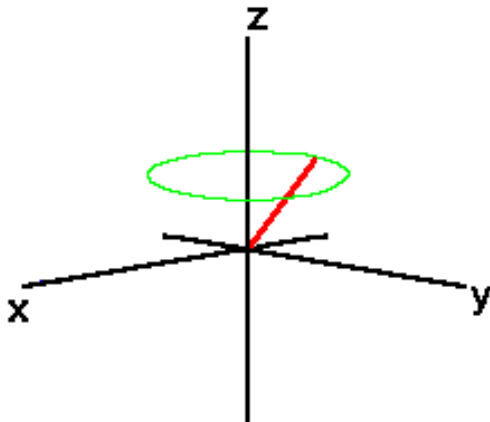
## Precese (3)

Pro magnetizaci ne zcela v rovině  $xy$



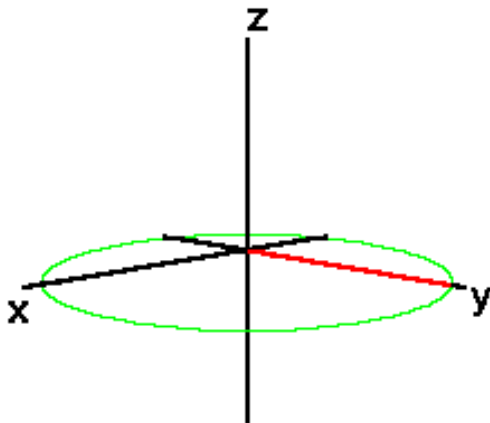
## Precese (3)

