Algoritmizace

Marko Genyk-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 – 2023

Úvod

- stránky předmětu:

  https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b4b33alg/start

- cíle předmětu

  Cílem je schopnost samostatné implementace různých variant základních úloh informatiky. Hlavní témata jsou algoritmy řazení a vyhledávání a jim odpovídající datové struktury. Důraz je kladen na algoritmický aspekt úloh a efektivitu praktického řešení.

- předpoklady

  Kurs předpokládá **schopnost programování** v alespoň jednom z jazyků C/C++/Java. Součástí cvičení jsou programovací úlohy na řešení problematiky ALG. Adept musí ovládat základní datové struktury jako pole, seznam, soubor a musí být schopen manipulovat s daty v těchto strukturách.

slido

Join at slido.com #7710031

ⓘ Start presenting to display the joining instructions on this slide.

slido

Vyjádřete jedním slovem svoji momentální náladu.

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Nálady 2021

Sick
Ráno
očekávání
cuketa
bruh
nijaká
Brambora
Ok
Zvědavý
lmao
udýchaný
Fajn
Unavený
Skvele
xD
neurcita
WEED
nice
Žiji
Super
Fresh
Pohoda
Strach
Сойдёт
Rozladenyskvělá
Sus
Rozespalý
hakunamatata
raketťák
nic moc
Zima

slido

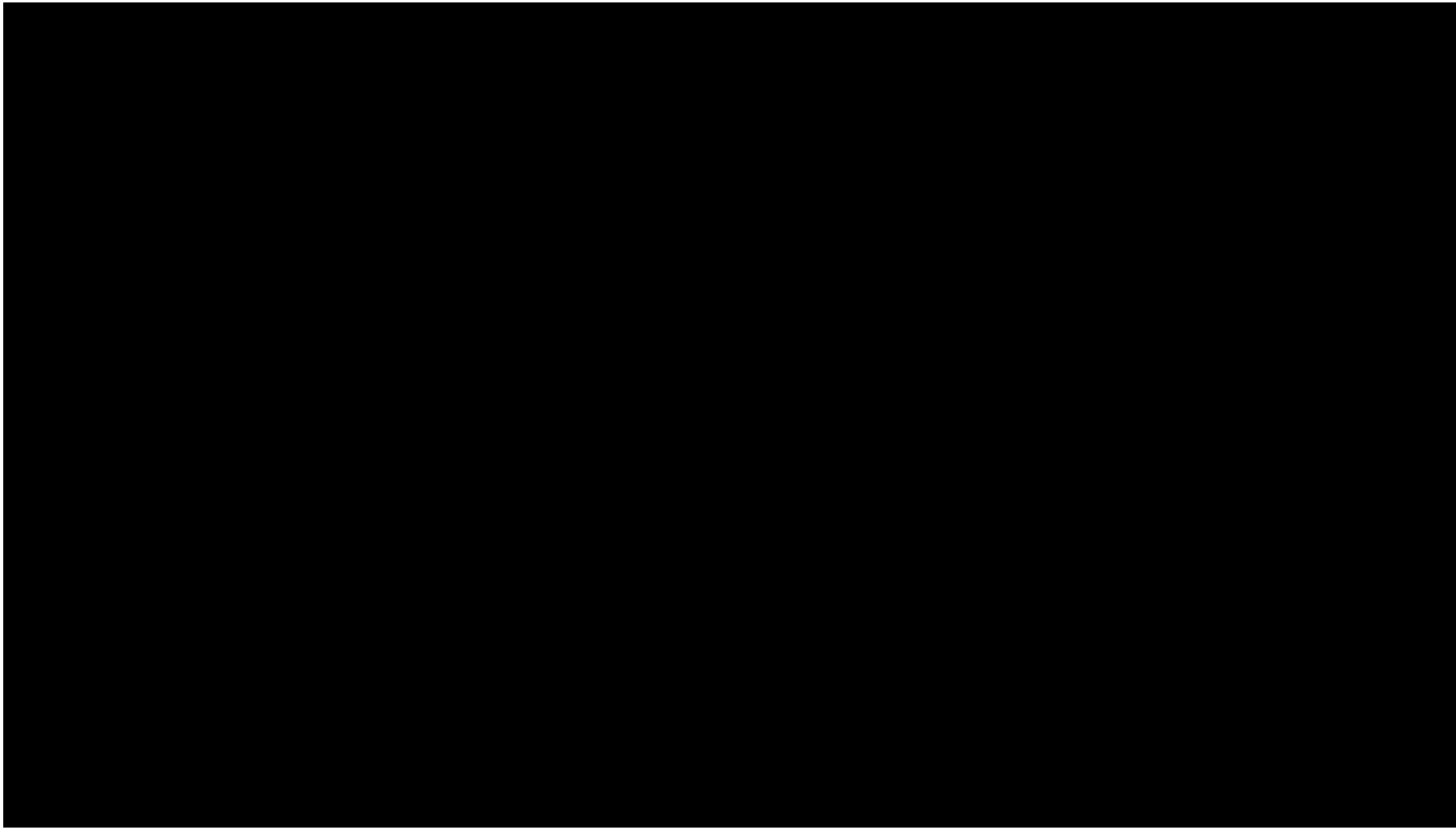
Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Problémy a algoritmy

