Algoritmizace

Marko Genyk-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 – 2023

Dnešní témata

- Průchod stromem do šířky
- Průchod grafem do hloubky a do šířky

slido

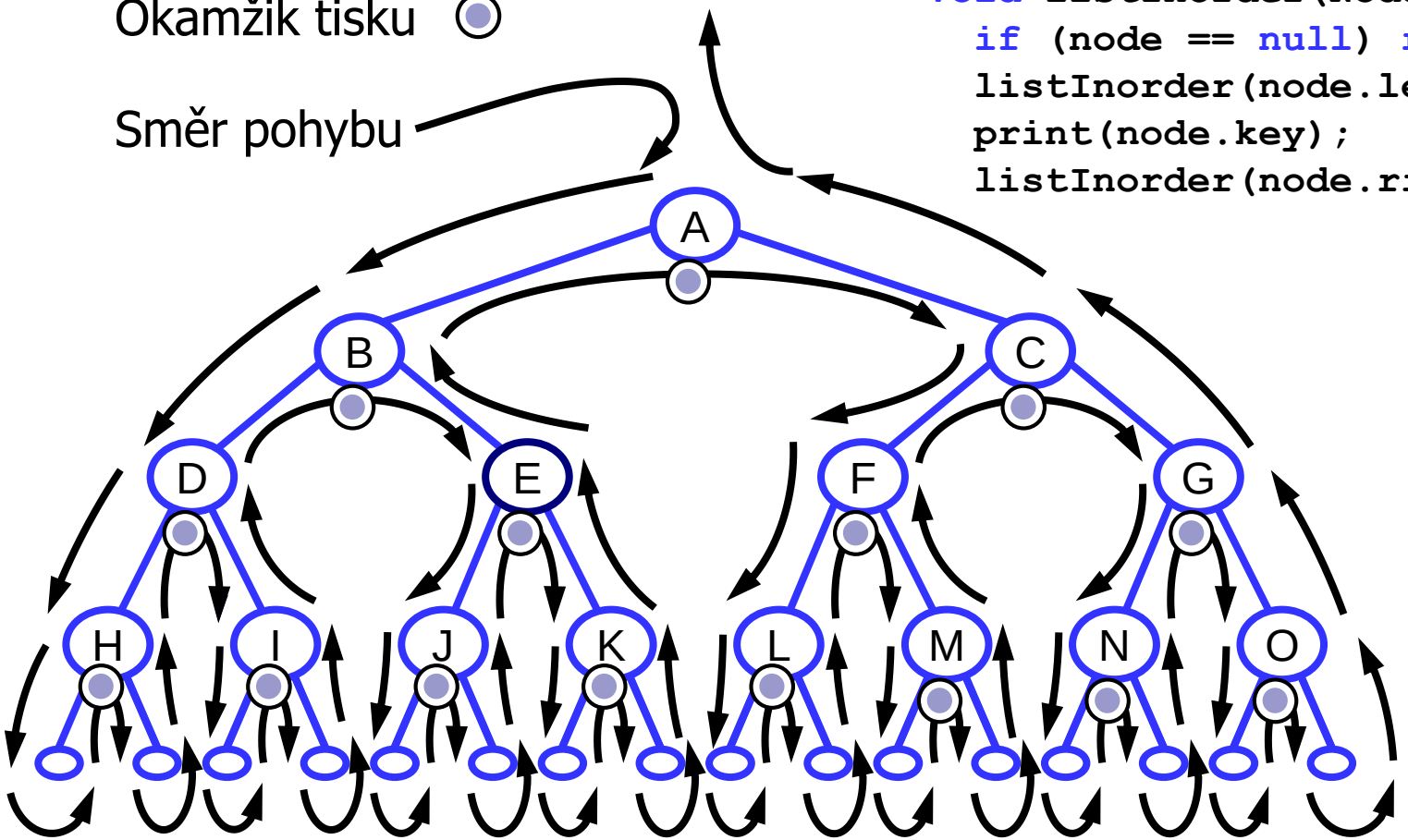
Úvodní zvolání

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Z minula: průchod stromem do hloubky

Okamžik tisku

Směr pohybu

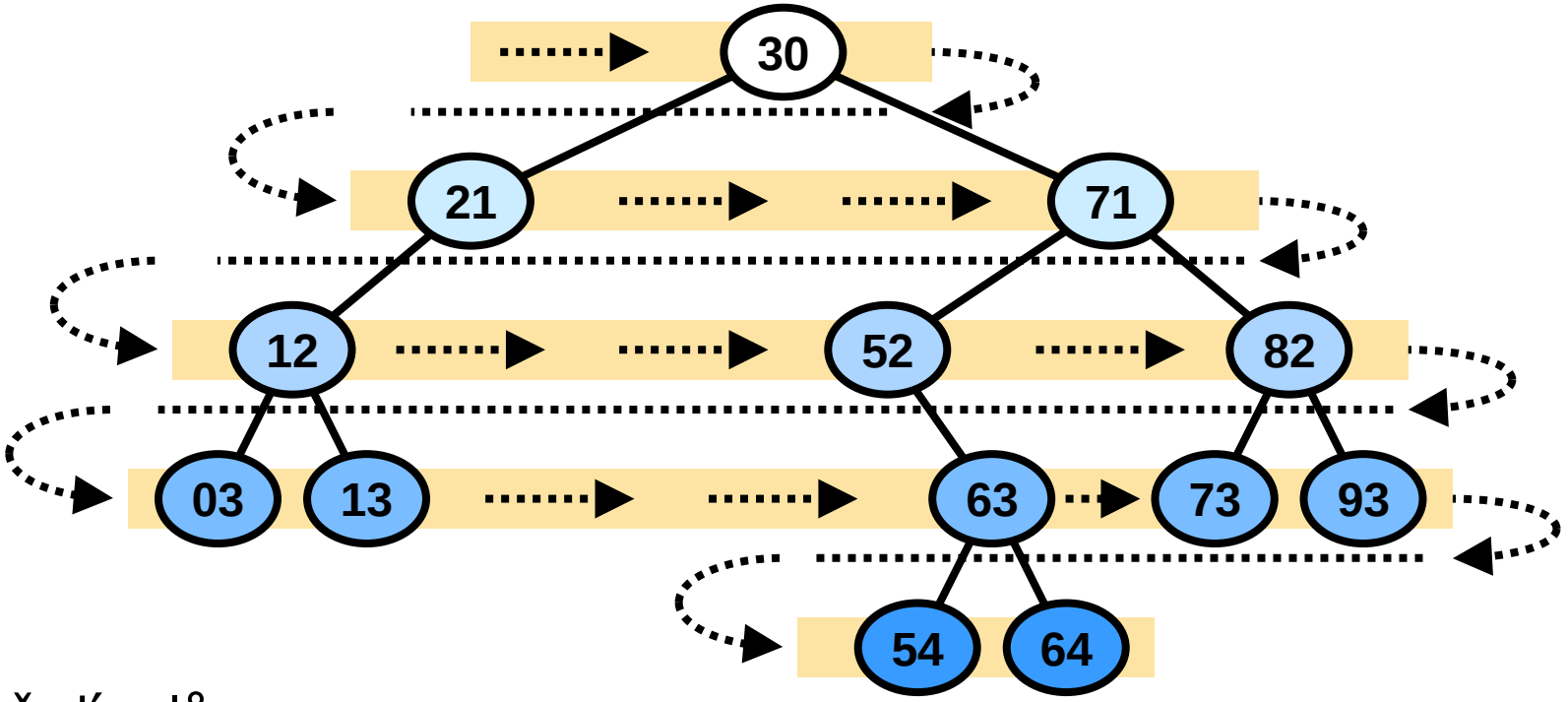



```
void listInorder(Node node):
  if (node == null) return;
  listInorder(node.left);
  print(node.key);
  listInorder(node.right);
```

Výstup

H D I B J E K A L F M C N G O

Průchod stromem do šířky

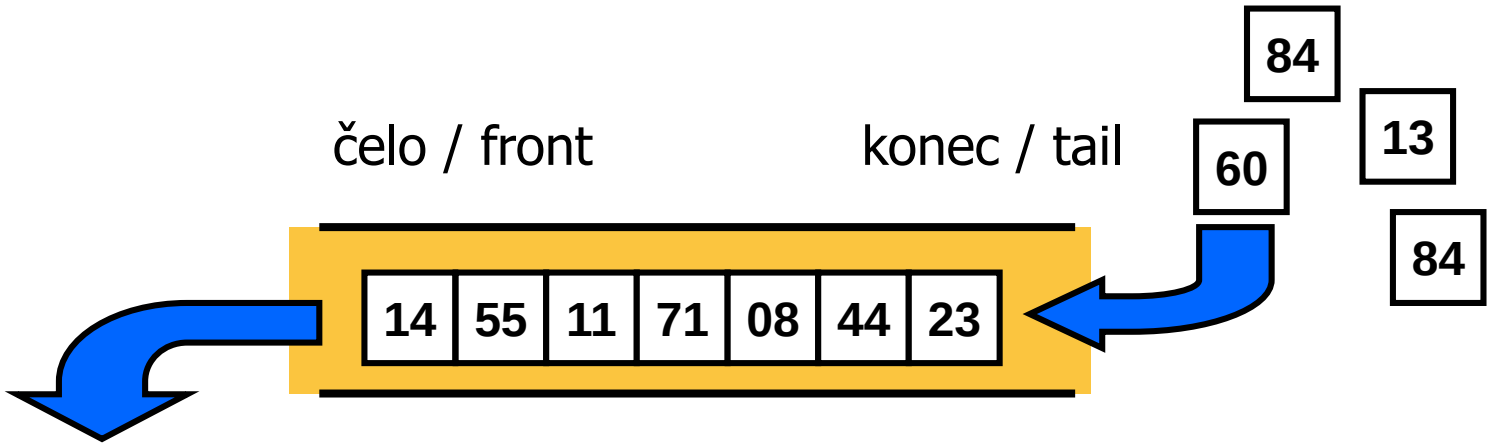


Pořadí uzlů

30	21	71	12	52	82	03	13	63	73	93	54	64

Struktura stromu ani rekurzivní přístup tento průchod nepodporují.