Pro magnetizaci ne zcela v rovině  $xy$



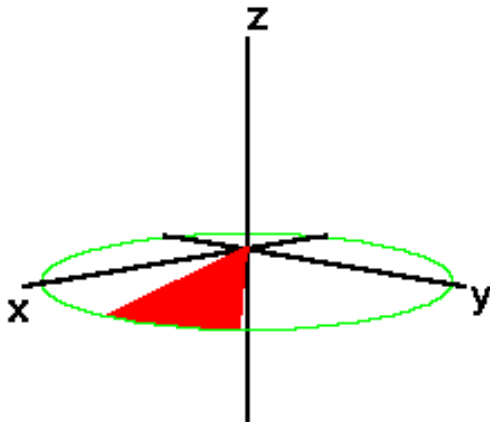
## $T_2$ relaxace

Precese každého spinu s trochu jinou  $f$   $\rightarrow$  ztráta synchronizace



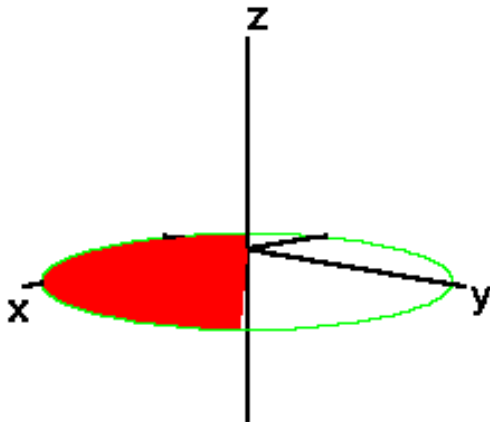
## $T_2$ relaxace

Precese každého spinu s trochu jinou  $f \rightarrow$  ztráta synchronizace



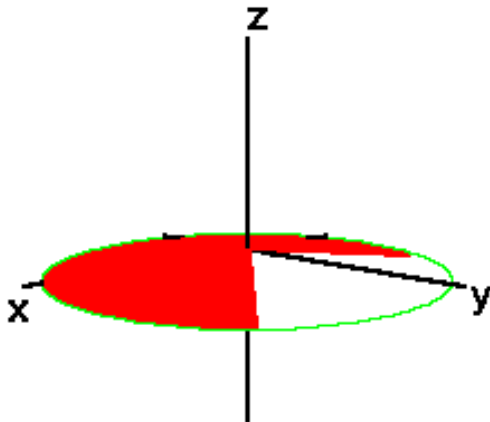
## $T_2$ relaxace

Precese každého spinu s trochu jinou  $f \rightarrow$  ztráta synchronizace



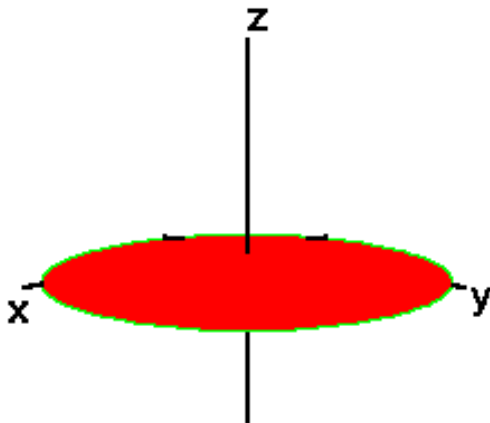
## $T_2$ relaxace

Precese každého spinu s trochu jinou  $f \rightarrow$  ztráta synchronizace



## $T_2$ relaxace

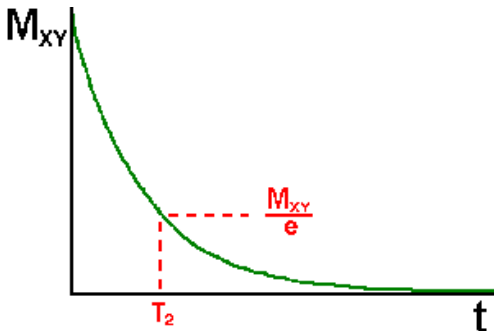
Precese každého spinu s trochu jinou  $f$   $\rightarrow$  ztráta synchronizace



## $T_2$ relaxace (2)

Transversální magnetizace  $M_{xy}$  postupně klesá

$$M_{xy} = M_{xy0} e^{-\frac{t}{T_2}}$$

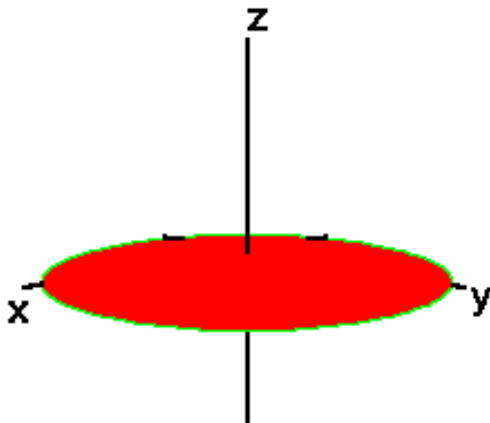


$T_2$  — spinová relaxační časová konstanta (spin-spin relaxation time),  $T_2 < T_1$



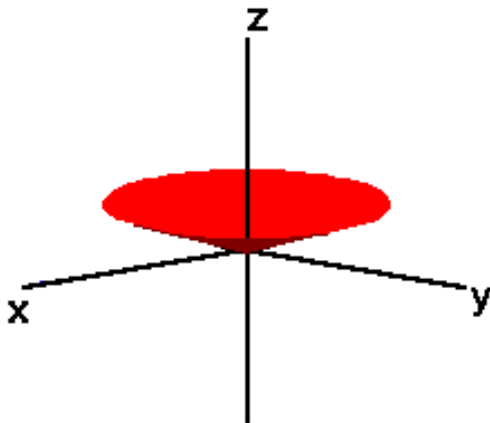
## $T_1$ a $T_2$ relaxace

- Transversální magnetizace  $M_{xy}$  postupně klesá
- Zároveň (ale pomaleji) dochází k návratu  $M_z \rightarrow M_0$ .



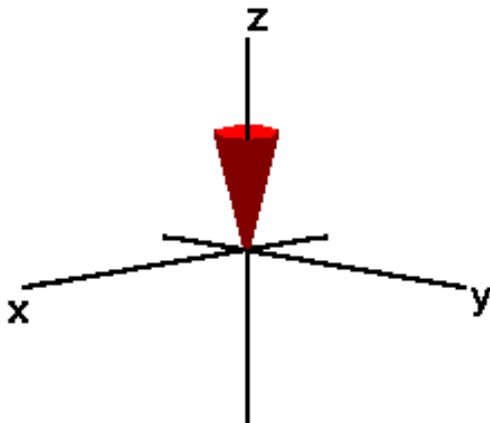
## $T_1$ a $T_2$ relaxace

- Transversální magnetizace  $M_{xy}$  postupně klesá
- Zároveň (ale pomaleji) dochází k návratu  $M_z \rightarrow M_0$ .



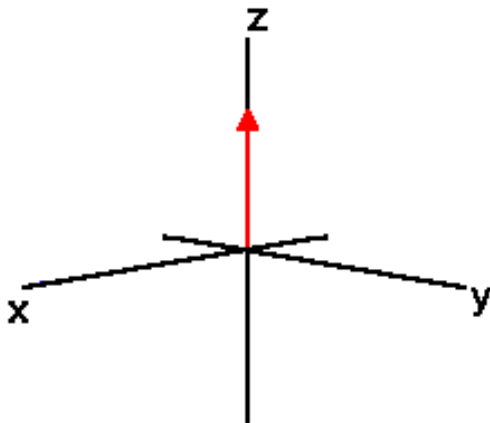
## $T_1$ a $T_2$ relaxace

- Transversální magnetizace  $M_{xy}$  postupně klesá
- Zároveň (ale pomaleji) dochází k návratu  $M_z \rightarrow M_0$ .



## $T_1$ a $T_2$ relaxace

- Transversální magnetizace  $M_{xy}$  postupně klesá
- Zároveň (ale pomaleji) dochází k návratu  $M_z \rightarrow M_0$ .