- Výpočetní problém P
  - Úkol zpracovat vstupní data IN na výstupní data OUT se zadanými vlastnostmi.
- Algoritmus A
  - Výpočetní postup řešení problému P.
  - Tedy přesný popis posloupnosti kroků, která vezme vstupní data IN a vyprodukuje výstupní data OUT dle zadaných vlastností problémem P.
- Instance problému
  - Problém s konkrétními vstupními daty potřebnými pro jeho řešení.
- Korektnost algoritmu A pro problém P
  - Algoritmus A je korektní, pokud pro každou instanci problému P vydá v **konečném** čase **správný** výstup (tedy takový, který řeší problém P).

Porovnání řadících algoritmů



https://youtu.be/ZZuD6iUe3Pc

Jak měřit algoritmy?

- Podle algoritmu vytvoříme program v programovacím jazyku a několik vybraných instancí problému.
- Algoritmy pak porovnáme podle rychlosti a paměťové náročnosti na konkrétním počítači.
- Ale co když bychom změnili počítač, nebo jen OS, nebo co kdybychom vybrali jiné instance problému, nebo kdybychom změnili programovací jazyk?
- Budou algoritmy výše popsaným způsobem stále stejně porovnatelné? .... zřejmě nikoliv …
- → Budeme potřebovat nějakou nezávislou metodu (na programovacím jazyku, počítači, atd …) na porovnávání algoritmů.

Růst funkcí

- Čas potřebný ke zpracování dat velikosti n, jestliže počet operací při provádění algoritmu je dán funkcí $\mathrm{T}(n)$ a provedení jedné operace trvá jednu mikrosekundu. (Připomeňme, že počet atomu ve vesmíru se odhaduje na 10^{80} a stáří na 14×10^{9} let)

$\mathrm{T}(n)/n$	20	40	60	80	100
$\log(n)$	4.3 μs	5.3 μs	5.9 μs	6.3 μs	6.6 μs
n	20 μs	40 μs	60 μs	80 μs	0.1 ms
$n \log(n)$	86 μs	0.2 ms	0.35 ms	0.5 ms	0.7 ms
n^2	0.4 ms	1.6 ms	3.6 ms	6.4 ms	10 ms
n^3	8 ms	64 ms	0.22 s	0.5 s	1 s
n^4	0.16 s	2.56 s	13 s	41 s	100 s
2^n	1 s	12.7 dní	36600 let	10^{11} let	10^{16} let
$n!$	77100 let	10^{34} let	10^{68} let	10^{105} let	10^{144} let