Fronta



odebíráme z čela fronty

vkládáme na konec fronty

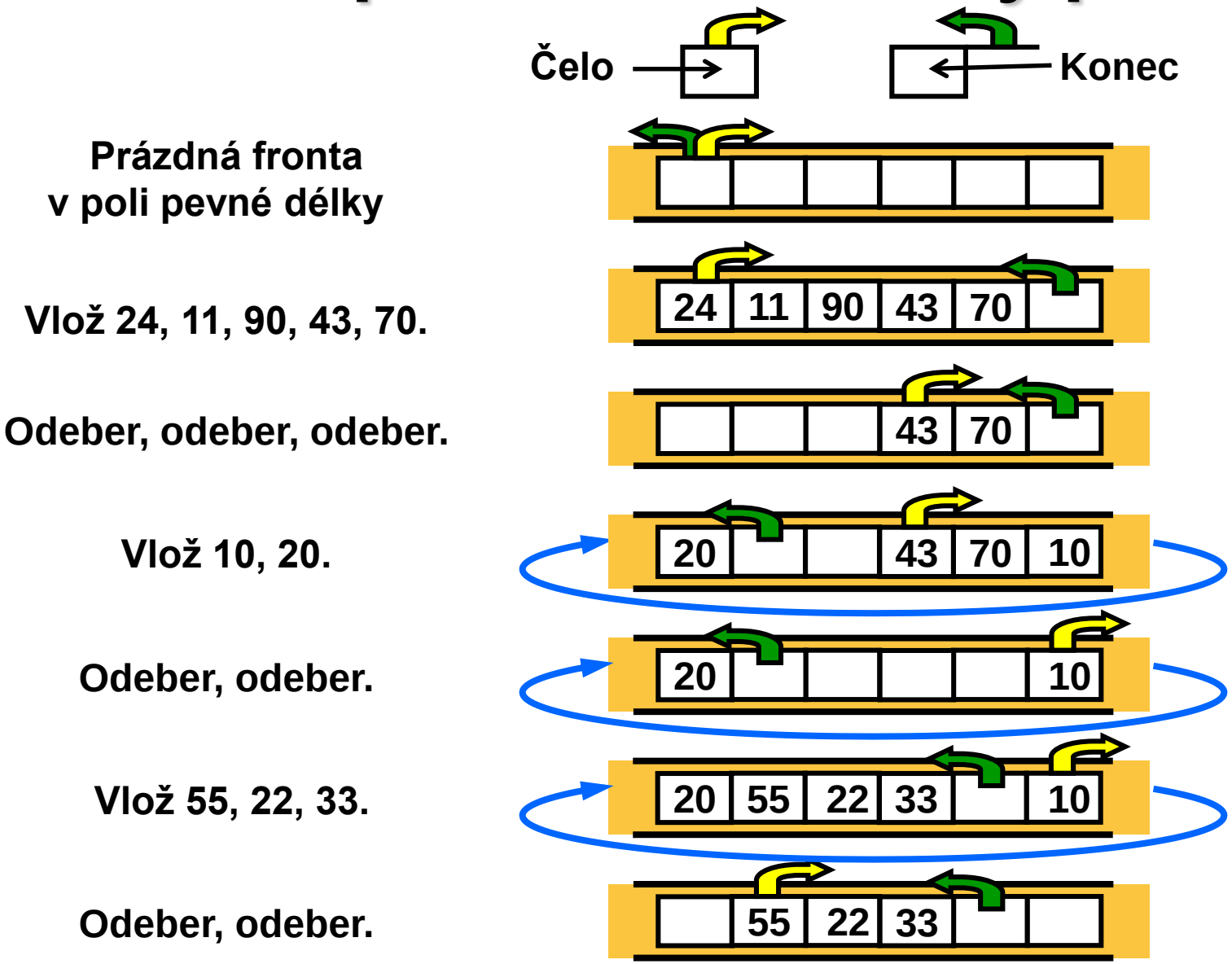
`java.util.LinkedList`

`addLast(element)`
`removeFirst()`
`getFirst()`
`isEmpty()`

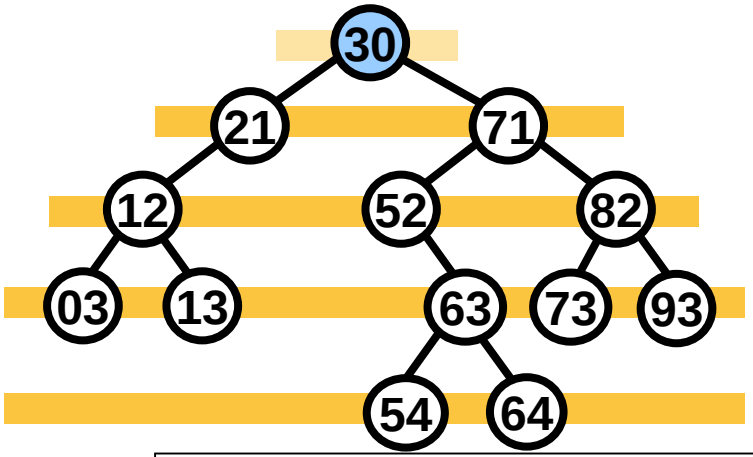
`queue` (C++ Standard Template Library)

`queue::push(element)`
`queue::pop()`
`queue::front()`
`queue::empty()`

Cyklická implementace fronty polem



Průchod stromem do šířky



Výstup

Inicializace:

Vytvoř prázdnou frontu

Do fronty vlož kořen stromu

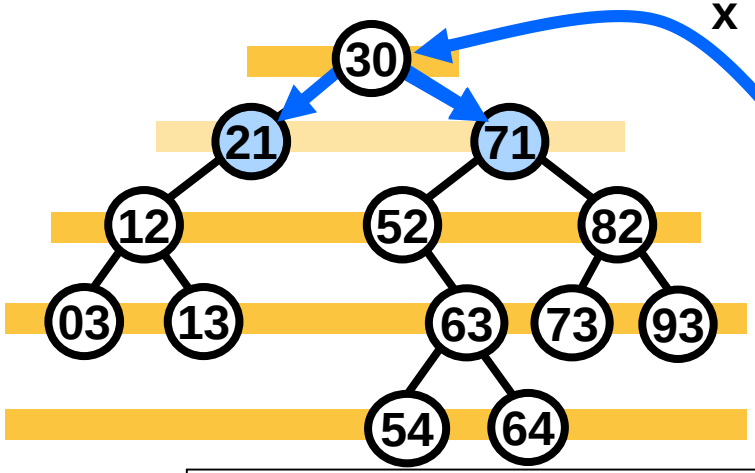
Čelo Konec

Hlavní cyklus

Dokud není fronta prázdná, opakuj:

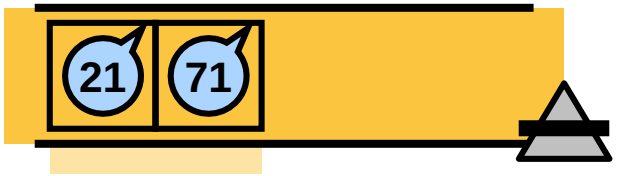
1. Odeber první uzel z fronty a zpracuj ho.
2. Do fronty vlož jeho potomky, pokud existují.

Průchod stromem do šířky



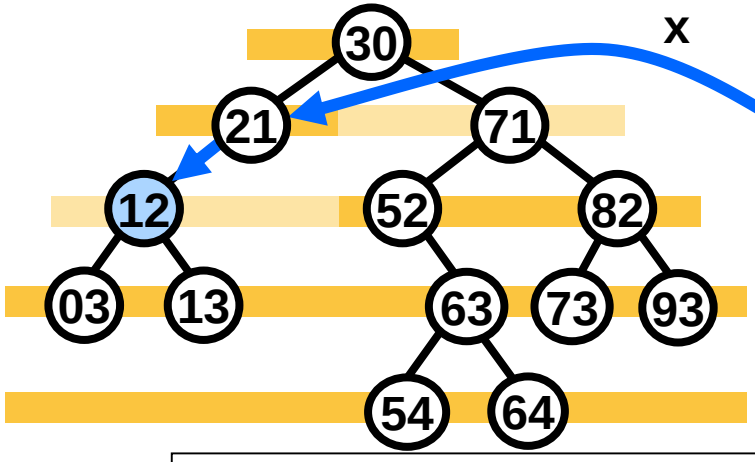
1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)



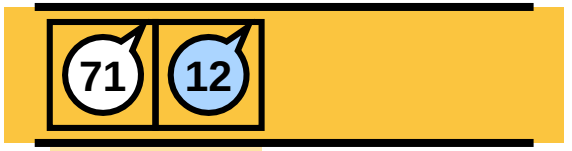
Výstup 30

*) pokud existuje



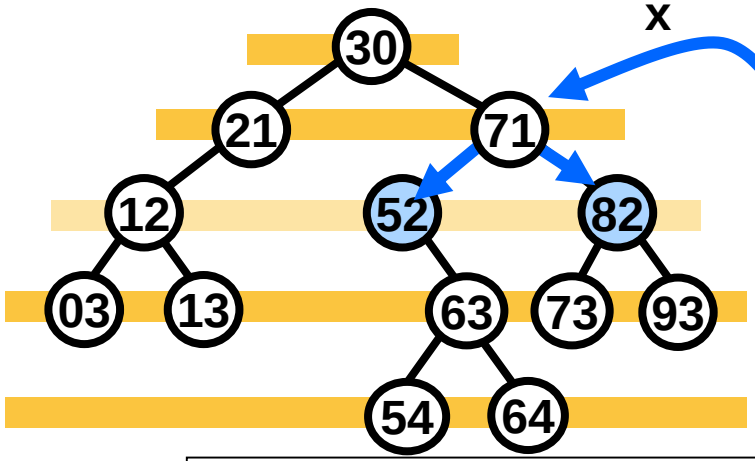
1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)



