Většinu významných otázek o grafech lze snadno a přehledně formulovat.

Snadná otázka

Kompletní řešení zvládne informatický bakalář.

Těžká otázka

Kompletní řešení dosud nezvládl nikdo.
Ačkoli mnohdy existují pokročilá dosti dobrá přibližná řešení.

Clay Mathematics Institute

Od roku **2000** (!) nabízí **1 000 000 $** za kompletní řešení kterékoli těžké otázky.
Dodnes se nikdo nepřihlásil....

https://www.claymath.org/millennium-problems/
https://www.claymath.org/millennium/p-vs-np/

Náznak dělení grafových úloh podle obtížnosti

"Snadné" úlohy

Je znám polynomiální algoritmus řešení
pro všechny možné případy.

vzdálenosti uzlů (vážené i nevážené),
nejkratší cesty (vážené i nevážené)
souvislost, silná souvislost,
Eulerova cesta/kružnice,
úloha čínského pošťáka,
*** rovinnost,**
*** maximální párování ,**
barevnost == 2
minimální kostra,
optimální tok v síti,
atd...

* -- složitější postup, ale pořád polynomiální

"Obtížné" úlohy

Není znám obecný polynomiální algoritmus řešení.
Mnohdy ale může existovat polynomiální řešení
pro speciální skupiny grafů (např. stromy, DAG,
atd).

*** nejdelší cesty (vážené i nevážené),**
Hamiltonovská cesta/kružnice,
úloha obchodního cestujícícho,
klikovost,
barevnost (> 2),
dominance,
nezávislost,
vrcholové pokrytí,
**** izomorfizmus,**
atd...
(https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems)

* -- v DAG snadné
** -- ve stromech snadné

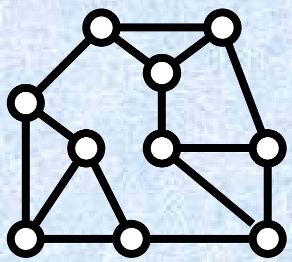
Souvislost

Existuje cesta mezi libovolnými dvěma uzly?

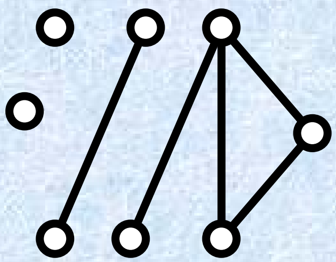
Polynomiální složitost

Algoritmus: DFS, BFS, Union-Find

Složitost: DFS, BFS $O(\ |V|+|E|\ )$, Union-Find $O(\ |E| \cdot \alpha(|V|)\ )$



Ano,
jedna komponenta souvislosti.



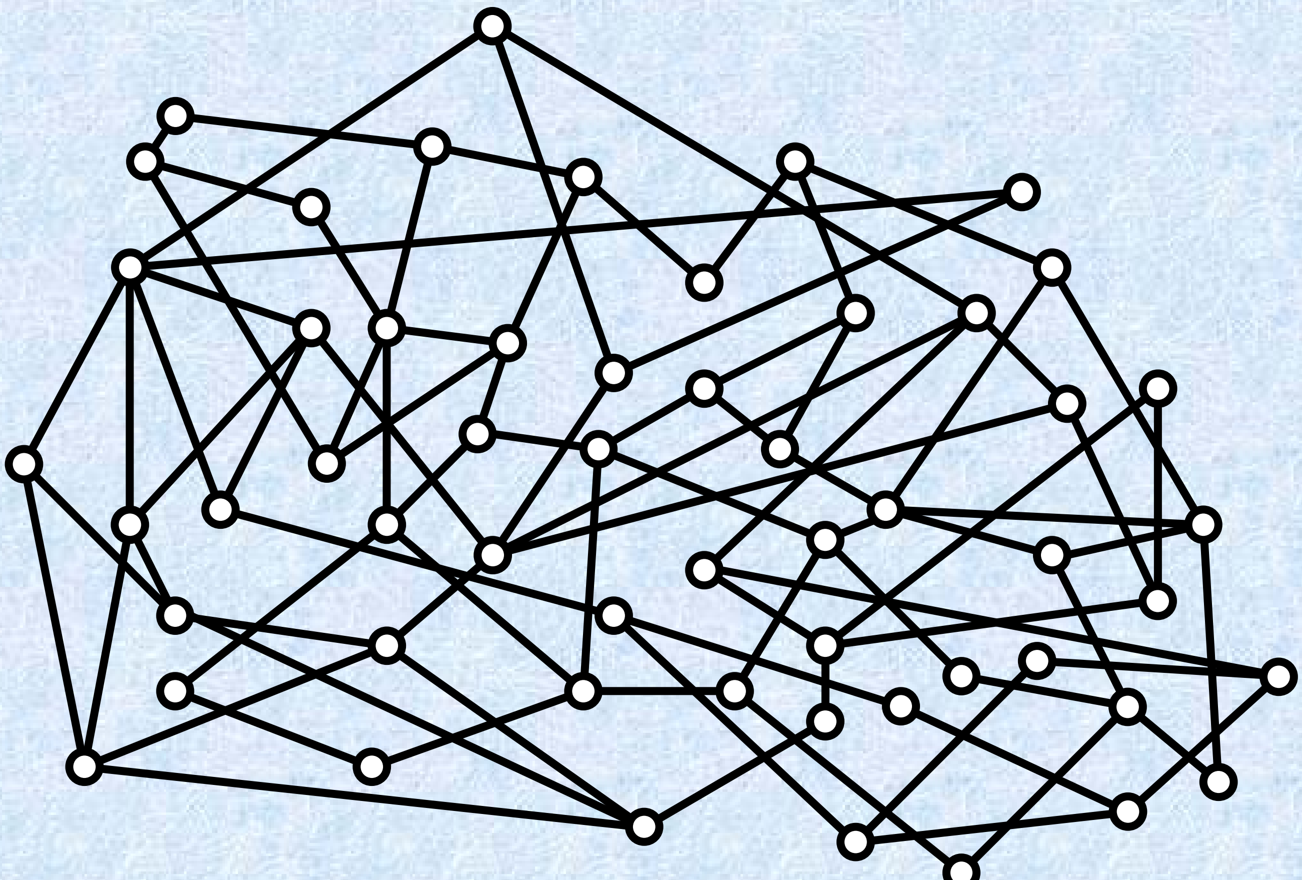
Ne,
čtyři komponenty souvislosti.

Souvislost

Existuje cesta mezi libovolnými dvěma uzly?

Polynomiální složitost

Souvislý graf?