## Důvody $T_2$ relaxace

- Molekulární interakce ( $T_2$ )
- Nehomogenita magnetického pole ( $T_2^{\text{inhom}}$ )

Kombinovaná časová konstanta  $T_2^*$ :

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_2^{\text{inhom}}}$$

## Další faktory ovlivňující relaxaci

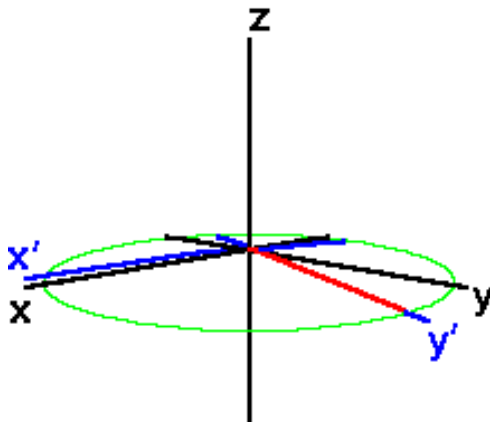
- Pohyb molekul (vlivem nehomogenity mag. pole)
- Teplota
- Viskozita
- Fluktuace

### Časy relaxace (1.5 T)

tkáň	$T_1$ [ms]	$T_2$ [ms]
tuk	260	80
sval	870	45
mozek (šedá hmota)	900	100
mozek (bílá hmota)	780	90
játra	500	40
mozkomíšní tekutina	2400	160

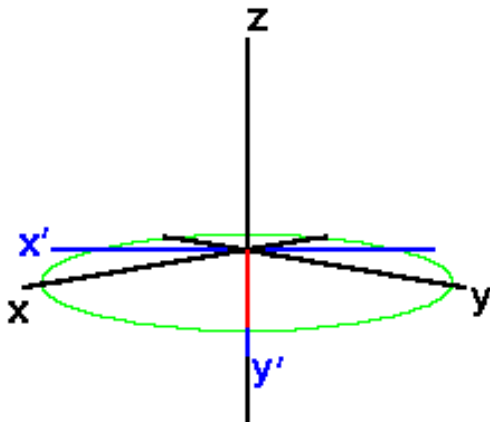
## Rotující soustava souřadnic

... rotuje kolem osy  $z$  s Larmorovou frekvencí  $f$



## Rotující soustava souřadnic

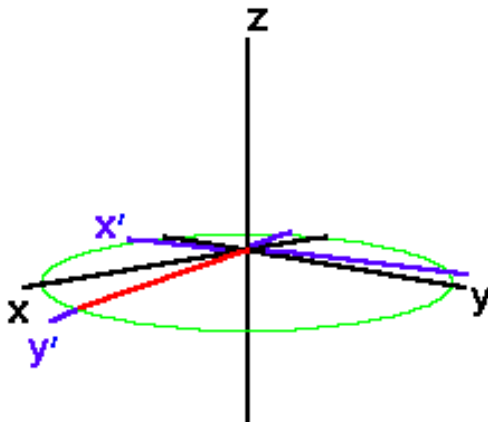
... rotuje kolem osy  $z$  s Larmorovou frekvencí  $f$





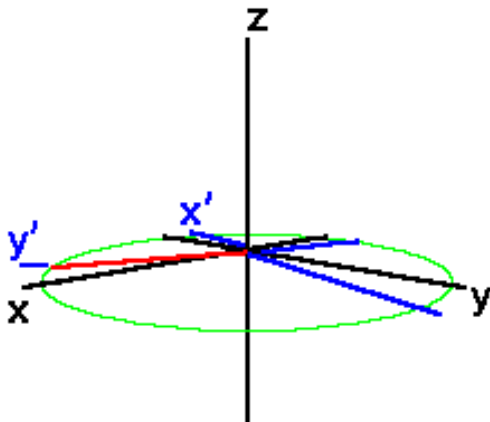
## Rotující soustava souřadnic

... rotuje kolem osy  $z$  s Larmorovou frekvencí  $f$



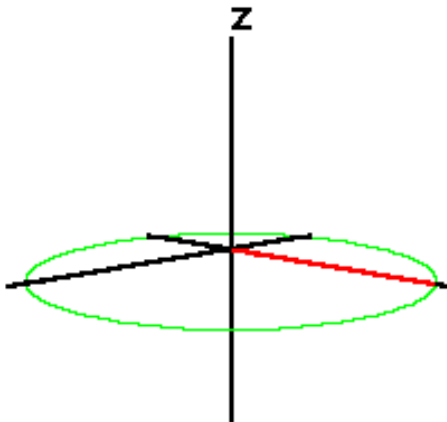
## Rotující soustava souřadnic

... rotuje kolem osy  $z$  s Larmorovou frekvencí  $f$



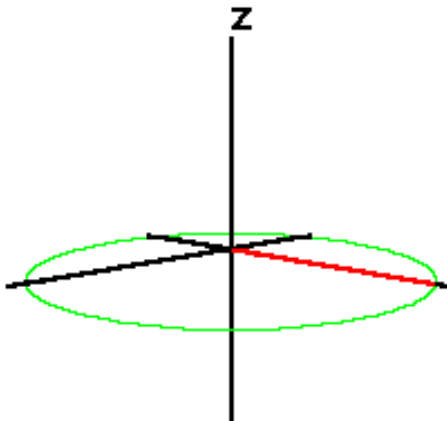
## Rotující soustava souřadnic (2)