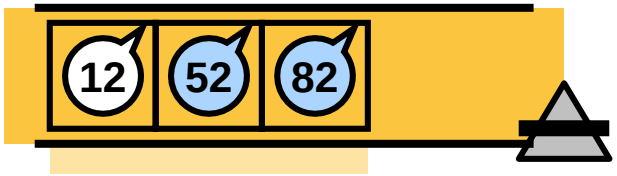
Výstup 30 21

Průchod stromem do šířky

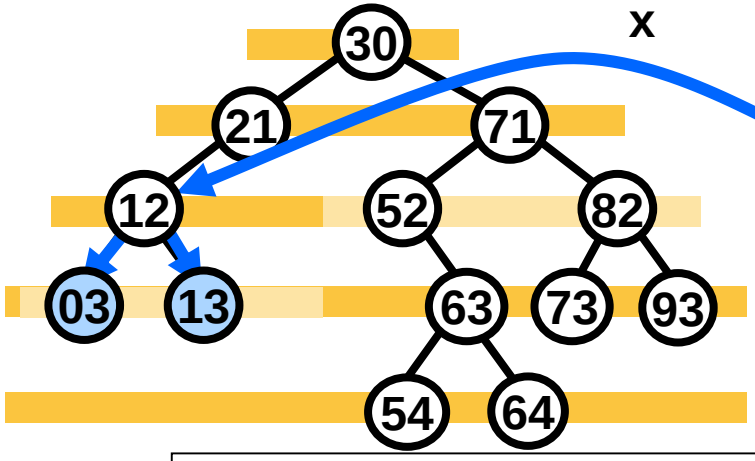


1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

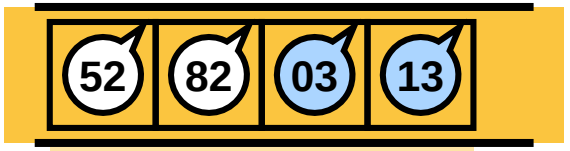


Výstup 30 21 71



1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

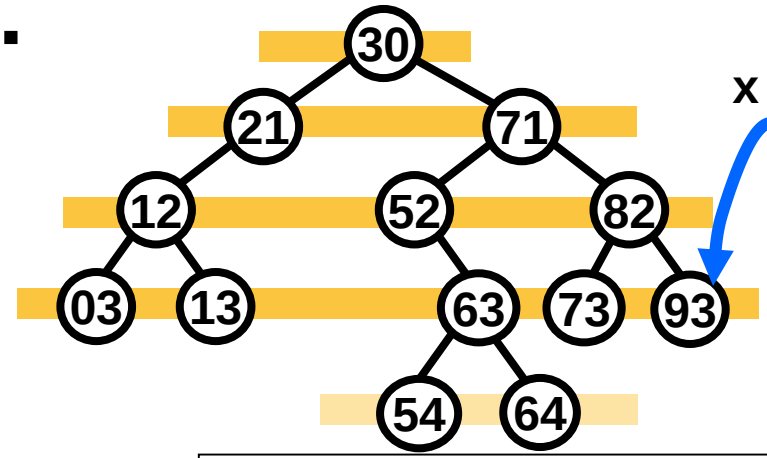


Výstup 30 21 71 12

*) pokud existuje

Průchod stromem do šířky

...



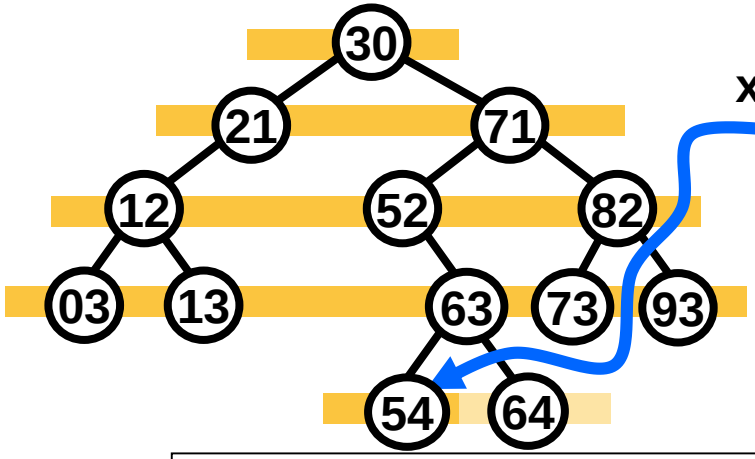
x

1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

Výstup 30 21 71 12 52 82 03 13 63 73 93

*) pokud existuje



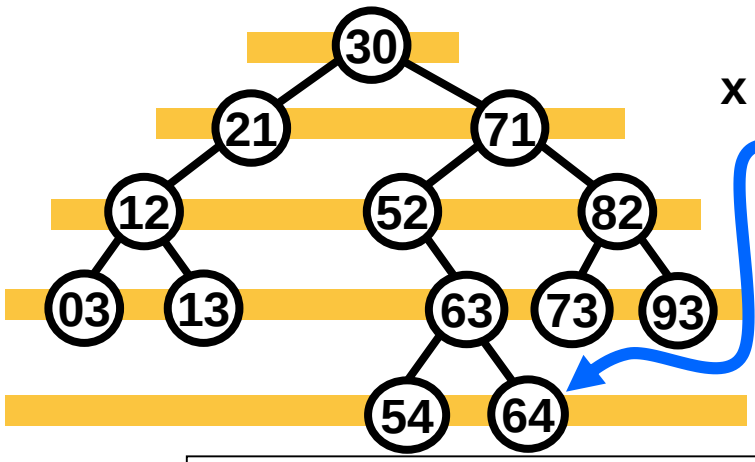
x

1. x = Odeber(), tisk(x.key).

2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

Výstup 30 21 71 12 52 82 03 13 63 73 93 54

Průchod stromem do šířky



x

1. x = Odeber(), tisk(x.key).

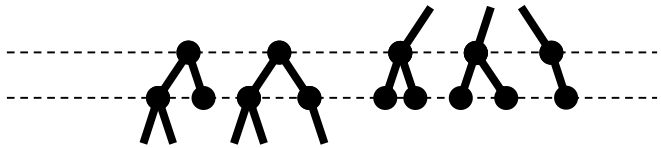
2. Vlož(x.left), vlož(x.right). *)

*) pokud existuje

Výstup 30 21 71 12 52 82 03 13 63 73 93 54 64

Fronta je prázdná, průchod stromem končí.

V neprázdné frontě jsou vždy právě
-- některé (třeba všechny) uzly jednoho patra
-- a všichni potomci těch uzlů tohoto patra, které už nejsou ve frontě.



Někdy jsou ve frontě přesně všechny uzly jednoho patra. Viz výše.

Průchod stromem do šířky

```
void listBreadth (Node node) {
    if (node == null) return;
    Queue q = new Queue();          // create queue
    q.push(node);                   // init queue
    while (!q.empty()) {
        node = q.pop();
        print(node.key);            // process node
        if (node.left  != null) q.push(node.left);
        if (node.right != null) q.push(node.right);
    }
}
```

Jakou má průchod stromem do šířky časovou složitost?

slido

Jakou má průchod do šířky stromem s 'n' uzly časovou složitost?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

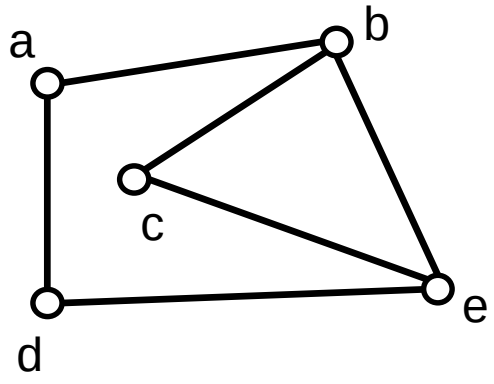
Průchod grafem

Průchody stromem zobecníme pro orientované i neorientované grafy.

$G_1 = (V, E_1)$

$V = \{a, b, c, d, \mathrm{e}\}$

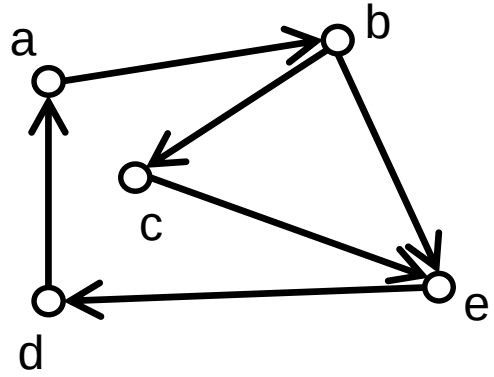
$E_1 = \begin{Bmatrix} \{a,b\}, \{b,c\}, \{b,e\}, \\ \{e,c\}, \{d,e\}, \{a,d\} \end{Bmatrix}$



$G_2 = (V, E_2)$

$V = \{a, b, c, d, \mathrm{e}\}$

$E_2 = \begin{Bmatrix} (a,b), (b,c), (b,e), \\ (c,e), (e,d), (d,a) \end{Bmatrix}$



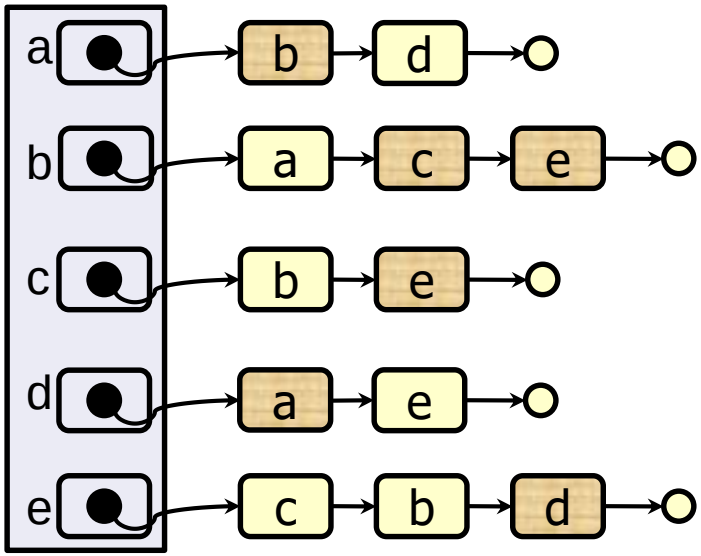
Použití: hledání komponent souvislosti, cyklů, hranově nejkratší cesty, …