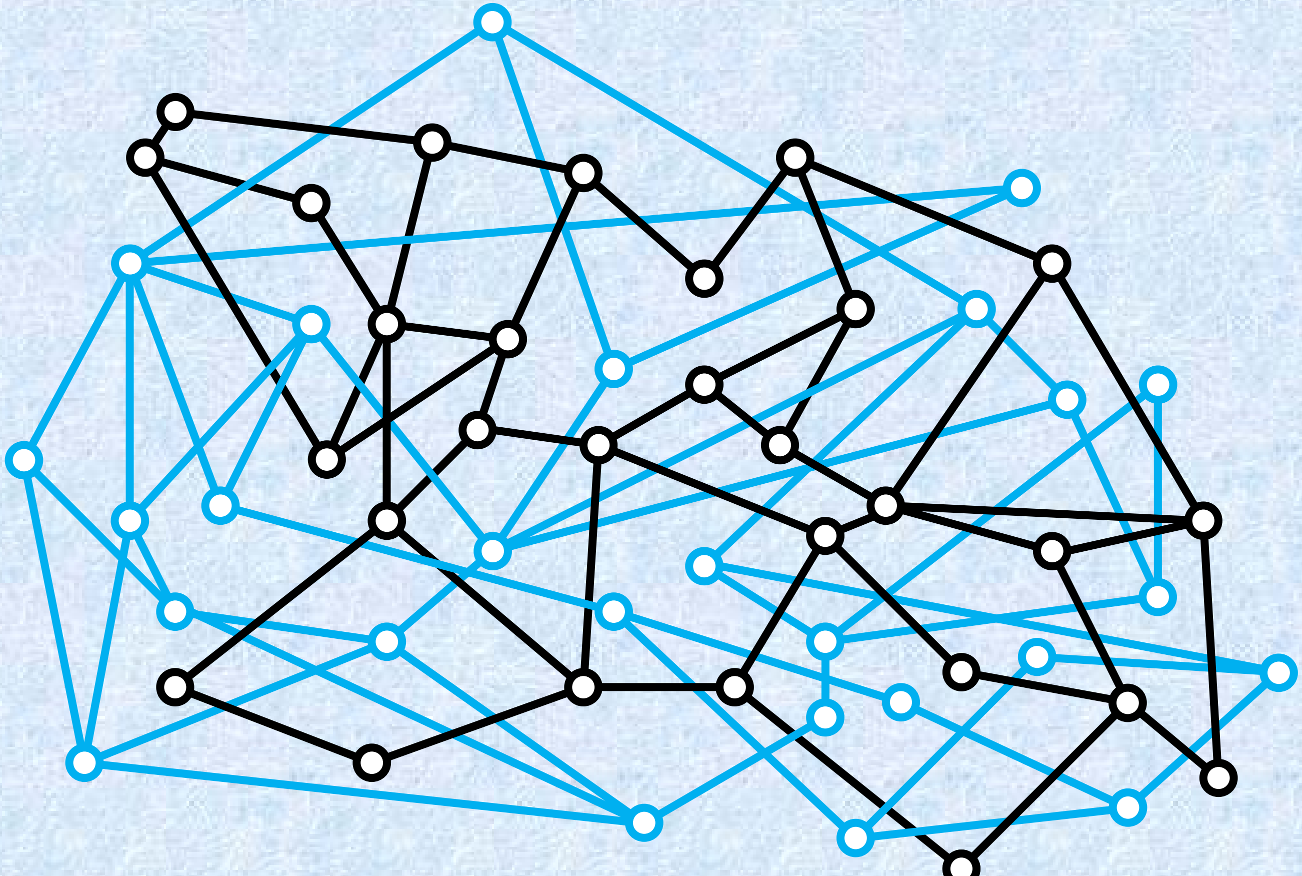
Souvislost

Existuje cesta mezi libovolnými dvěma uzly?

Polynomiální složitost

Souvislý graf?

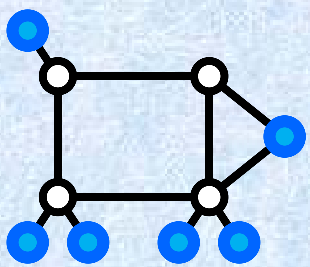
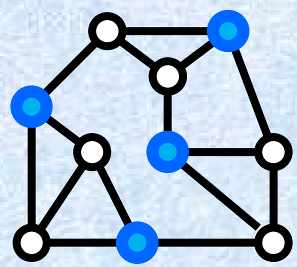
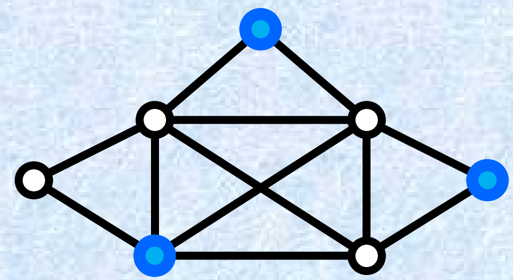
Ne,
dvě komponenty.



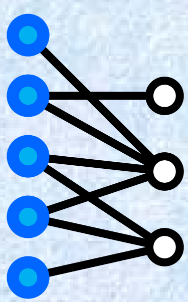
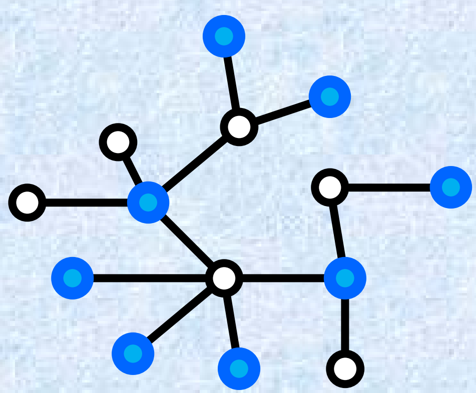
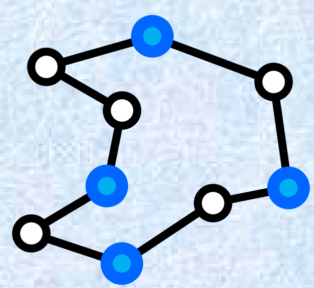
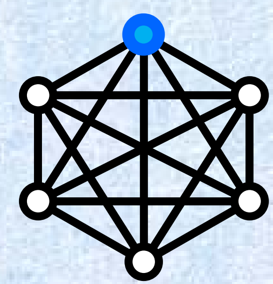
Nezávislost

Velikost maximální množiny uzlů takové, že žádné její dva uzly nesousedí.