Asymptotické odhady

- horní asymptotický odhad (velké omikron odhad):

$$f(n) \in O(g(n))$$

- význam:

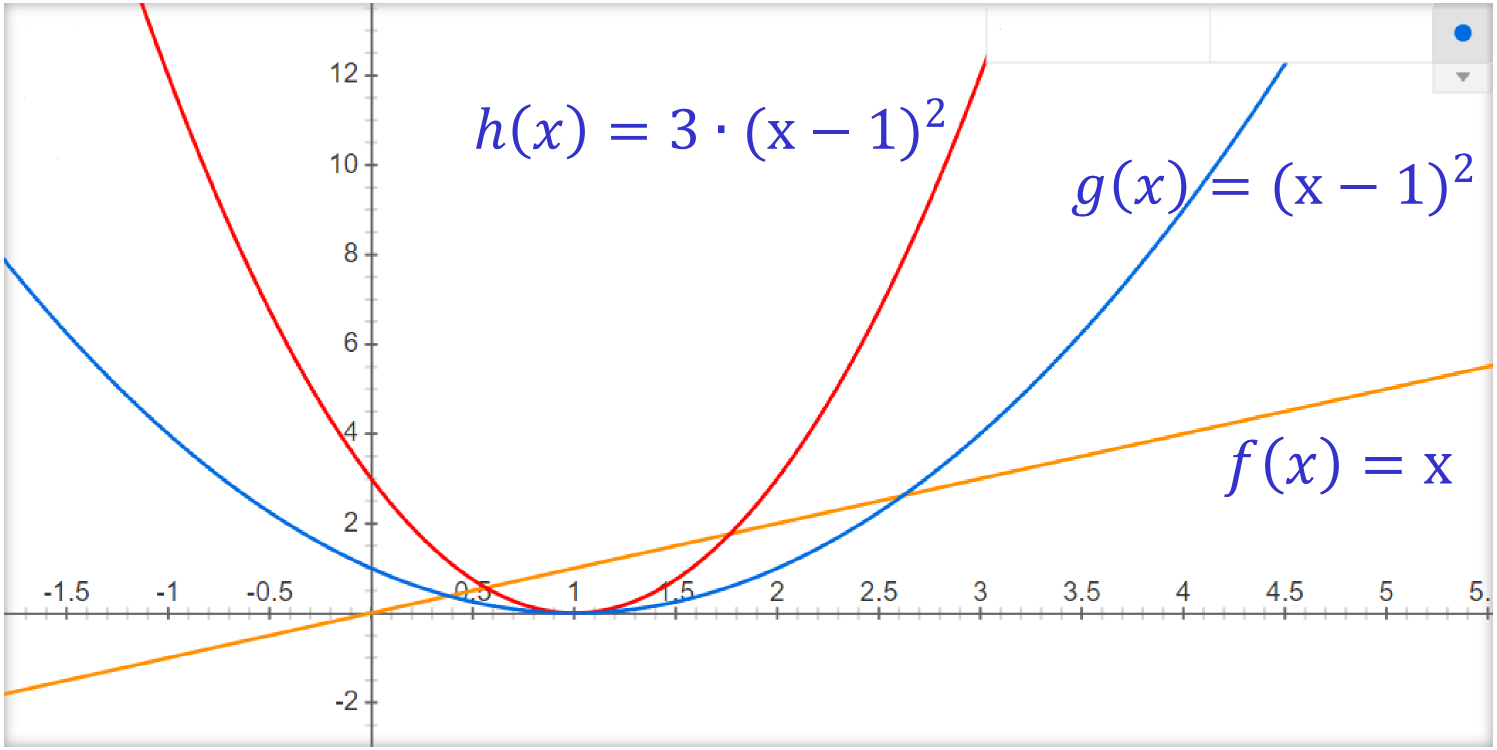
f je shora asymptoticky ohraničená funkcí g (až na multiplikativní konstantu)

- definice:

$$(\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0) : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

kde $c \in \mathbb{R}^{>0}$ $n_0, n \in \mathbb{N}$ $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

- příklad $f(x) \in O(g(n)), \quad h(x) \in O(g(n))$



$$(\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0) : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Asymptotické odhady

Co neplatí?