$\mu$  rotující s frekvencí  $f$  se zdá stacionární



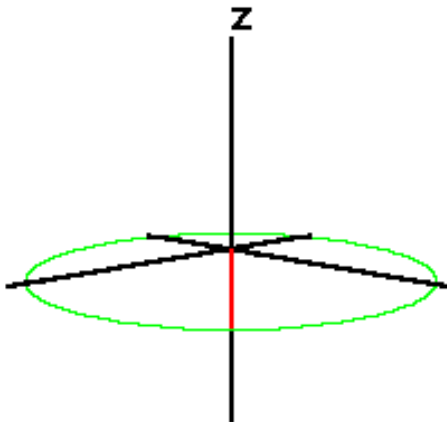
## Rotující soustava souřadnic (3)

$\mu$  rotující rychleji se otáčí souhlasně



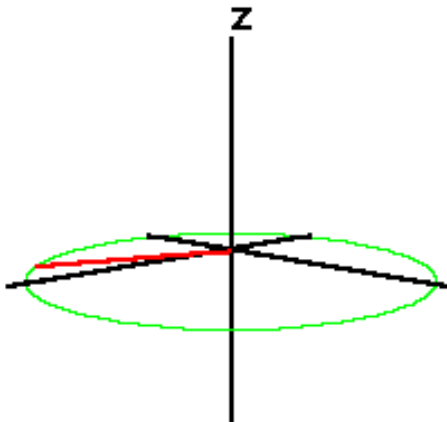
## Rotující soustava souřadnic (3)

$\mu$  rotující rychleji se otáčí souhlasně



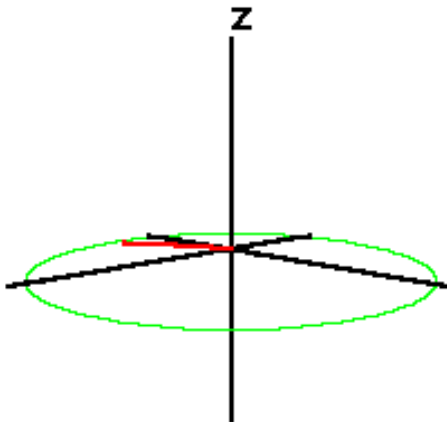
## Rotující soustava souřadnic (3)

$\mu$  rotující rychleji se otáčí souhlasně



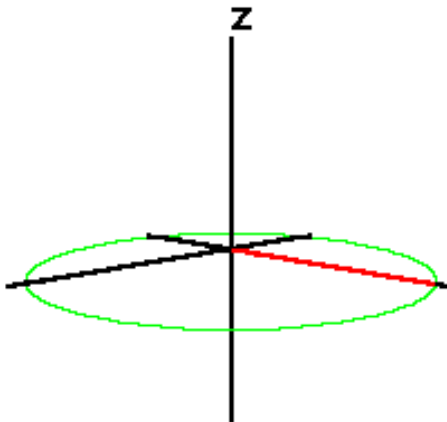
## Rotující soustava souřadnic (3)

$\mu$  rotující rychleji se otáčí souhlasně



## Rotující soustava souřadnic (4)

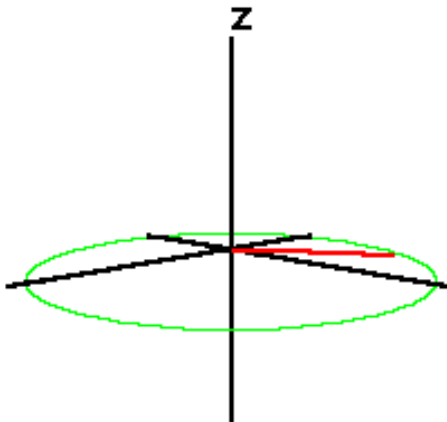
$\mu$  rotující pomaleji se otáčí nesouhlasně





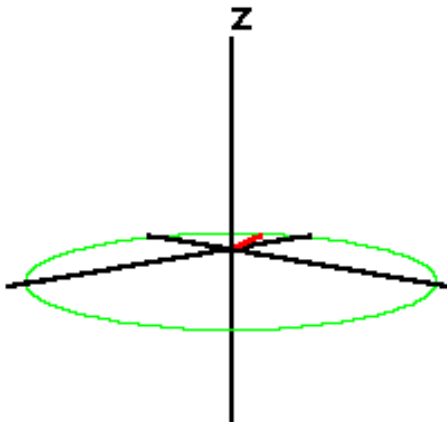
## Rotující soustava souřadnic (4)