NP-úplný problém obecně

Polynomiální složitost pro grafy s některou jednoduchou strukturou

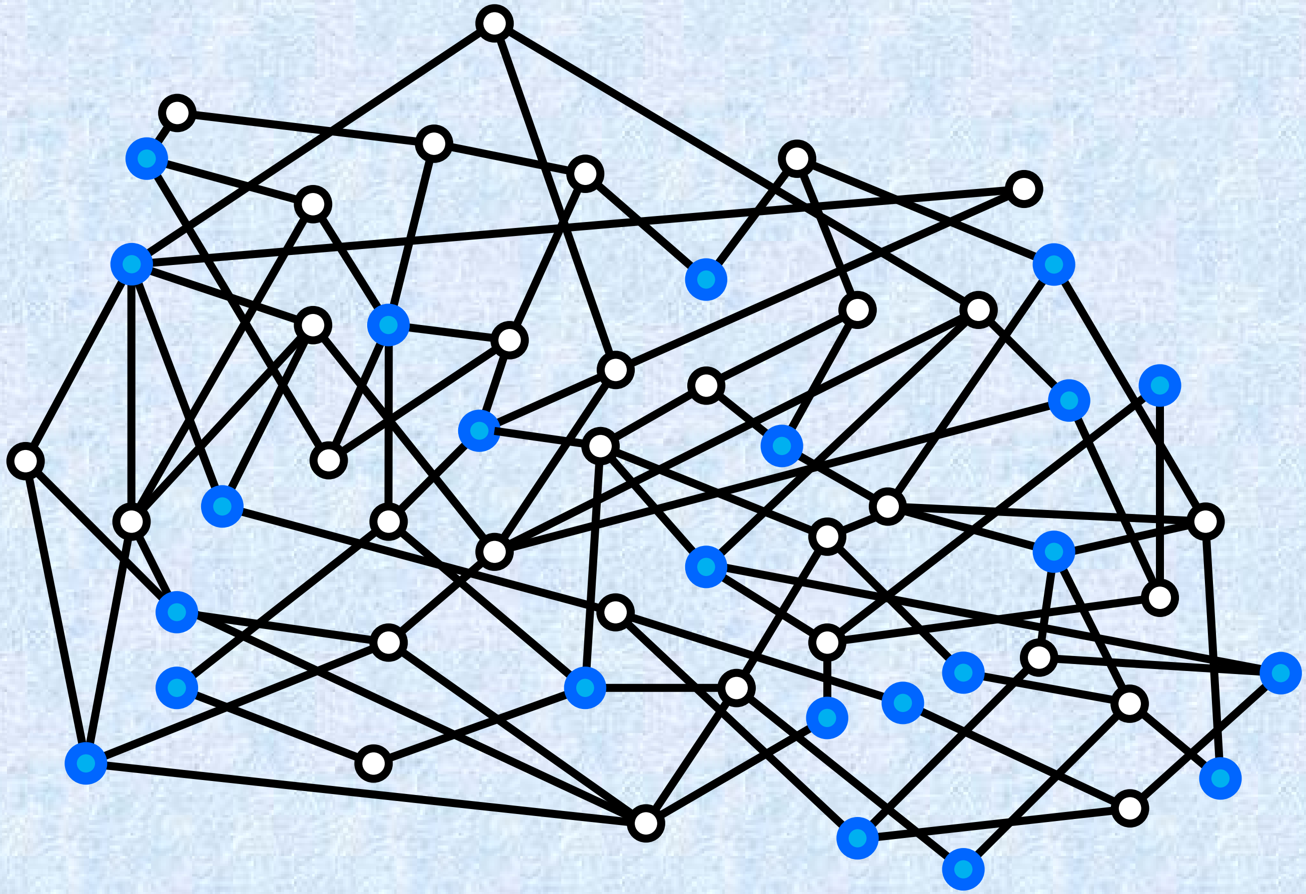
- **Bipartitní graf**
- **Strom** je vždy bipartitní
- **Kružnice**
- **Úplný graf**

Nezávislost

Velikost maximální množiny uzlů takové, že žádné dva nesousedí.

Př. Kolik jich bude? Více než 23?

NP-úplný problém

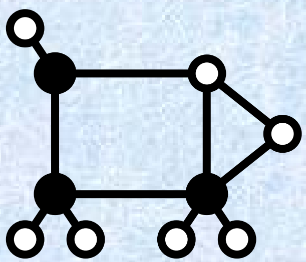


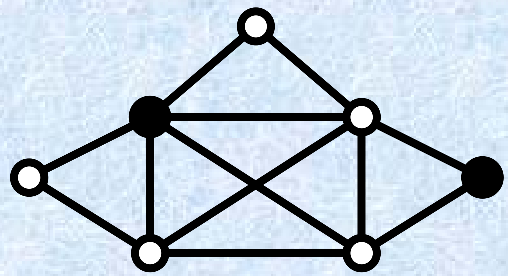
Dominance

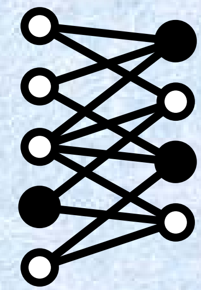
Velikost takové minimální množiny uzlů M, že každý uzel v grafu je buď v M nebo sousedí s nějakým uzlem v M.

Př. Požární stanice má být vždy buď ve vesnici nebo v sousední vesnici. Jaký je minimální počet potřebných požárních stanic?