Reprezentace grafu v paměti

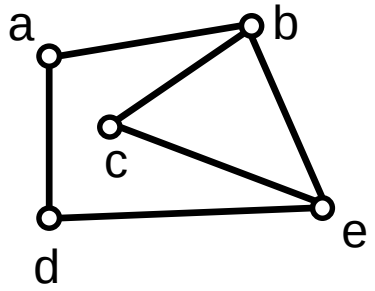
Matice sousednosti:

	a	b	c	d	e
a	0	**1**	0	**1**	0
b	**1**	0	**1**	0	**1**
c	0	**1**	0	0	**1**
d	**1**	0	0	0	**1**
e	0	**1**	**1**	**1**	0

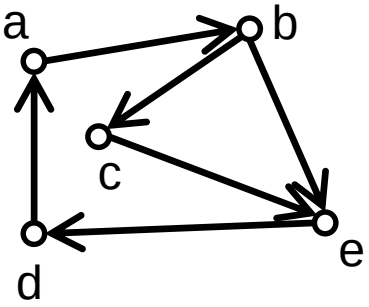
Seznam sousedů:



$G_1 = (V, E_1)$



$G_2 = (V, E_2)$



Reprezentace grafu G_2 obsahuje pouze prvky s pozadím 

Prostorová složitost

$\Theta(|V|^2)$

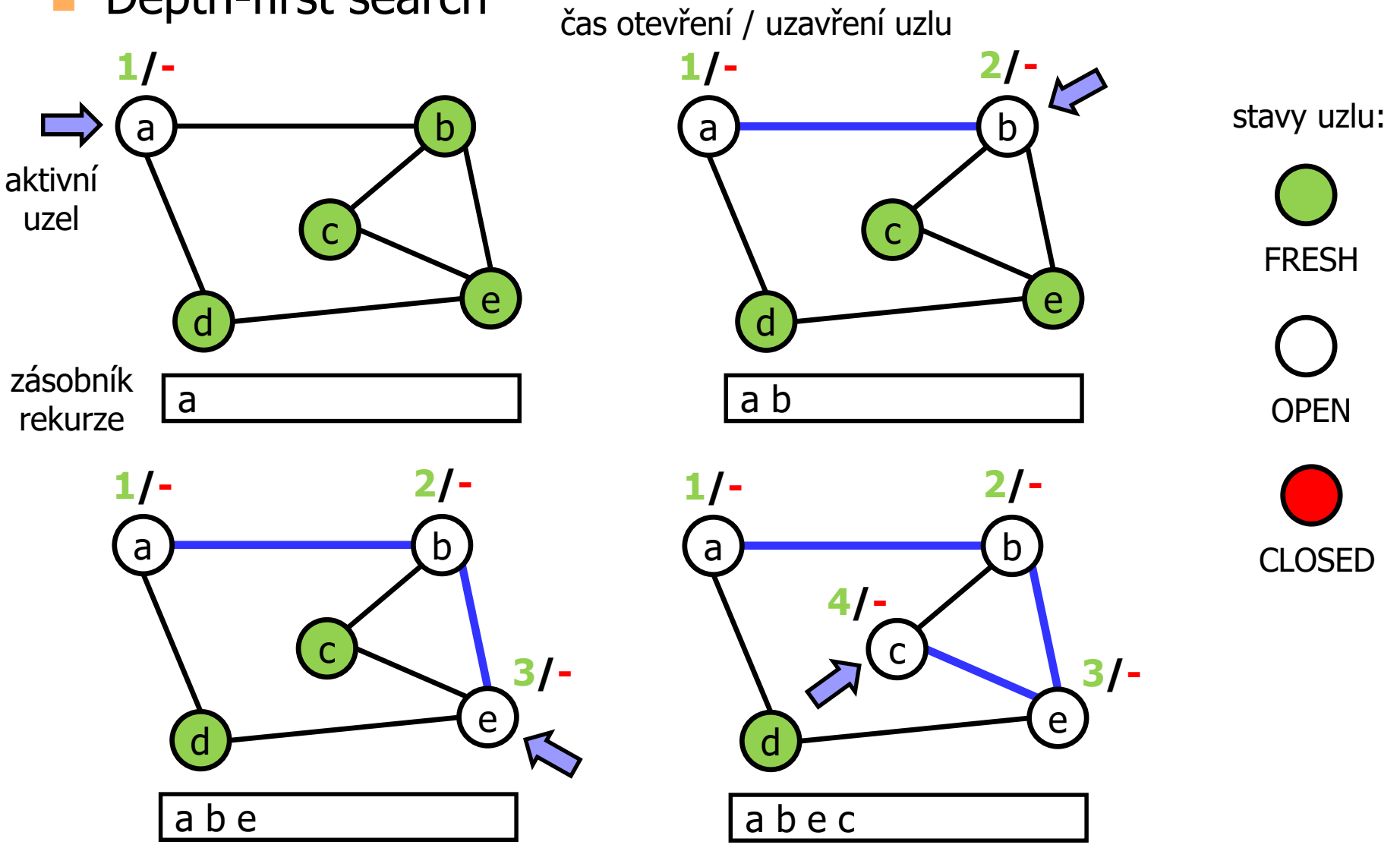
test existence hrany v konstantním čase

$\Theta(|V| + |E|)$

výhodnější pro řídké grafy

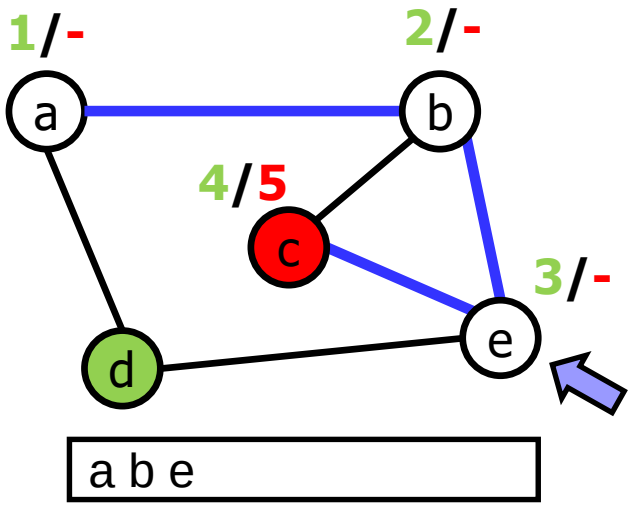
Průchod grafem do hloubky (DFS)

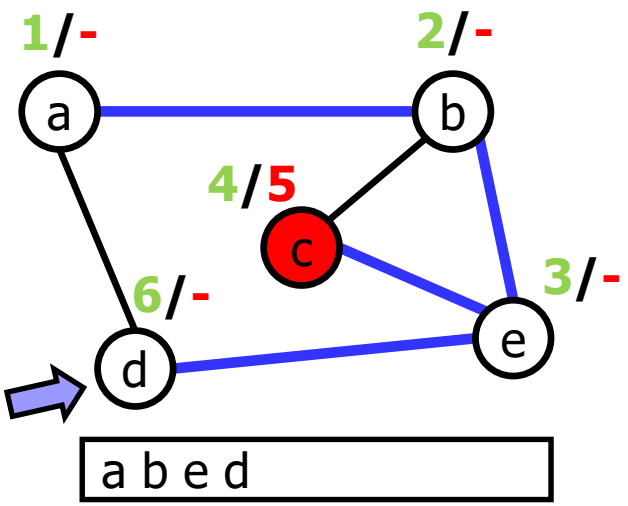
- Depth-first search

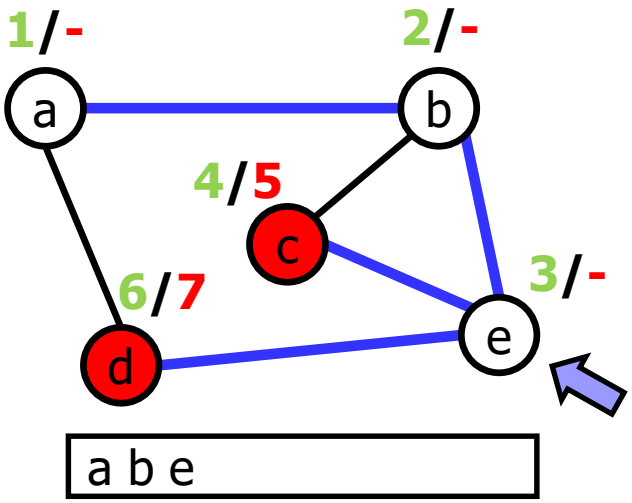


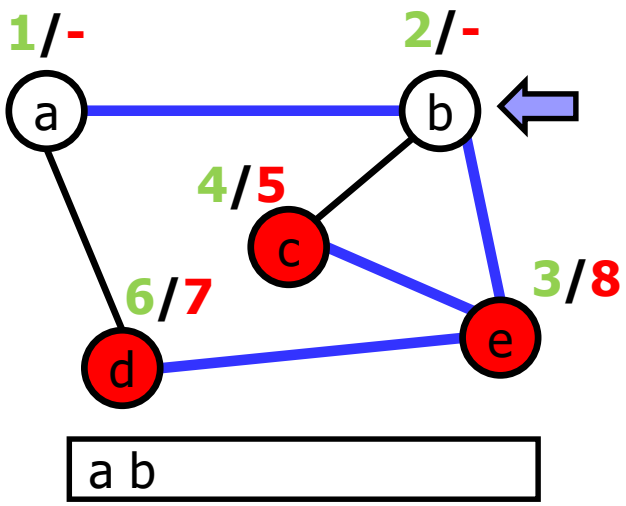
Průchod grafem do hloubky (DFS)

- Depth-first search









stavy uzlu:

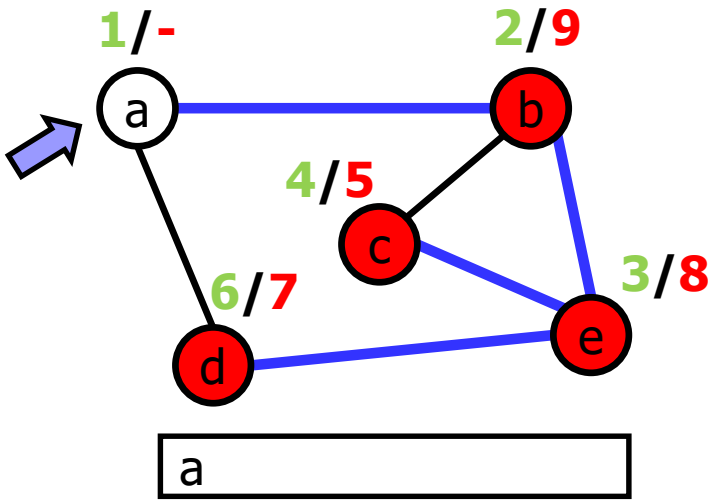
FRESH

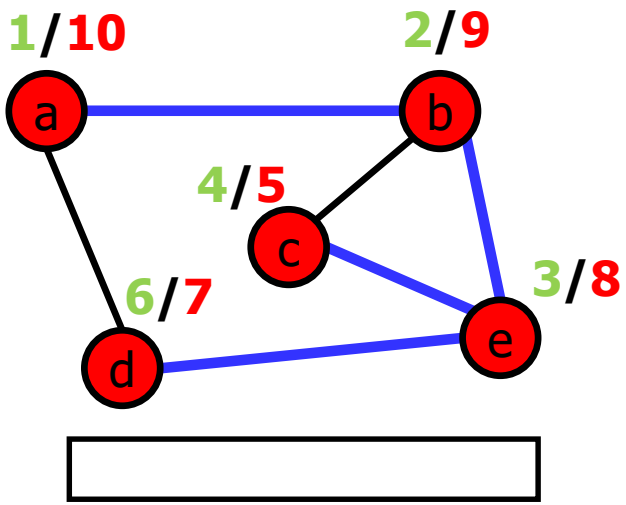
OPEN

CLOSED

Průchod grafem do hloubky (DFS)

- Depth-first search





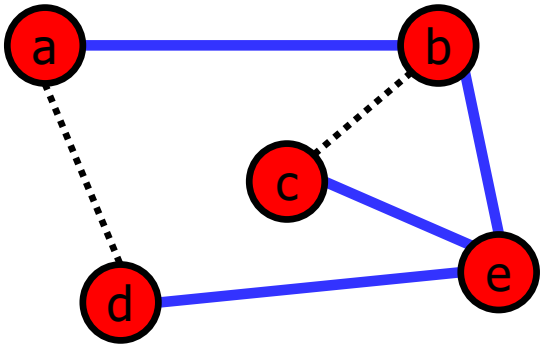
stavy uzlu:

FRESH

OPEN

CLOSED

DFS-strom:



DFS rekurzivně

```
DFS(Node node): // průchod jednou komponentou
    node.visited = true;
    foreach n in node.neighbors do
        if !n.visited then
            DFS(n);
        end;
    end;
```

```
DFS(Node[] nodes): // průchod celým grafem
    foreach node in nodes do
        if !node.visited then
            DFS(node);
        end;
    end;
```

DFS se zásobníkem

```
DFS_iterative(Node node):
    S = new Stack();
    S.push(node);
    while !S.isEmpty() do
        node = S.pop();
        if !node.visited then
            node.visited = true;
            foreach n in node.neighbors do
                S.push(n);
```

- jiné pořadí uzlů než při rekurzi
- uzel může být na zásobník vložen opakovaně

simuluje rekurzi

```
DFS_iterative2(Node node):
    S = new Stack();
    S.push(new Iterator(node.neighbors));
    while !S.isEmpty() do
        if S.peek().hasNext() then
            n = S.peek().next();
            if !n.visited then
                n.visited = true;
                S.push(new Iterator(node.n));
        else
            node = S.pop();
```

Časová složitost DFS

Která z následujících možností nejlépe popisuje časovou složitost DFS pro graf $G = (V, E)$?

A. $O(|E|)$

B. $O(|V| + |E|)$

C. $O(|V|^2)$

D. $O(|V| \cdot |E|)$

slido

Jakou má DFS časovou složitost pro graf G=(V,E)?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Časová složitost DFS

```
DFS(Node node):
    node.visited = true;
    foreach n in node.neighbors do
        if !n.visited then
            DFS(n);
        end;
    end;
```

```
DFS(Node[] nodes):
    foreach node in nodes do
        if !node.visited then
            DFS(node);
        end;
    end;
```

$G = (V, E)$ reprezentovaný jako seznam sousedů

$$T(|V|, |E|) = O\left(|V| + \sum_{v \in V} \mathrm{d}_v\right) = O(|V| + 2|E|) = O(|V| + |E|)$$

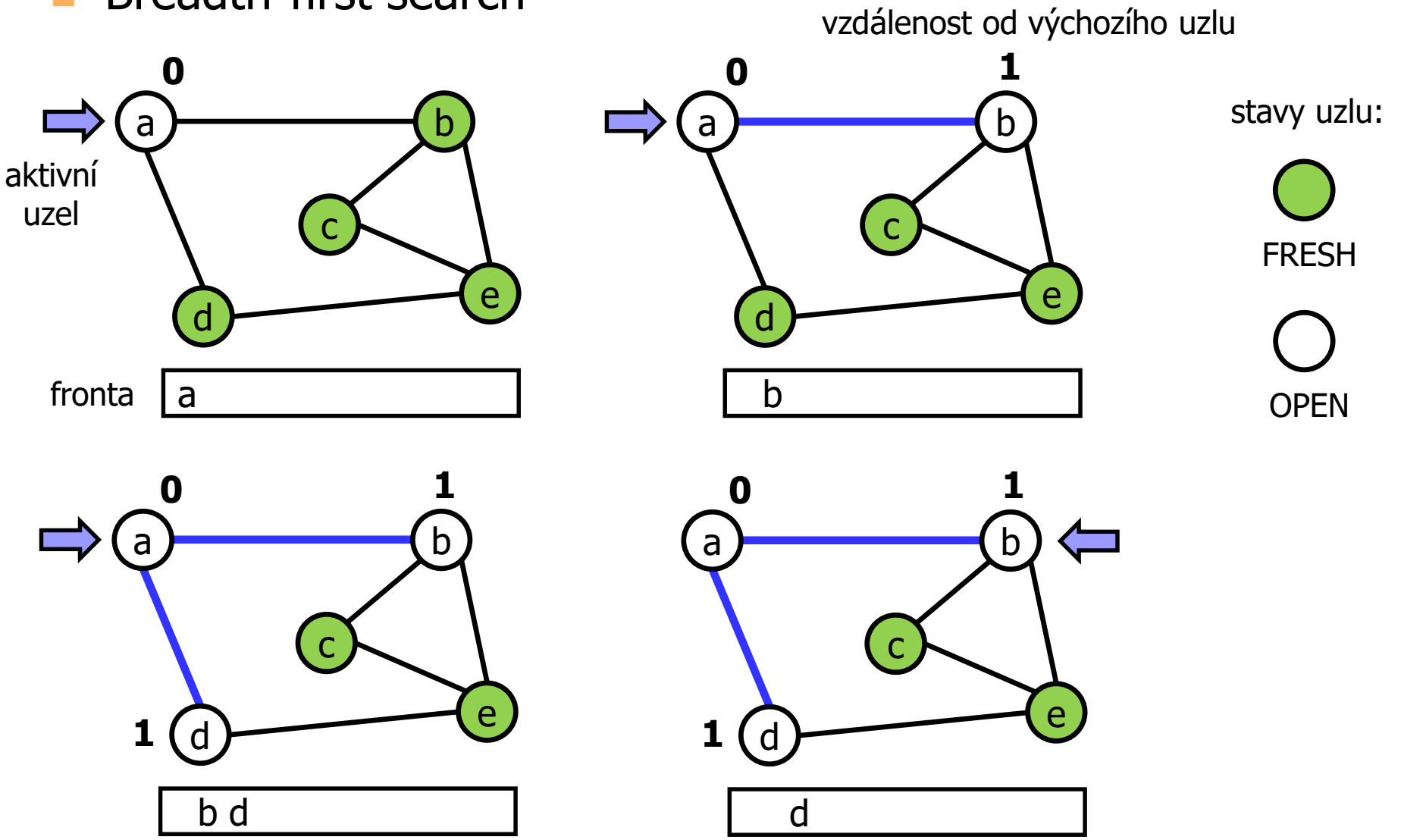
slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

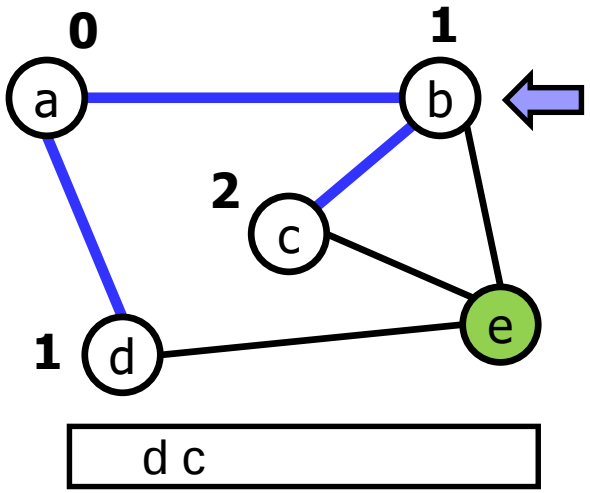
Průchod grafem do šířky (BFS)