$\mu$  rotující pomaleji se otáčí nesouhlasně



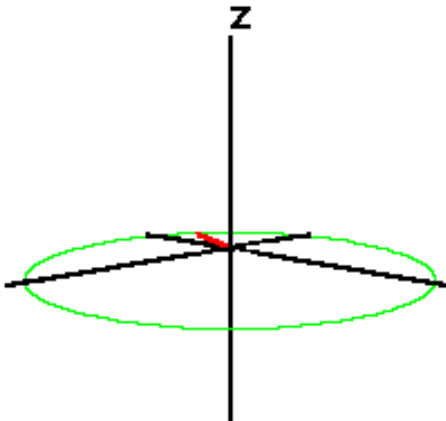
## Rotující soustava souřadnic (4)

$\mu$  rotující pomaleji se otáčí nesouhlasně



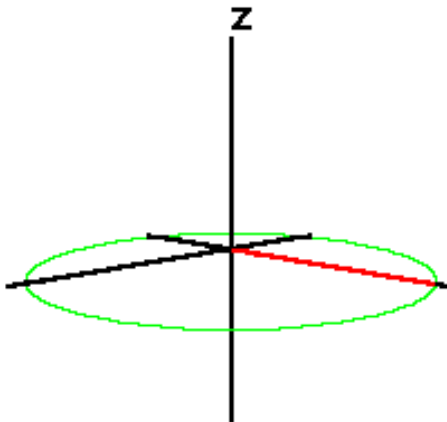
## Rotující soustava souřadnic (4)

$\mu$  rotující pomaleji se otáčí nesouhlasně



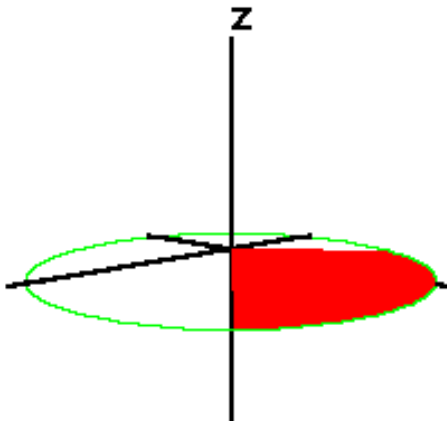
## Rotující soustava souřadnic (5)

... a desynchronizace vypadá takto:



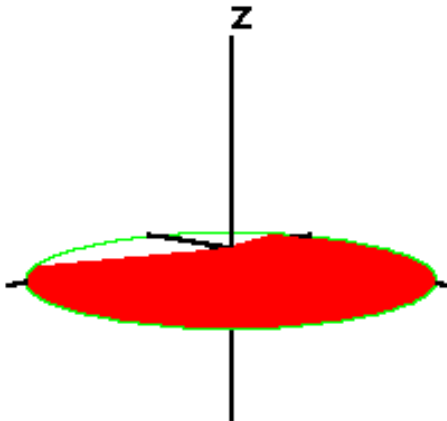
## Rotující soustava souřadnic (5)

... a desynchronizace vypadá takto:



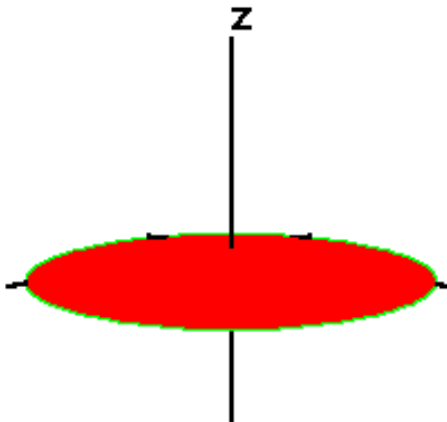
## Rotující soustava souřadnic (5)

... a desynchronizace vypadá takto:



## Rotující soustava souřadnic (5)

... a desynchronizace vypadá takto:



## Úvod

## Základy

Historie

Všeobecně...