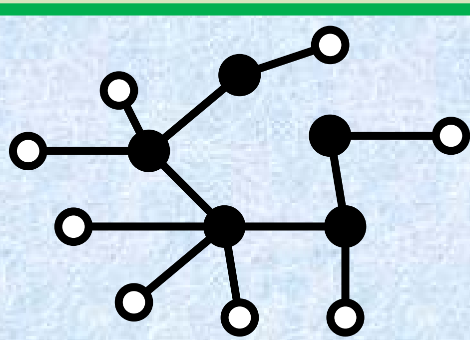
NP-úplný problém

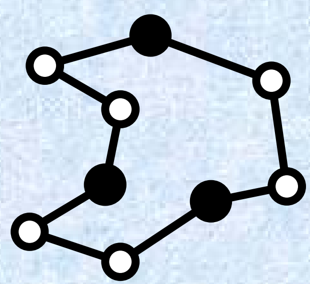


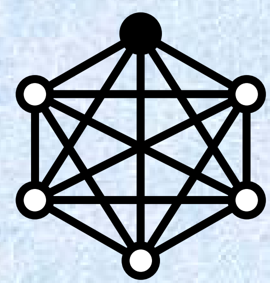




Polynomiální složitost pro grafy s určitou jednoduchou strukturou





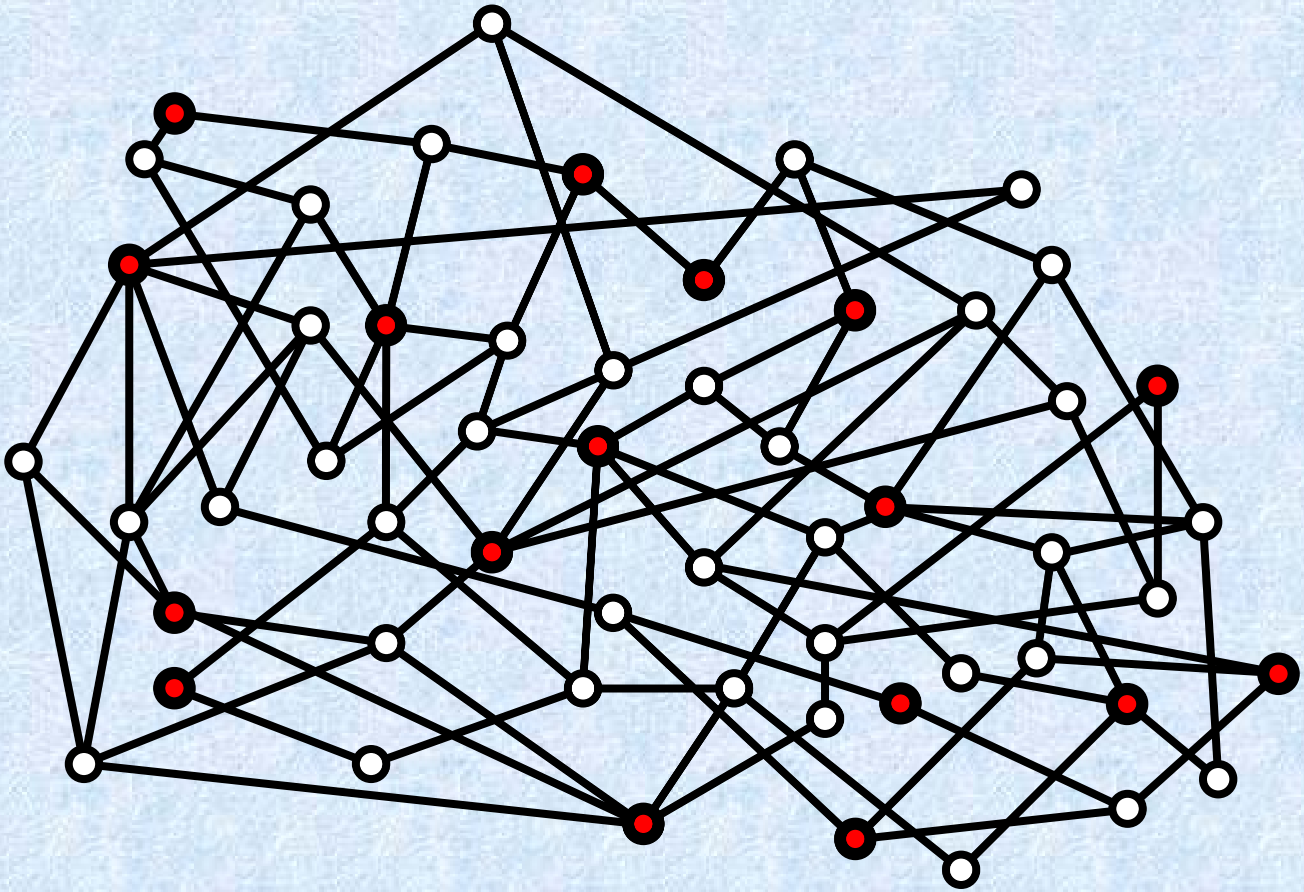


- **Strom,** použij DP
- **Kružnice**
- **Úplný graf**

Dominance

Př. Požární stanice má být vždy buď ve vesnici nebo v sousední vesnici. Jaký je minimální počet potřebných požárních stanic? Postačí 17?

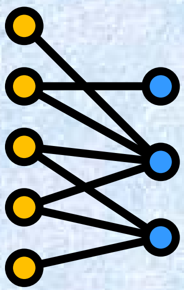
NP-úplný problém



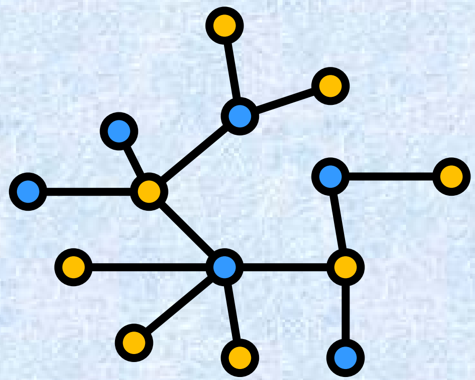
Barevnost

Minimální počet barev na obarvení uzlů tak, aby sousední uzly vždy měly rozdílnou barvu.

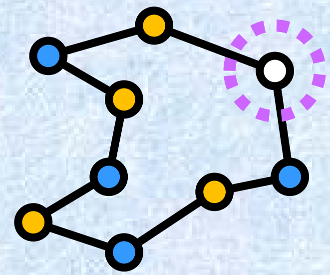
Stačí 2 barvy? -- Polynomiální složitost. Vždy, když je graf bipartitní.



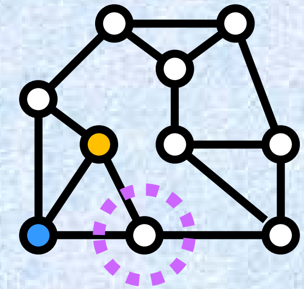
2 barvy stačí, graf je bipartitní.



2 barvy stačí, strom je vždy bipartitní.



2 barvy nestačí, v bipartitním grafu jsou kružnice jen sudé délky.



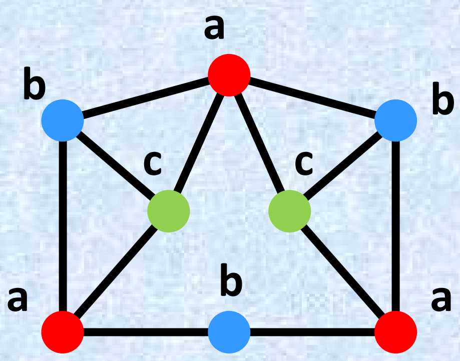
2 barvy nestačí, graf obsahuje trojúhelník (což je kružnice liché délky).

Bipartitnost se určí pomocí BFS.
Uzly v sudé vzdálenosti od startu označíme 0, uzly v liché vzdálenosti od startu označíme 1. Průběžně ověřujeme, zda nějaké dva stejně označené uzly sousedí.
Pokud ano, graf NENÍ bipartitiní, jinak JE bipartitní.

Barevnost

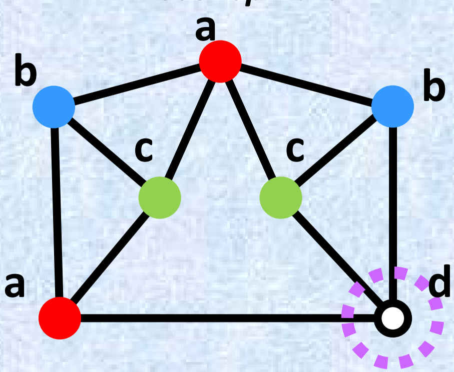
Minimální počet barev na obarvení uzlů tak, aby sousední uzly vždy měly rozdílnou barvu.

Stačí 3 barvy nebo více? -- NP-úplný problém

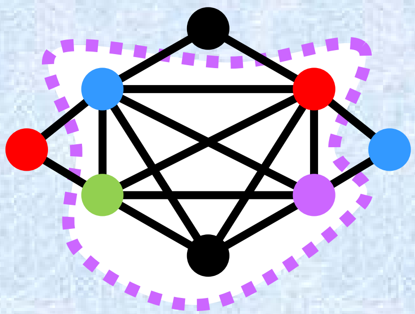


3 barvy.

Moser spindle



4 barvy.
Obarvení a,b,c je BÚNO, vynutí si barvu d vpravo dole.



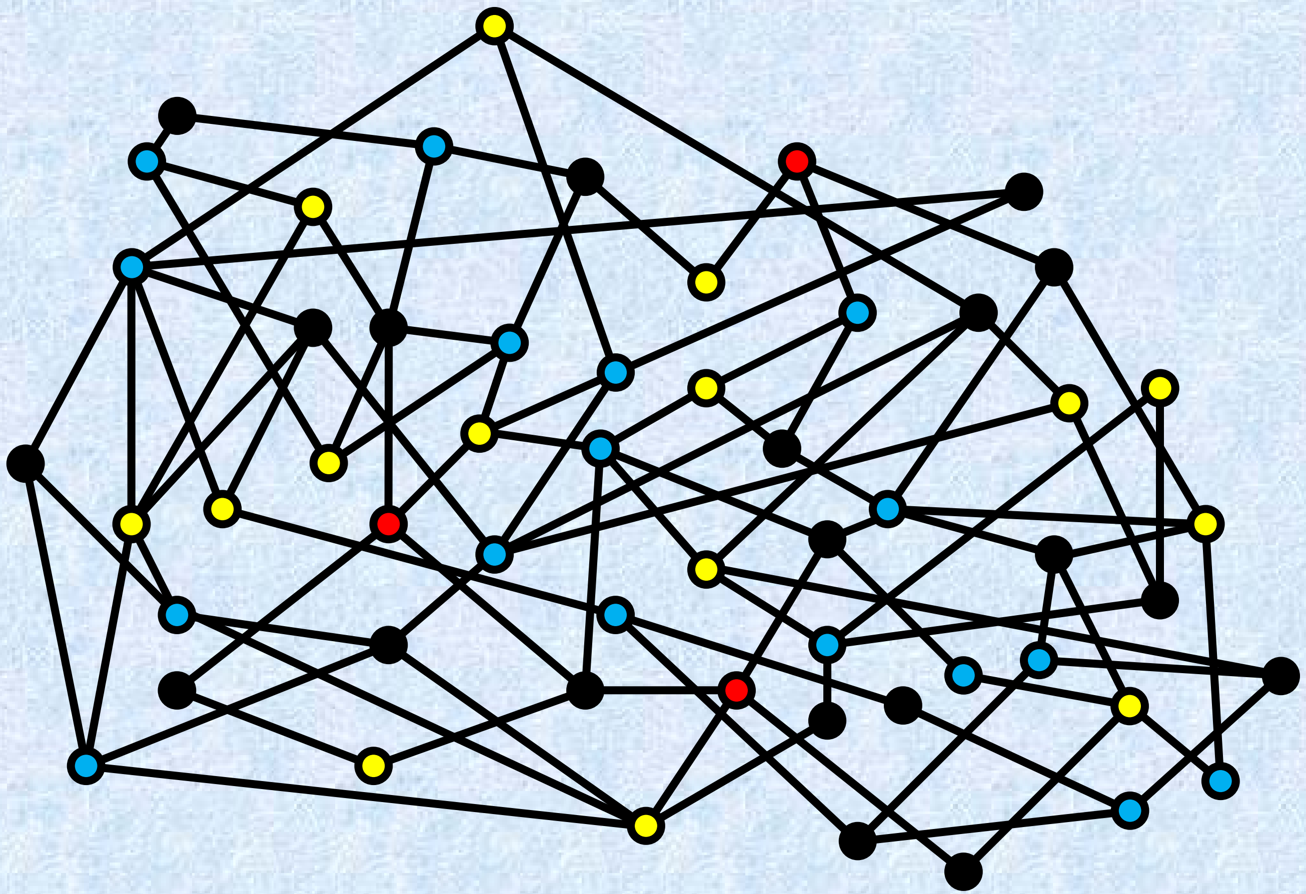
5 barev.
Graf obsahuje největší kliku velikosti 5.
Klikovost je také těžká otázka.