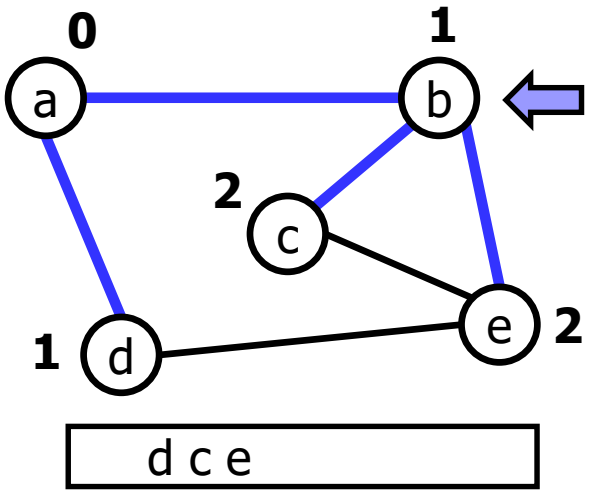
- Breadth-first search



Průchod grafem do šířky (BFS)

- Breadth-first search

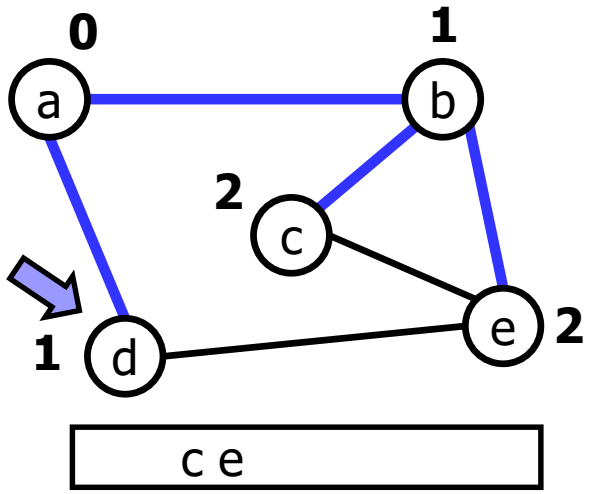


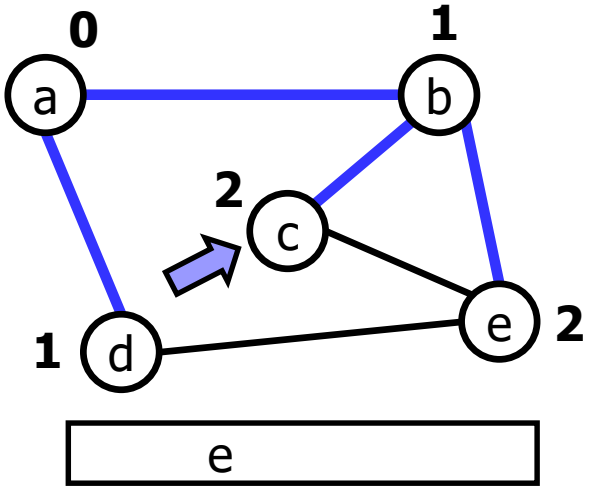


stavy uzlu:

FRESH

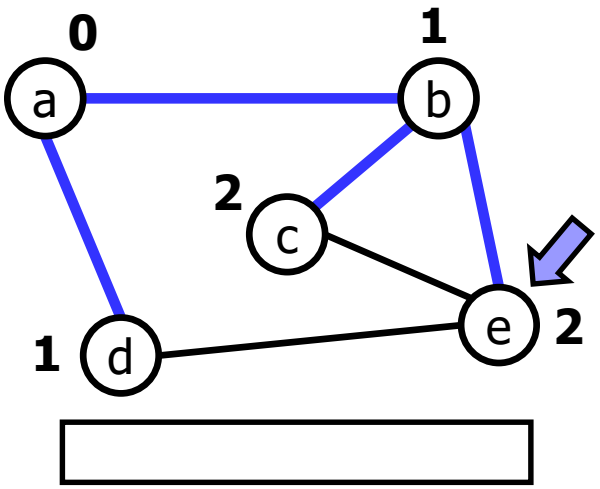
OPEN





Průchod grafem do šířky (BFS)

- Breadth-first search

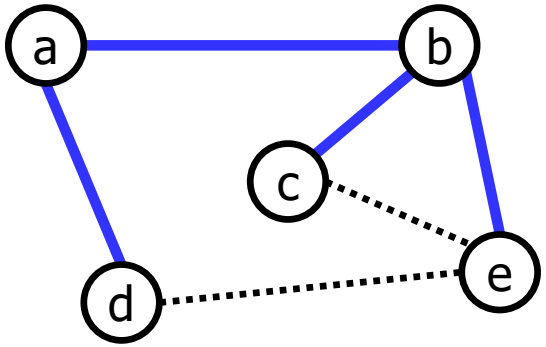


stavy uzlu:

FRESH

OPEN

BFS-strom:



BFS s frontou

```
BFS(Node node): // průchod jednou komponentou
    Q = new Queue();
    node.discovered = true;
    Q.push(node);
    while !Q.isEmpty() do
        node = Q.pop();
        foreach n in node.neighbors do
            if !n.discovered then
                n.discovered = true;
                Q.push(n);
            end;
        end;
    end;
```

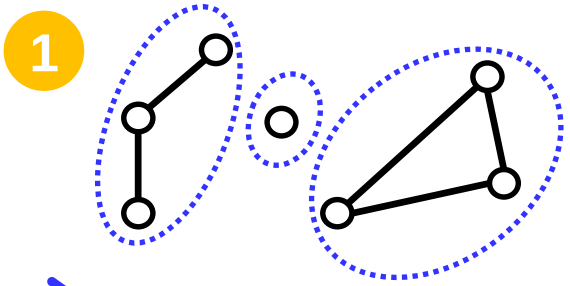
```
BFS(Node[] nodes): // průchod celým grafem
    foreach node in nodes do
        if !node.discovered then
            BFS(node);
        end;
    end;
```

časová složitost je

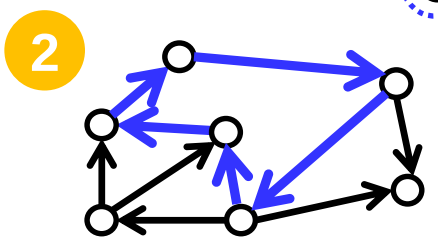
$O(|V| + |E|)$

Aplikace průchodu grafem

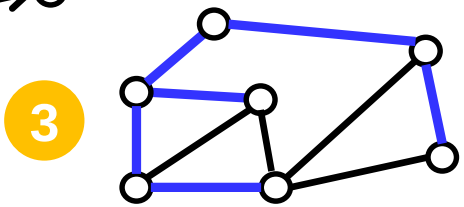
1. Detekce komponent souvislosti



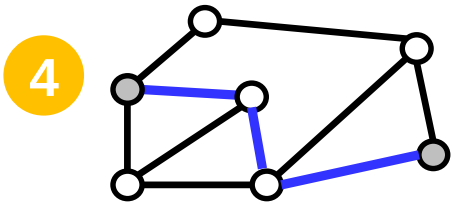
2. Detekce cyklu (jen DFS)
   (pokud při DFS objevíme uzel ve stavu OPEN => cyklus)



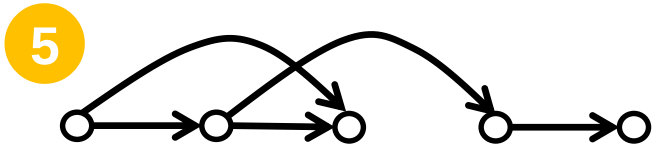
3. Nalezení kostry



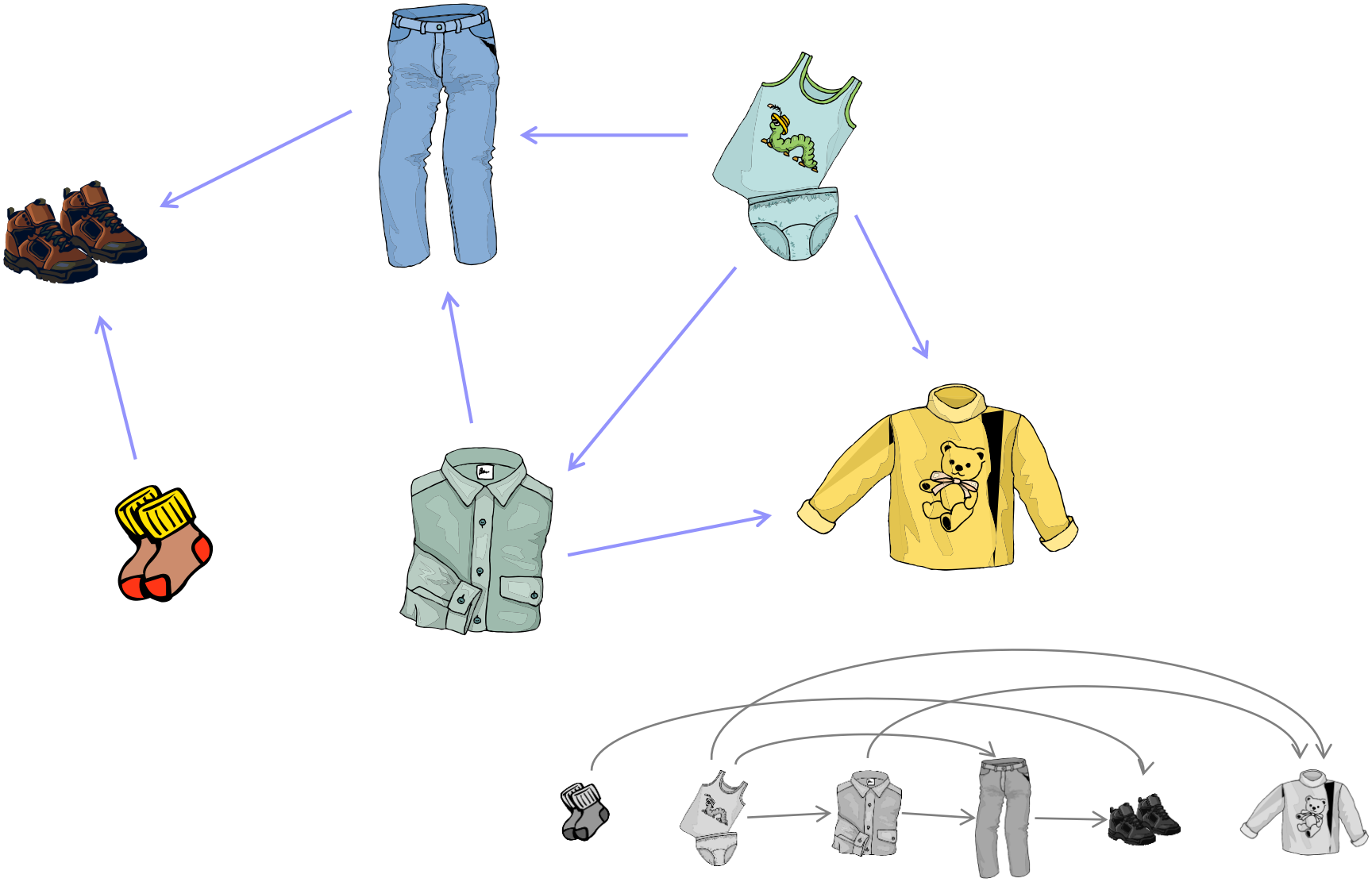
4. Hranově nejkratší cesta (jen BFS)



