PAL cv. 2

September 29, 2021

1/2. Máme najít kostru grafu, nikoli nutně minimální, s tím, že je předepsáno, že cena každé hrany hledané kostry musí ležet v daném intervalu $< c_1, c_2 >$. Je nutno použít algoritmus pro hledání minimální kostry nebo stačí nějaký jednodušší postup?

1/4. Předpokládejme, že vážený neorientovaný graf G je reprezentován svou váhovou maticí C. Určete, jaká bude asymptotická složitost Kruskalova algoritmu hledání minimální kostry za předpokladu, že doba přístupu ke každému prvku matice C je konstantní, ale zato doba každé jednotlivé operace *Union* i *Find* je vždy úměrná počtu uzlů v grafu G.

1/*5. Na svém počítači máte najít minimální kostru úplného váženého grafu. Odhadněte, kolik řádově nejvýše uzlů může takový graf mít, abyste úlohu vyřešili přes noc do druhého dne. Zdůvodněte svůj odhad.

1/10. Nalezli jsme a odevzdali zákazníkovi minimální kostru jím dodaného grafu s mnoha miliony vrcholů. Odpoledne zákazník volá, že v zadání je chyba a že hrana mezi vrcholy 2075154 a 11439446 je ve skutečnosti o 17% levnější, než v jak bylo uvedeno v původní specifikaci. Veškerá data grafu i kostry jsou dosud na našem disku. Máme určit v lineárním čase vzhledem k počtu vrcholů, zda tato změna ovlivní tvar a cenu minimální kostry, a pokud ano, vydat co možná nejkratší opravu, která se dá tlumočit zpět telefonem.

2/*1. Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu?

2/*2. Pro která m, n je úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ Hamiltonovský?

2/*4. Dva orientované grafy G_1, G_2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?

2/*5. Popište, jak najdete a vypíšete všechny cesty délky 3 v acyklickém prostém grafu (bez násobných hran). Jaký je jejich maximální možný počet v závislosti na počtu uzlů grafu? Jaká bude asymptotická složitost Vašeho algoritmu?

2/9. Najděte orientovaný graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus.

2/11. Neorientovaný graf typu (r) vytvoříme takto: Zvolíme dvě disjunktní množiny uzlů $A = \{a_1, a_2, ...a_r\}$, $B = \{b_1, b_2, ...b_r\}$, nad množinou A vytvoříme úplný graf, nad množinou B vytvoříme úplný graf a do grafu přidáme hrany $(a_1, b_1), (a_2, b_2)..., (a_r, b_r)$. Pro která r bude výsledný graf Eulerovský?

2/15. Slabě souvislý orientovaný graf G s n uzly a m hranami obsahuje c_1 kořenů a c_2 listů, přičemž hodnoty n, c_1, c_2 jsou pevně dány. Pro které hodnoty m je zaručeno, že G bude acyklický? Jaká je vůbec maximální možná hodnota m v závislosti na n, c_1, c_2?

2/8. Orientovaný graf prohlásíme za směrově homogenní, pokud vzdálenost (= počet hran na nejkratší možné cestě) každé dvojice uzlů (kořen, list) je vždy stejně velká bez ohledu na to, který kořen nebo list zvolíme. Formulujte efektivní algoritmus, který rozhodne, zda daný graf je směrově homogenní a určete jeho asymptotickou složitost. Lze algoritmus zrychlit, pokud víme, že graf je acyklický?