Barevnost

Minimální počet barev na obarvení uzlů tak, aby sousední uzly vždy měly rozdílnou barvu.

Stačí 3 barvy nebo více? -- NP-úplný problém

4 barvy stačí.
Budou stačit 3?



Nejkratší cesty

Nejkratší může být co se týče počtu hran nebo součtu délek jejích hran.

Polynomiální složitost

Algoritmy: BFS, Dijkstra, Bellman–Ford, Floyd–Warshall, Johnson...
Složitosti: Později, u jednotlivých případů.

Nejdelší cesty

Typicky s podmínkou nejvýše jedné návštěvy každého uzlu/hrany.

NP-úplný problém pro obecné grafy

Polynomiální složitost pro stromy a DAG

Algoritmus: Dynamické programování
Složitost : O(|V|+|E|)

Minimální kostra

Minimální sumární délka (cena) hran, které "drží graf pohromadě", tj. které umožňují spojení, byť nepohodlné, mezi každými dvěma uzly. Kostra je strom.

Polynomiální složitost

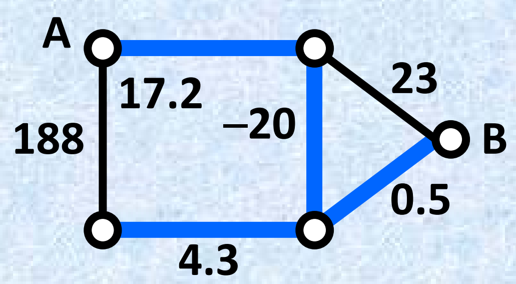
Algoritmy: **Primův** $O(|V|^2)$ s maticí sousednosti

$O(|E| \cdot \log(|V|))$ se spojovou reprezentací a s binární haldou

$O(|E| + |V| \cdot \log(|V|))$ se spojovou reprezentací a s Fibonacciho haldou

Kruskalův $O(|E| \cdot \log(|V|))$ stačí seznam hran na vstupu

Borůvkův $O(|E| \cdot \log(|V|))$ se spojovou reprezentací

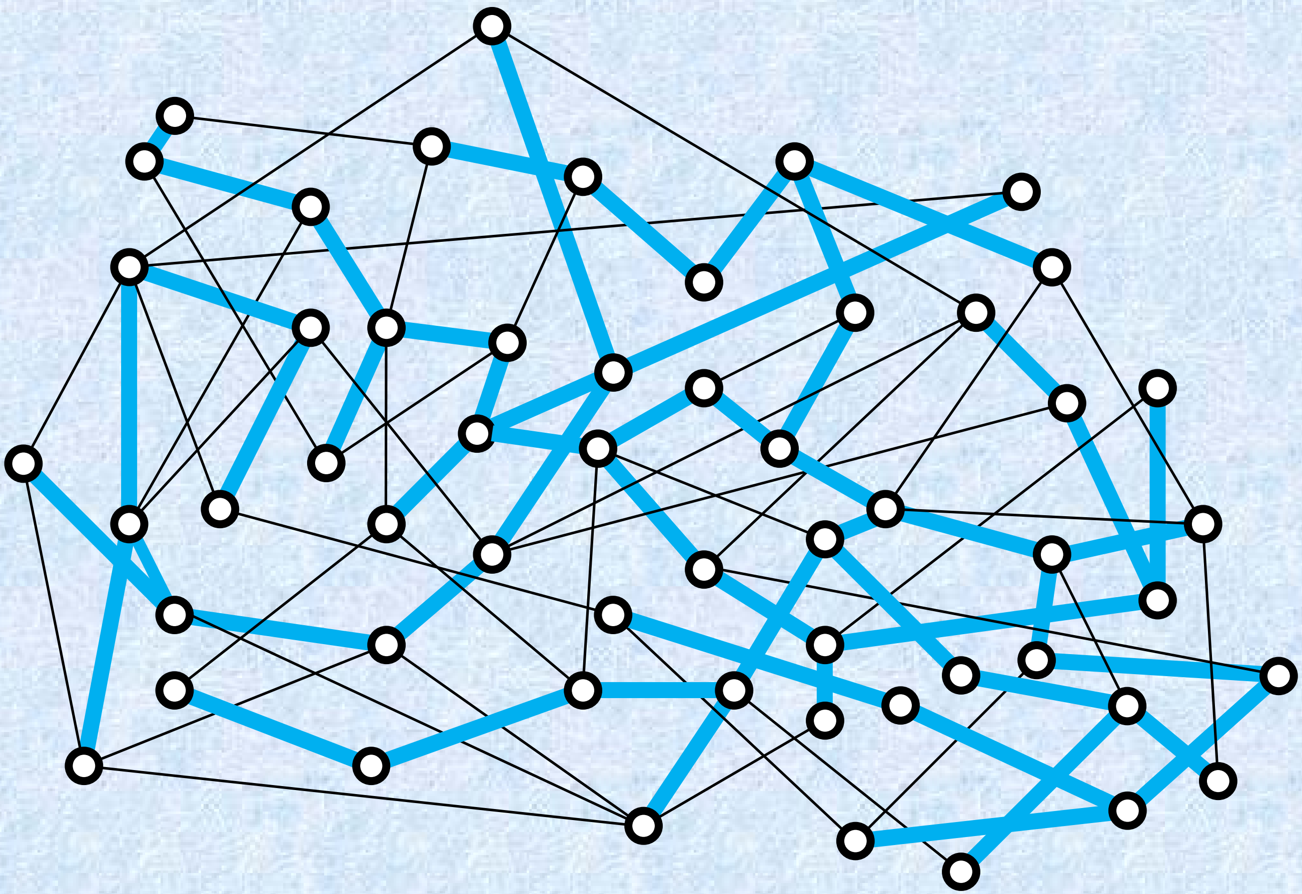


Minimální kostra

Minimální sumární délka (cena) hran, které "drží graf pohromadě", tj. které umožňují spojení, byť nepohodlné, mezi každými dvěma uzly. Kostra je strom.