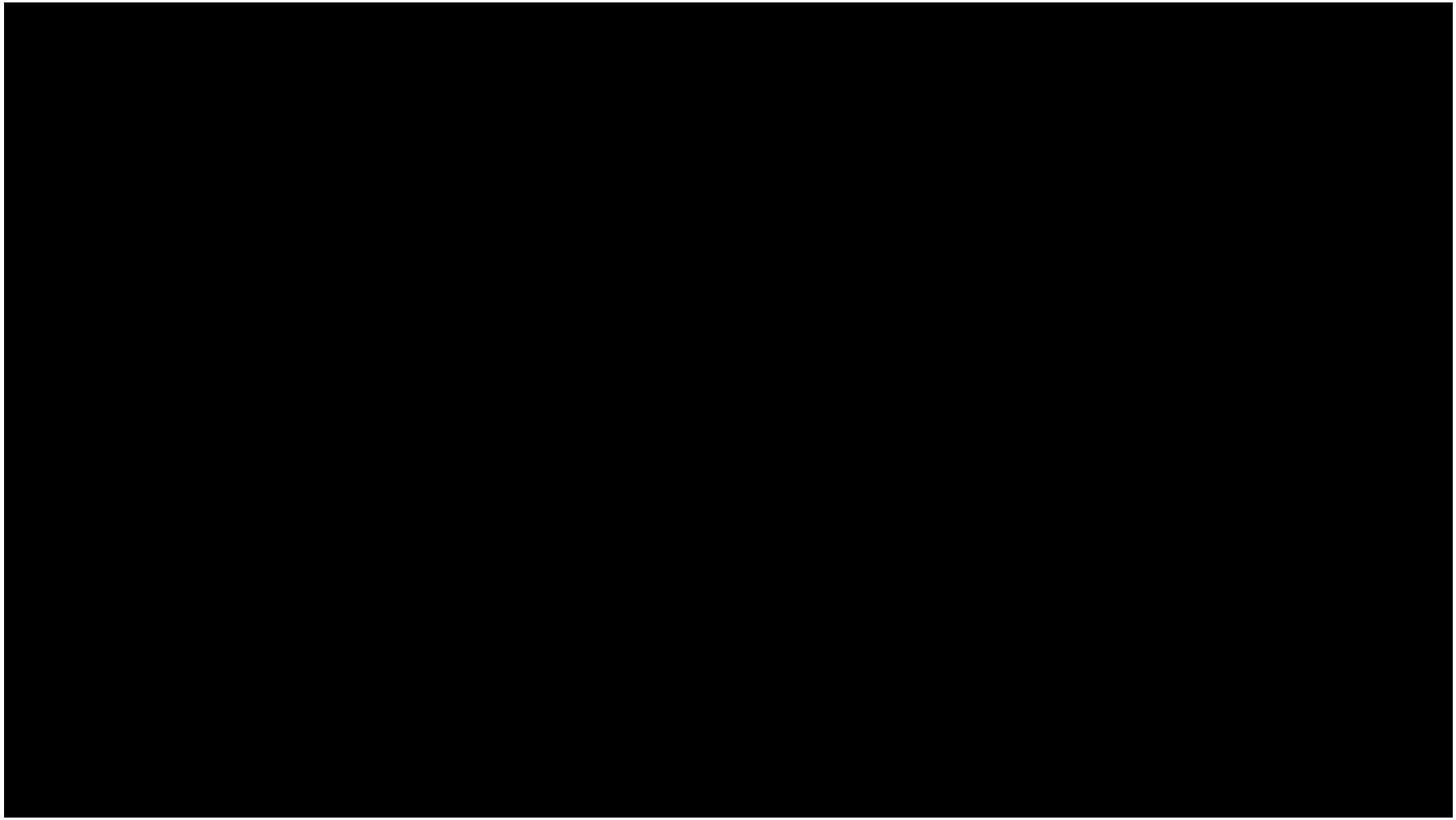
5. Topologické uspořádání (jen DFS)
   (uzly uspořádáme sestupně podle časů jejich uzavření)



Topologické uspořádání



DFS

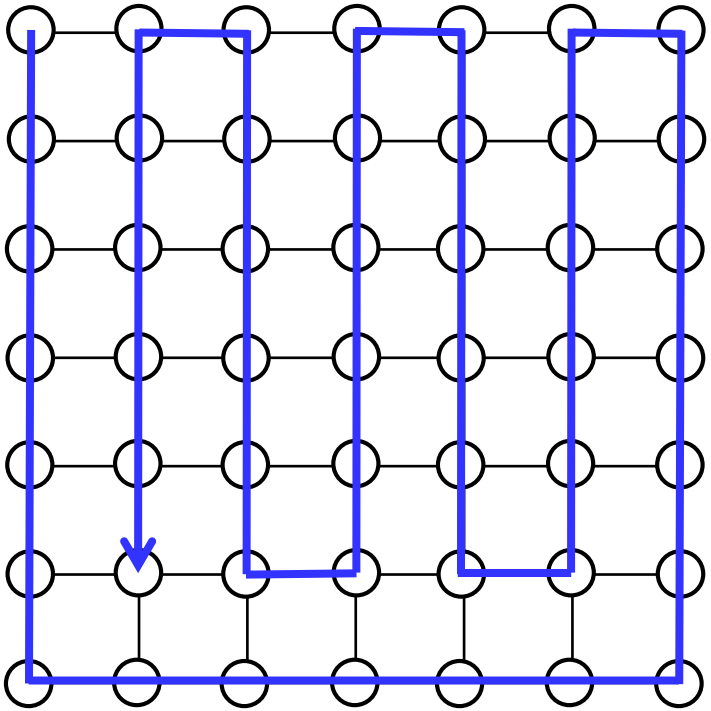


https://youtu.be/NUgMa5coCoE

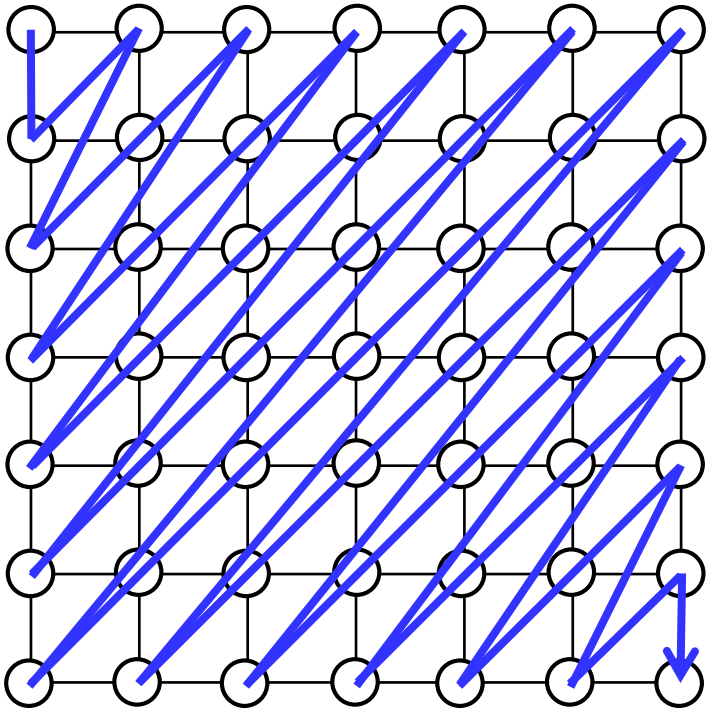
Porovnání DFS a BFS

Mřížka $N \times N$, uspořádání sousedů: ↓ → ↑ ←

DFS (rekurzivně)