## Fyzika MRI

Jaderný spin

Interakce

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

Relaxace a precese

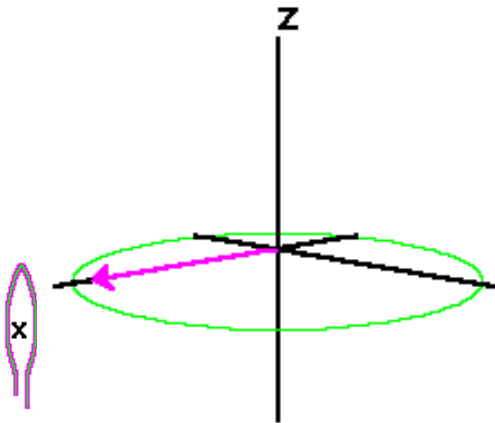
**Excitace**

Blochova rovnice



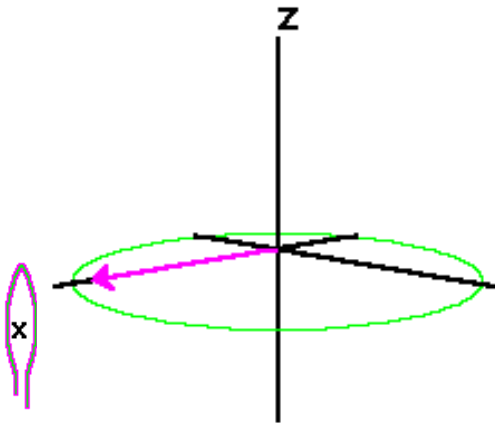
## Elektromagnetická excitace

- Cívka s osou  $x$  vytvoří magnetické pole ve směru  $x$



## Elektromagnetická excitace

- Cívka s osou  $x$  vytvoří magnetické pole ve směru  $x$
- Střídavý proud s frekvencí  $f$  vytvoří pole  $\mathbf{B}_1$  s frekvencí  $f$



## Elektromagnetická excitace

- Cívka s osou  $x$  vytvoří magnetické pole ve směru  $x$
- Střídavý proud s frekvencí  $f$  vytvoří pole  $\mathbf{B}_1$  s frekvencí  $f$
- $\mathbf{B}_1$  se dá rozložit na  $\mathbf{B}_1^+ + \mathbf{B}_1^-$ , rotující okolo  $z$  s frekvencí  $\pm f$

## Elektromagnetická excitace

- Cívka s osou  $x$  vytvoří magnetické pole ve směru  $x$
- Střídavý proud s frekvencí  $f$  vytvoří pole  $\mathbf{B}_1$  s frekvencí  $f$
- $\mathbf{B}_1$  se dá rozložit na  $\mathbf{B}_1^+ + \mathbf{B}_1^-$ , rotující okolo  $z$  s frekvencí  $\pm f$
- $\mathbf{B}_1^+$  bude v rotující soustavě souřadnic stacionární.

## Elektromagnetická excitace

- Cívka s osou  $x$  vytvoří magnetické pole ve směru  $x$
- Střídavý proud s frekvencí  $f$  vytvoří pole  $\mathbf{B}_1$  s frekvencí  $f$
- $\mathbf{B}_1$  se dá rozložit na  $\mathbf{B}_1^+ + \mathbf{B}_1^-$ , rotující okolo  $z$  s frekvencí  $\pm f$
- $\mathbf{B}_1^+$  bude v rotující soustavě souřadnic stacionární.
- $\mathbf{B}_1^-$  bude mít frekvenci  $2f$ , daleko od rezonance, zanedbáme.

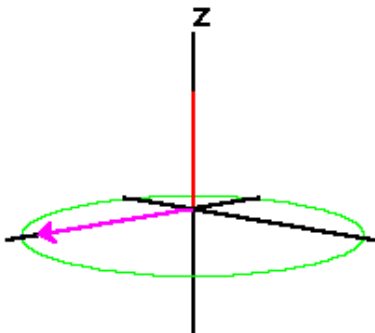
## Elektromagnetická excitace

- Cívka s osou  $x$  vytvoří magnetické pole ve směru  $x$
- Střídavý proud s frekvencí  $f$  vytvoří pole  $\mathbf{B}_1$  s frekvencí  $f$
- $\mathbf{B}_1$  se dá rozložit na  $\mathbf{B}_1^+ + \mathbf{B}_1^-$ , rotující okolo  $z$  s frekvencí  $\pm f$
- $\mathbf{B}_1^+$  bude v rotující soustavě souřadnic stacionární.
- $\mathbf{B}_1^-$  bude mít frekvenci  $2f$ , daleko od rezonance, zanedbáme.
- $\rightarrow$  pole  $\mathbf{B}_1$  se bude v rotující soustavě jevit stacionární, ve směru  $x'$ .

## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

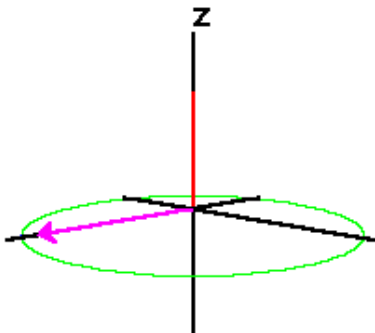


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$



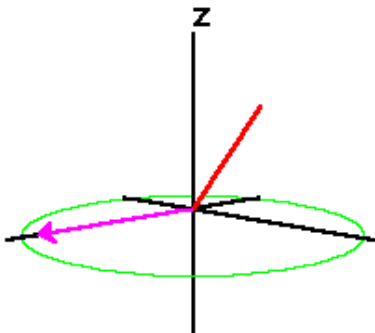


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$

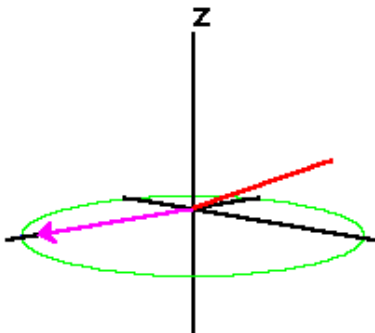


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$

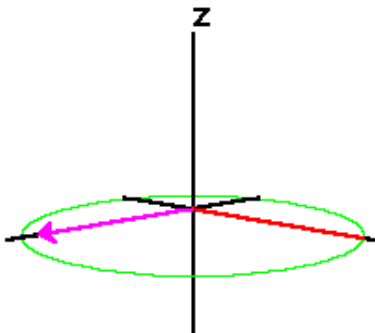


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$

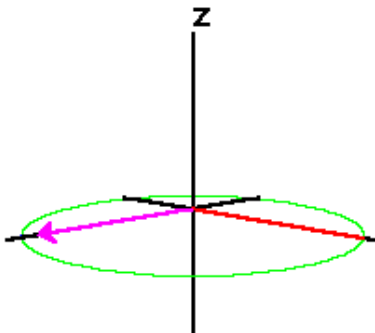


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$

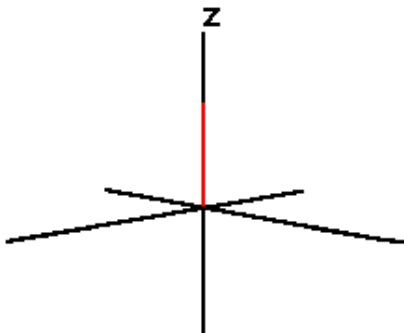


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .

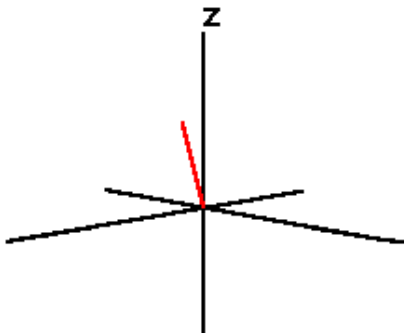


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .

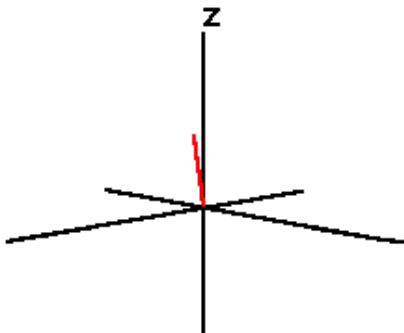


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .

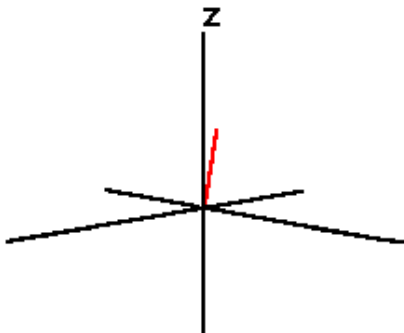


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .



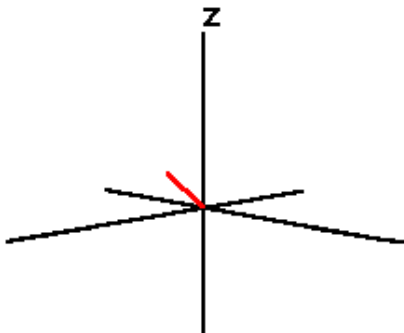


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .

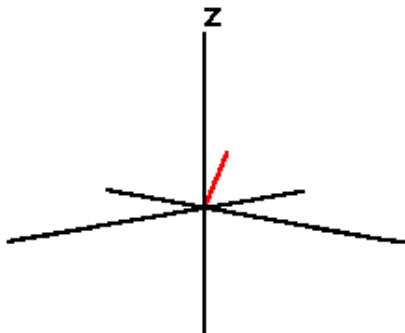


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .

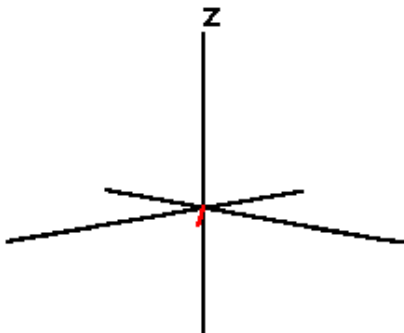


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .

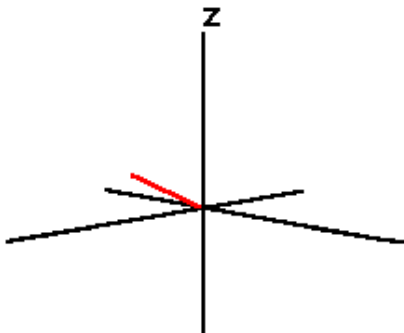


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .

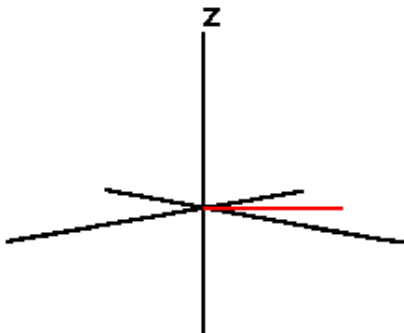


## Natočení vektoru magnetizace

- Impuls o Larmorově frekvenci  $f$  (tzv. *rezonanční podmínka*), amplitudě  $B_1$  a délce trvání  $\tau$
- $\rightarrow$  magnetizace  $\mathbf{M}$  se natočí podle osy  $B_1$  ( $x'$ ) o úhel

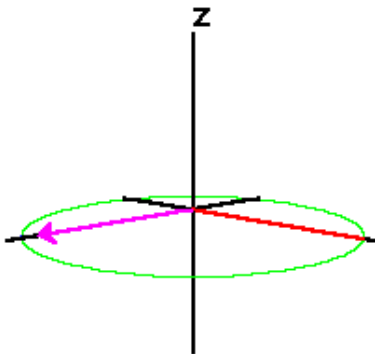
$$\alpha = 2\pi\gamma\tau B_1 \quad \text{flip angle}$$

- **90° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $y'$
- **180° impuls** — natočí  $\mathbf{M}$  do směru  $-z'$
- v nerotující soustavě souřadnic. . .



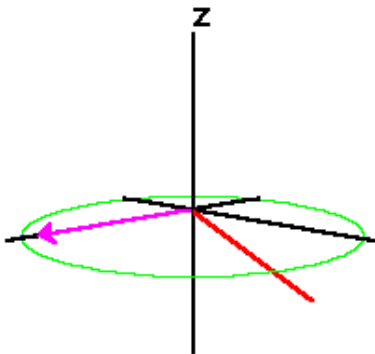
## Natočení vektoru magnetizace (2)

- Magnetizace je otočena o úhel  $\alpha$  z libovolné počáteční pozice
- $180^\circ$  impuls pro  $\mathbf{M} \parallel y'$



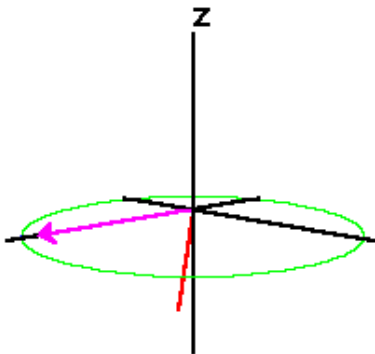
## Natočení vektoru magnetizace (2)

- Magnetizace je otočena o úhel  $\alpha$  z libovolné počáteční pozice
- $180^\circ$  impuls pro  $\mathbf{M} \parallel y'$



## Natočení vektoru magnetizace (2)

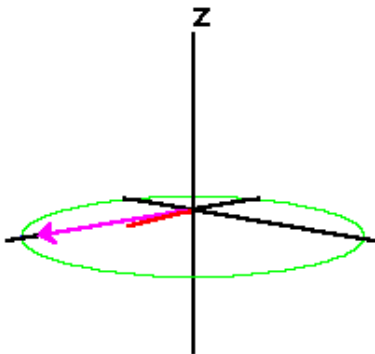
- Magnetizace je otočena o úhel  $\alpha$  z libovolné počáteční pozice
- $180^\circ$  impuls pro  $\mathbf{M} \parallel y'$





## Natočení vektoru magnetizace (2)

- Magnetizace je otočena o úhel  $\alpha$  z libovolné počáteční pozice
- $180^\circ$  impuls pro  $\mathbf{M} \parallel y'$



## Úvod

## Základy

Historie

Všeobecně...

## Fyzika MRI

Jaderný spin

Interakce

Boltzmannova statistika

Makroskopický pohled

Relaxace a precese

Excitace

**Blochova rovnice**

## Blochova rovnice

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}$$

kde  $\mathbf{B}$  je celkové magnetické pole ( $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ ).

## Blochovy rovnice (2)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}$$

dosadíme za  $\mathbf{B}$ , přidáme ztráty a přejdeme do rotujícího systému

$$\begin{aligned}\frac{dM_{x'}}{dt} &= (\omega_0 - \omega)M_{y'} - \frac{M_{x'}}{T_2} \\ \frac{dM_{y'}}{dt} &= -(\omega_0 - \omega)M_{x'} + 2\pi\gamma B_1 M_z - \frac{M_{y'}}{T_2} \\ \frac{dM_z}{dt} &= -2\pi\gamma B_1 M_{y'} - \frac{M_z - M_{z0}}{T_1}\end{aligned}$$

kde  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi\gamma B_0$ ,  $\omega$  je frekvence rotace spinu.