Polynomiální složitost

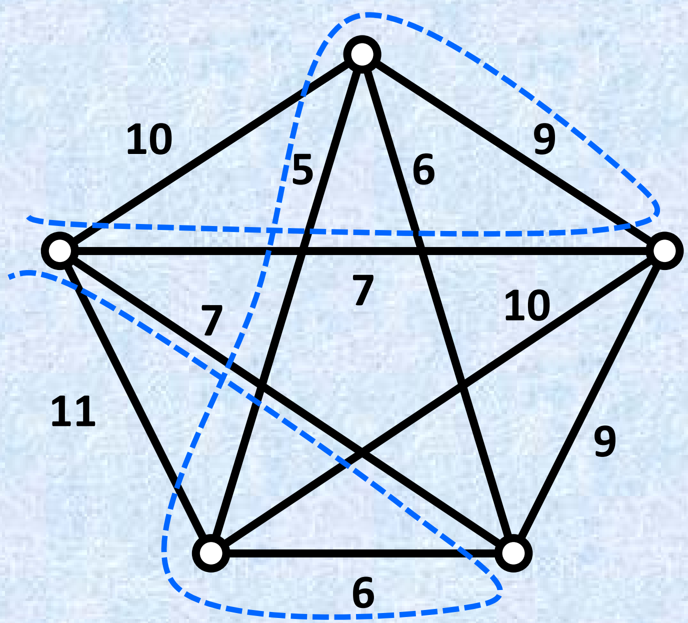
Zde cena hrany odpovídá její délce v nakreslení.



Úloha obchodního cestujícího

Projděte úplný graf, navštivte každý uzel aspoň jednou a vraťte se do výchozího uzlu. Celková délka cesty musí být minimální.

NP-úplný problém



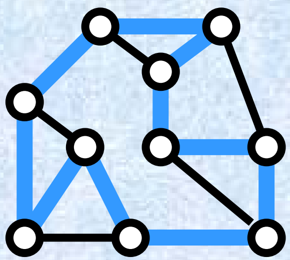
Hamiltonovská cesta

Obsahuje graf cestu, která prochází každým uzlem?

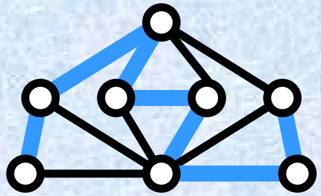
Hamiltonovská kružnice

Obsahuje graf kružnici, která prochází každým uzlem?

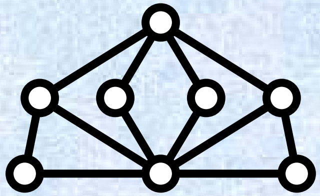
TNP-úplný problém



Existuje
cesta i kružnice.



Existuje
jen cesta
a ne kružnice.



Neexistuje
ani cesta
ani kružnice.

Eulerův tah

Lze graf namalovat jedním tahem ?

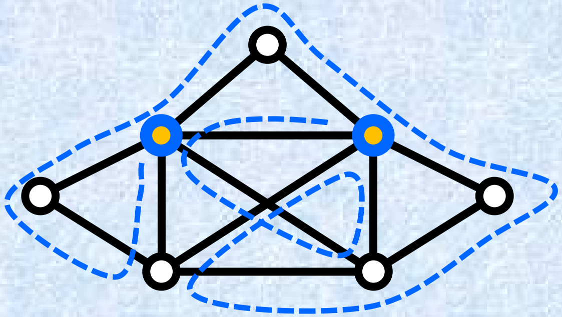
Pokud ano, jak? (Každou hranu malujeme právě jedenkrát.)

Př. Lze projít všechny ulice ve městě a do žádné se nevracet?

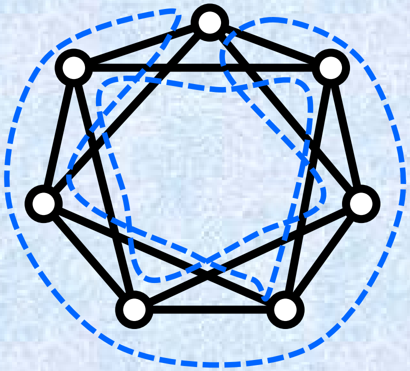
Polynomiální složitost

Graf musí být souvislý a s nejvýše dvěma uzly lichého stupně.

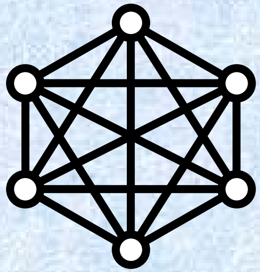
Algoritmus: Hierholzerův O(|E|)



Tah musí začínat a končit v ve zvýrazněných uzlech lichého stupně.



Tah je uzavřený, všechny stupně uzlů jsou sudé.



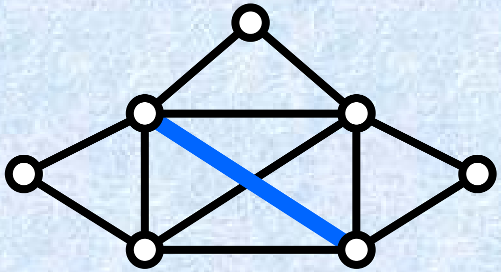
Tah neexistuje, všechny uzly jsou stupně 5.

Planární (rovinný) graf

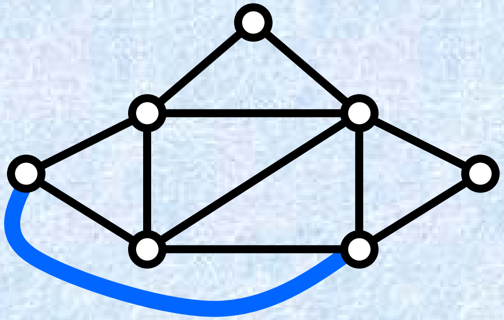
Lze graf namalovat do roviny bez toho, aby se hrany křížily?

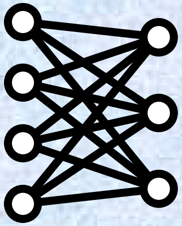
Polynomiální složitost (ale přece jen pokročilejší) 🙂

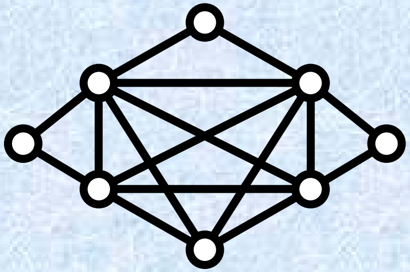
Algoritmus: Hopcroft a Tarjan, O(|V|)
Boyer a Myrvold, O(|V|)



Je planární,
modrou hranu lze vést jinudy:



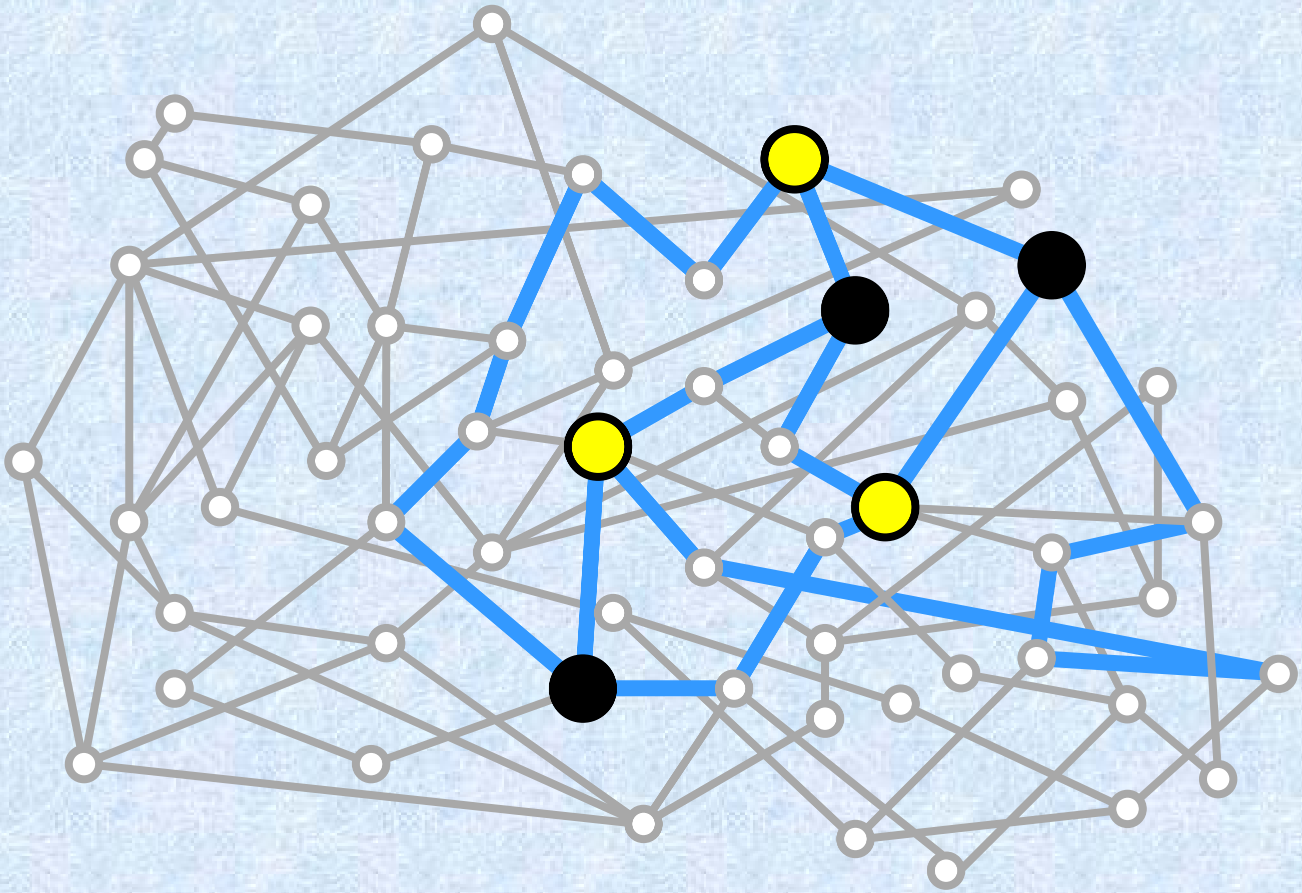




Nejsou planární.
Pokud graf "obsahuje" v sobě
úplný graf s 5 uzly nebo
úplný bipartitní graf s 3 a 3 uzly,
pak není planární.

Planární graf

Lze graf namalovat do roviny bez toho, aby se hrany křížily?



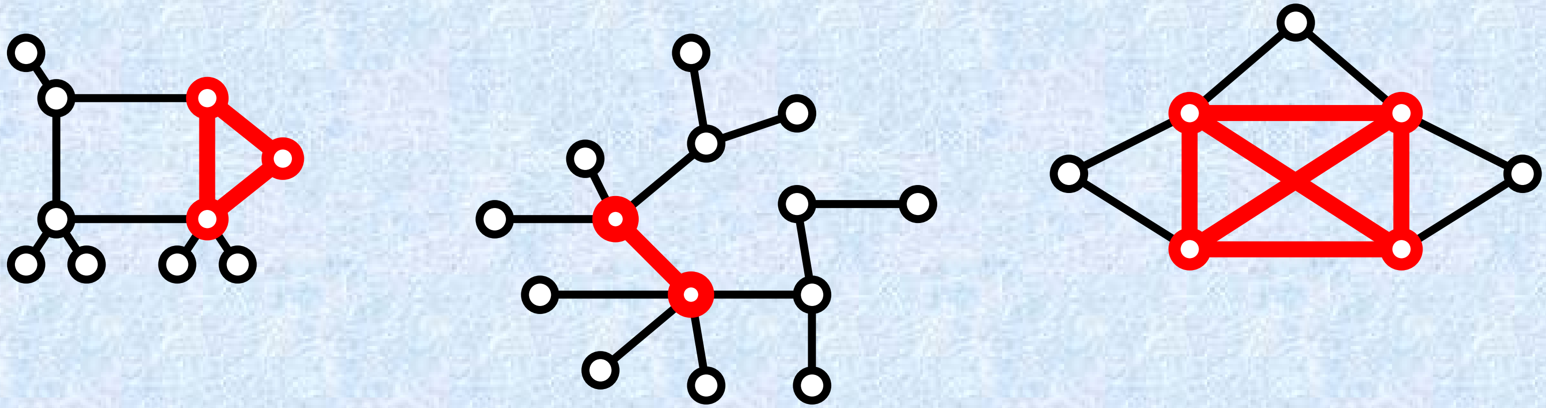
Zde to nejde. Každý černý uzel je spojen třemi separátními cestami s každým žlutým uzlem a naopak. To je případ úplného bipartitního grafu s partitami velikosti 3 a 3, což nelze nakreslit do roviny bez křížení hran.

Klikovost

Jaká je maximální velikost kliky, to jest skupiny uzlů, v níž každý uzel sousedí s každým?

Př. Vyberte na náročnou exkurzi co největší skupinu spolužáků, v níž každý kamarádí s každým.