BFS

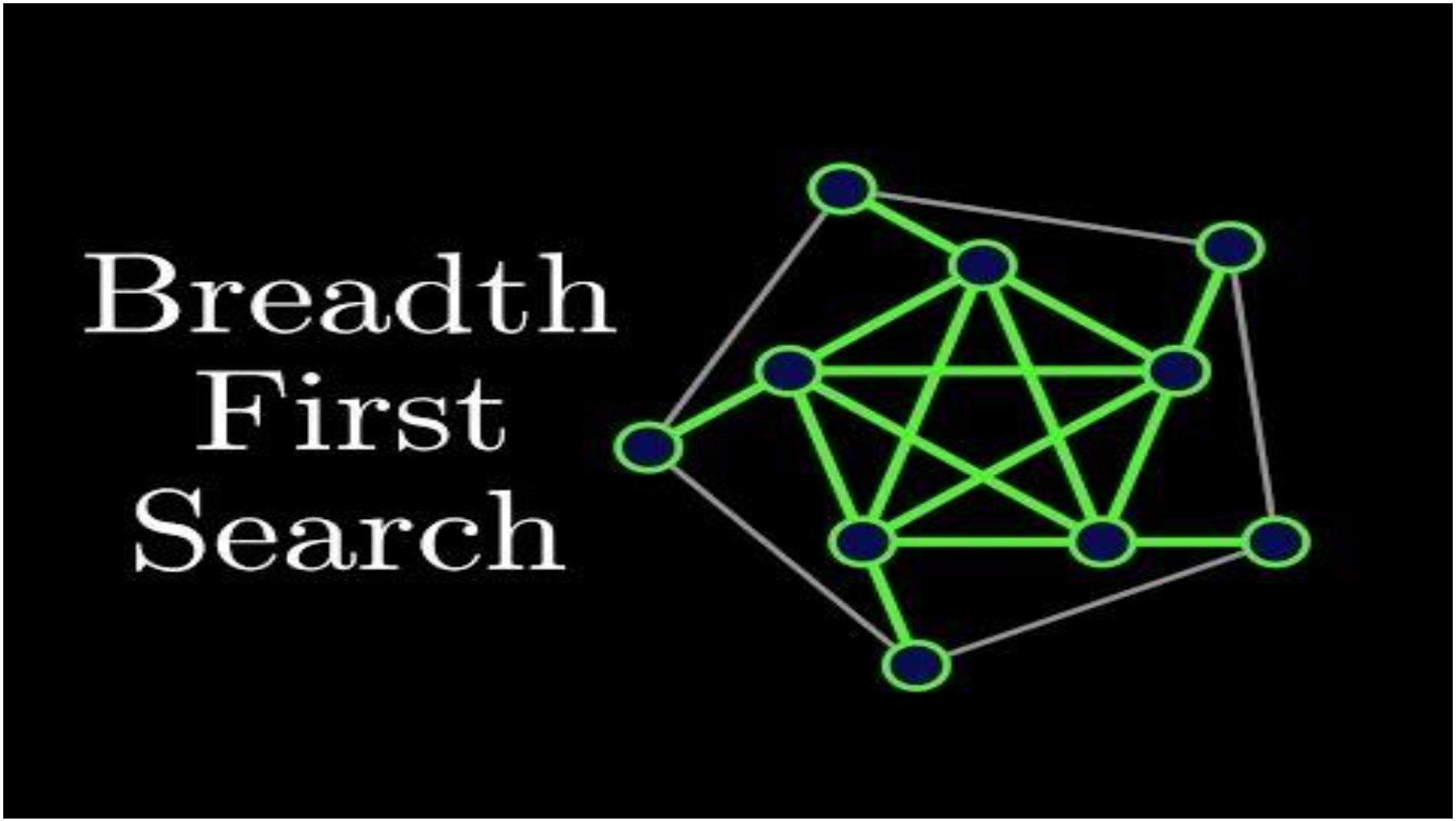


Potřebná velikost zásobníku / fronty:

$\Theta(N^2)$

$\Theta(N)$

BFS



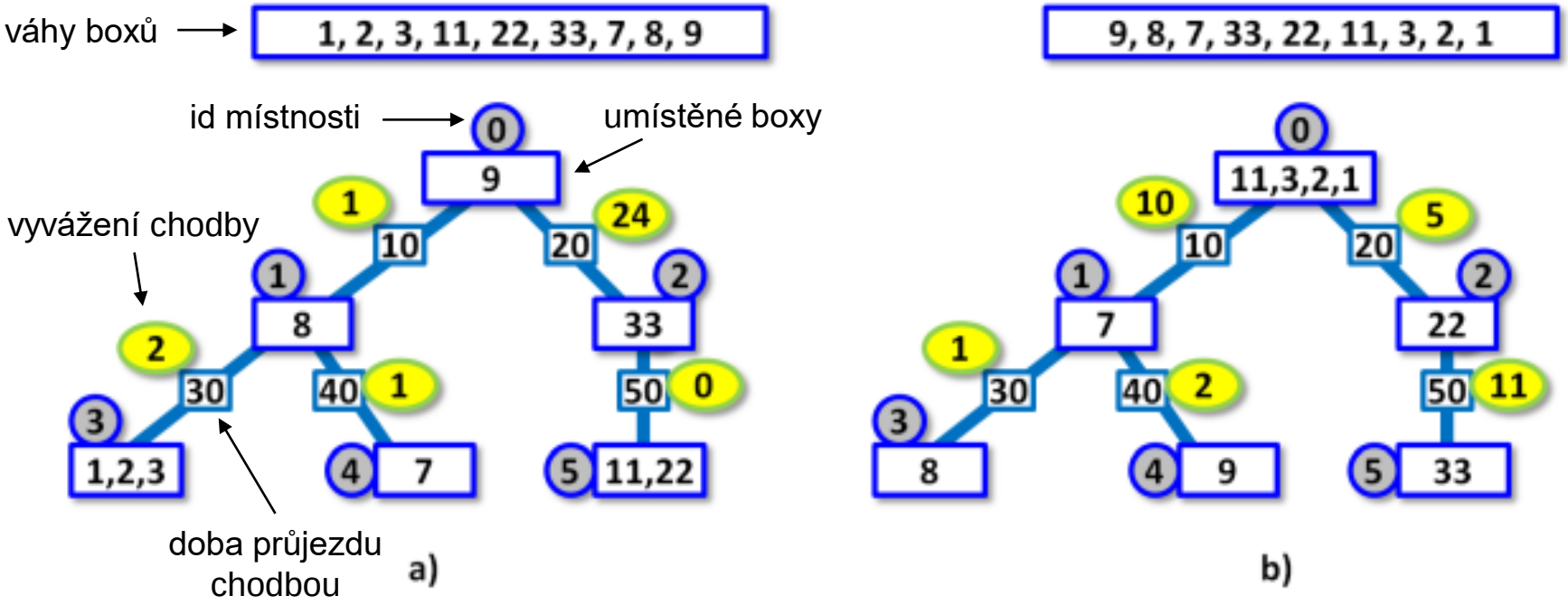
https://www.youtube.com/watch?v=xlVX7dXLS64

slido

Audience Q&A Session

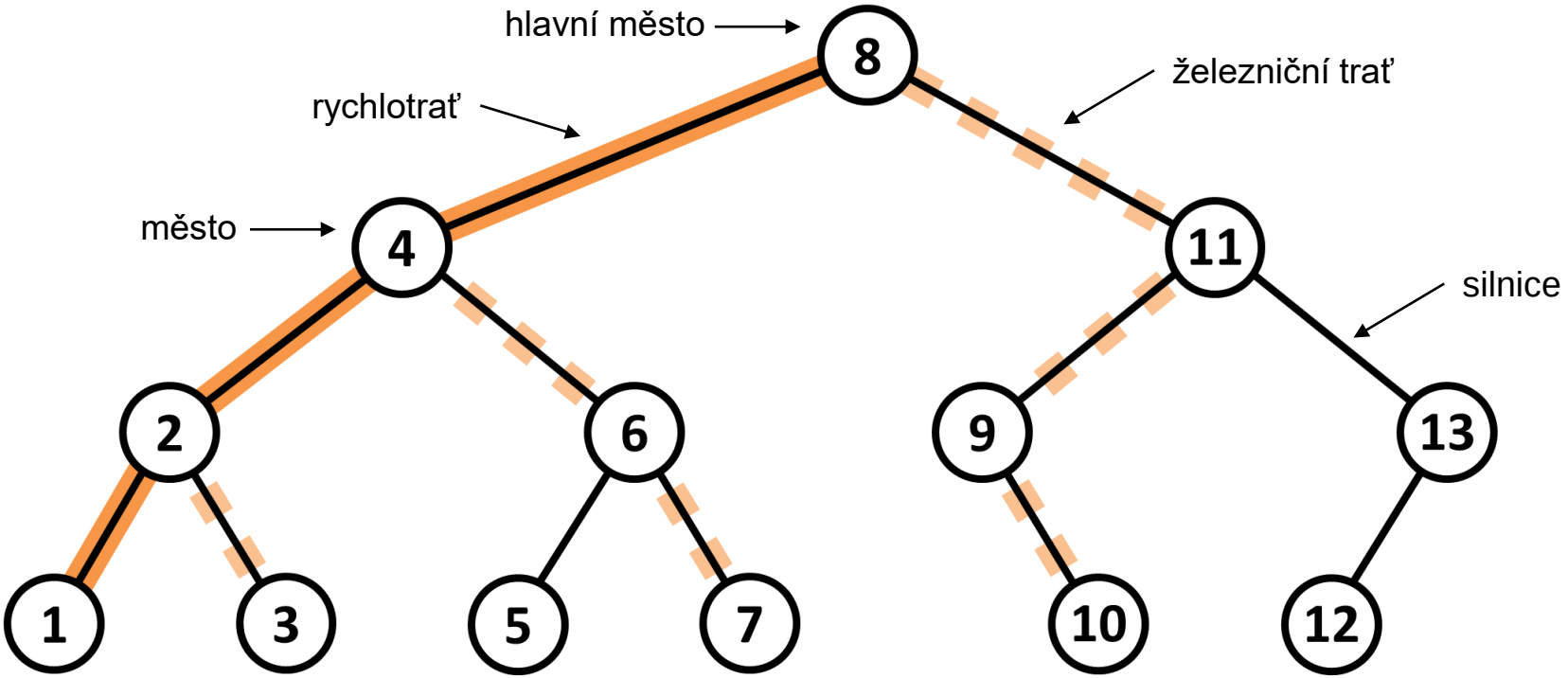
ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Druhá domácí úloha



Ve schématech a) a b) jsou nahoře vyznačeny váhy jednotlivých devíti boxů, které se ukládají do původně prázdného skladu schematicky naznačeného níže. V obou případech jsou parametry prázdných skladů identické, odlišné hodnoty jsou způsobeny jen odlišným pořadím ukládaných boxů, vždy odleva v seznamu. Uzly představují místnosti, jejich označení je zakroužkováno na tmavším pozadí, váhy jednotlivých boxů v místnostech jsou vepsány v uzlech. Na hranách představujících chodby jsou vyznačeny doby průjezdu a zvýrazněny hodnoty (v elipsách) vyvážení chodeb. Schémata odpovídají jednomu z možných uložení boxů, která splňují požadavky dispečinku.

Třetí domácí úloha



Vstup:
13
8 4 2 1 3 6 5 7 11 9 10 13 12

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.