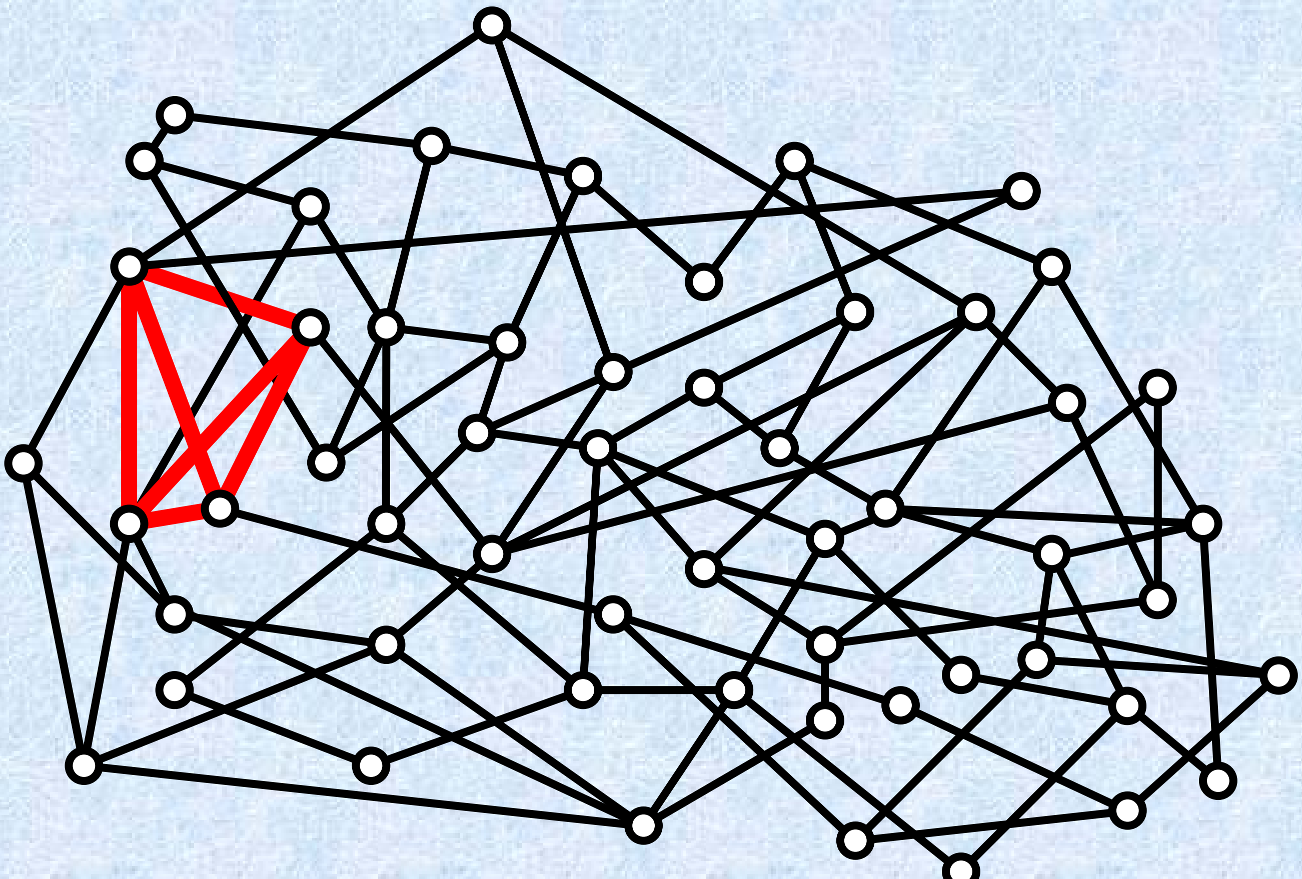
NP-úplný problém



Klikovost každého stromu je 2.

Klikovost

Jaká je maximální velikost kliky, to jest skupiny uzlů,
v níž každý uzel sousedí s každým?

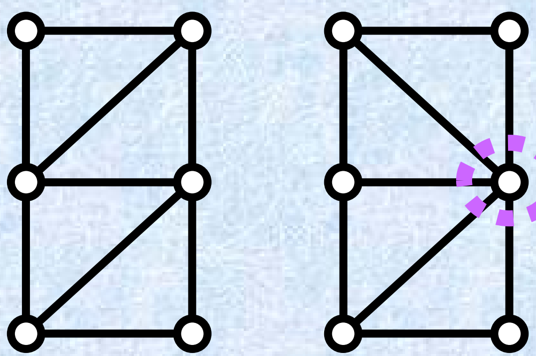


Klika velikosti 5 tu není. Stačí ověřit mechanicky sousednosti ve všech COMB(55, 5) = 3 478 761 pětiprvkových množinách uzlů.

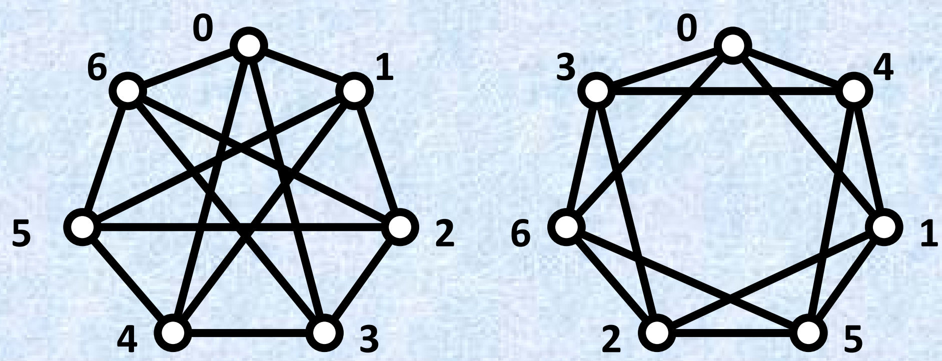
Grafový izomorfizmus

Lze jeden z grafů nakreslit tak, aby vypadal přesně jako ten druhý?
To jest, mají identickou strukturu?

Není ani známo, zda je to NP-těžký problém. Možná je polynomiální?



A B



C D

**A a B nejsou izomorfní,
pravý prostřední uzel stupně 5 v B
nemá protějšek v A, struktura A a B
nemůže být stejná.**

**C a D izomorfní jsou,
stejně očíslované uzly si odpovídají,
hrany v obou grafech vedou
mezi stejně očíslovanými uzly.**

Částečný přehled nepřehledné struktury běžných grafových otázek

Snadná otázka	"Jak kdy "	NP-úplný
Souvislost?	**Barevnost?** 1,2 barvy **snadné** 3 a více barev **těžké**	Nezávislost?
Nejkratší cesta?		Dominance?
Minimální kostra?	**Izomorfizmus?** Stromy, cirkulanty **snadné** pravidelné grafy **těžké** atd..	Hamiltonicita?
Eulerův tah?		Klikovost?
Rovinnost?	**Nejdelší cesta?** DAG, strom **snadné** obecný graf **těžké**	Obchodní cestující?

Další otázky? Někdy lze rozhodnout snadno, do které kategorie úloha patří, někdy to neví nikdo...

	NEJKRATŠÍ CESTY			
Ohodnocení hran	**Strom**	**DAG**	**Řídký graf s cykly**	**Hustý graf s cykly**
Nezáporné ohodnocení nebo žádné = všechny hrany délka 1	**orientovaný i neorientovaný** BFS, $\Theta(N+E) = \Theta(N)$ *triviální úloha*	**jen orientovaný** topologické řazení a DP, $\Theta(N+E)$	**orientovaný i neorientovaný** Dijkstra s prioritní frontou, $\Theta((N+E) \log N)$	**orientovaný i neorientovaný** Dijkstra bez prioritní fronty, $\Theta(N^2)$
Některé hrany záporné, ale bez záporných cyklů (tzv. konzervativní ohodnocení)			**orientovaný:** Bellman-Ford, $\Theta(N*E)$ **neorientovaný:** Převod na úlohu "Minimum Weight T-Join", $O(N^3)$, nad rámec základního kursu, viz [KorteVygen, p.278].	
Ohodnocení se zápornými cykly	~~*nedefinováno*~~	~~*nedefinováno*~~	**orientovaný i neorientovaný** NP-těžké, když předpokládáme nejkratší cestu bez cyklů, jinak řešení nedefinováno	

Bernhard Korte, Jens Vygen: *Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms*, 3rd edition, Springer-Verlag, 2006.

	NEJDELŠÍ CESTY		
Ohodnocení hran	**Strom**	**DAG**	**Graf s cykly**
Jakékoli ohodnocení nebo i žádné ohodnocení	**orientovaný i neorientovaný** BFS, $\Theta(N+E) = \Theta(N)$ *triviální úloha*	**jen orientovaný** topologické řazení a DP, $\Theta(N+E)$	**orientovaný i neorientovaný** NP-těžké