A. $22 \cdot n + 3 \in O(n - 1000)$

B. $(n^2 + 1)^2 \in O(5 \cdot n^3)$

C. $\dfrac{3n + 1}{n + 1} \in O(1)$

slido

Co neplatí?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Asymptotické odhady

- horní asymptotický odhad pro více proměnných:

$$f(n_1, \cdots, n_k) \in O(g(n_1, \cdots, n_k))$$

- definice:

$$(\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n_1 > n_0) \cdots (\forall n_k > n_0) :$$

$$f(n_1, \cdots, n_k) \le c \cdot g(n_1, \cdots, n_k)$$

kde $c \in \mathbb{R}^{>0}$ $n_0, n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

Asymptotické odhady

- poznámka

v literatuře se často místo

$$f(n) \in O(g(n))$$

používá zápis

$$f(n) = O(g(n))$$

není to ale přesné z matematického hlediska

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Asymptotické odhady

- dolní asymptotický odhad (velké omega odhad):

$$f(n) \in \Omega(g(n))$$

- význam:

f je zdola asymptoticky ohraničená funkcí g (až na konstantu)

- definice:

$$(\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0) : \; c \cdot g(n) \leq f(n)$$

kde $c \in \mathbb{R}^{>0}$ $n_0, n \in \mathbb{N}$ $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

Asymptotické odhady

- optimální asymptotický odhad (velké théta odhad):

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

- význam:

f je asymptoticky ohraničená funkcí g z obou stran (až na konstantu)

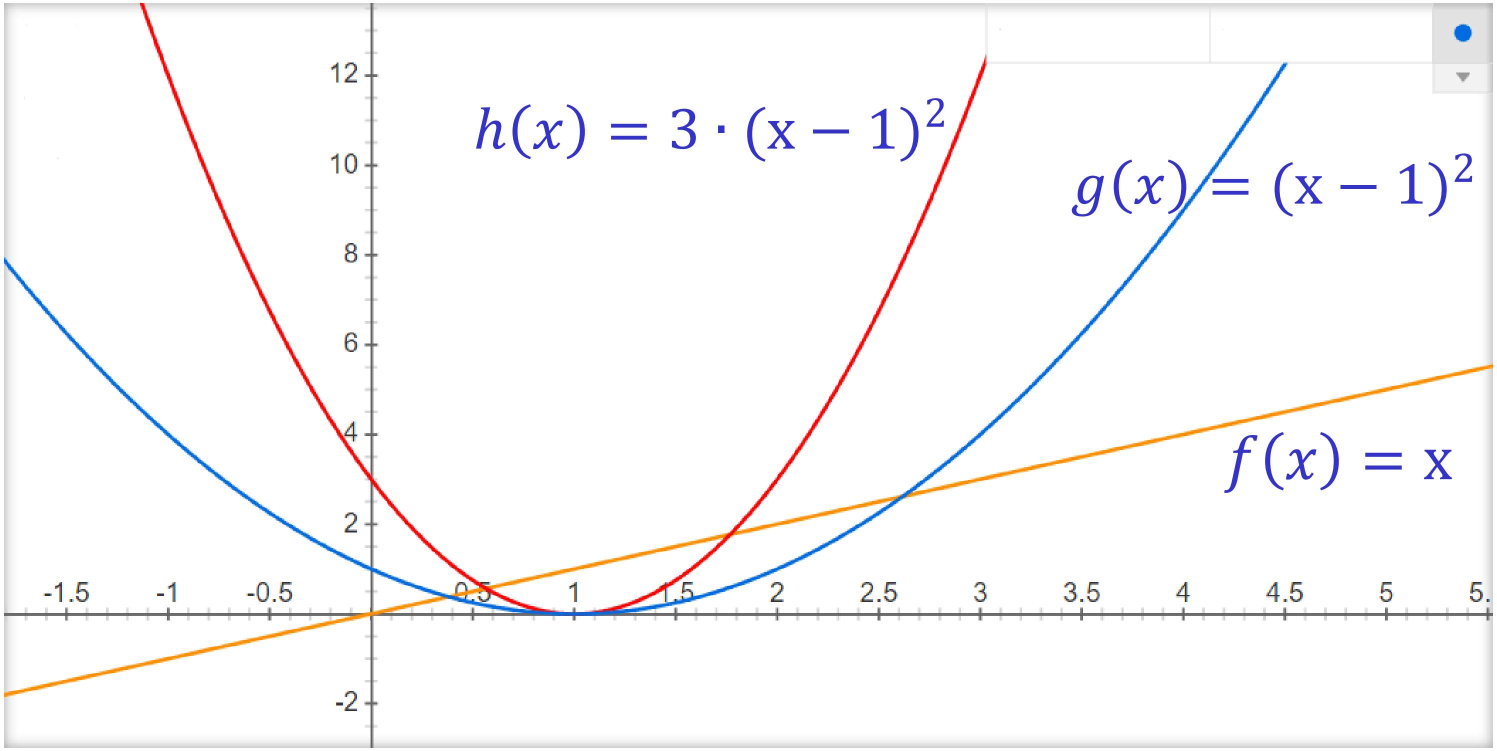
- definice: $\Theta\big(g(n)\big) \stackrel{\text{def}}{=} O\big(g(n)\big) \cap \Omega(g(n))$
- nebo alternativně:

$$(\exists c_1, c_2 > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0): c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ $n_0, n \in \mathbb{N}$ $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

Asymptotické odhady

- příklad $g(n) \in \Theta(h(n)),\qquad g(n) \notin \Theta(f(n))$



Asymptotické odhady

- příklad: Mějme dvojrozměrné pole MxN celých čísel. Jaká je asymptotická složitost problému nalezení největšího čísla v tomto poli?

- horní:
  - $O((M+N)^2)$ ✓
  - $O(\max(M,N)^2)$ ✓
  - $O(N^2)$ ✗
  - $O(M*N)$ ✓

- dolní:
  - $\Omega(1)$ ✓
  - $\Omega(M)$ ✓
  - $\Omega(M*N)$ ✓

- optimální:
  - $\Theta(M*N)$

Asymptotické odhady

- O algoritmu se složitostí $f(n)$ říkáme, že je

  logaritmický, pokud $f(n) \in \Theta(\log(n))$

  lineární, pokud $f(n) \in \Theta(n)$

  kvadratický, pokud $f(n) \in \Theta(n^2)$

  kubický, pokud $f(n) \in \Theta(n^3)$

  polynomiální, pokud $f(n) \in \Theta(n^k)$ pro $k \in \mathbb{N}$

  exponenciální, pokud $f(n) \in \Theta(k^n)$ pro $k \in \mathbb{N}$

- Poznámka: U asymptotických odhadů nemá smysl u logaritmických složitostí uvádět základ logaritmu, protože platí $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$ pro libovolná nenulová kladná a,b.

Asymptotické odhady

- Jak dokážeme $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$?

$$\boxed{\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b n$$

vzoreček

konstanta

Vlastnosti asymptotických odhadů

$$
\begin{aligned}
n^m &\in O\left(n^{m'}\right) \text{ pokud } m \leq m' \\
f(n) &\in O(f(n)) \\
c \cdot O(f(n)) &= O(c \cdot f(n)) = O(f(n)) \\
O\left(O(f(n))\right) &= O\left(f(n)\right) \\
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(\max\{f(n), g(n)\}) \\
O(f(n)) \cdot O(g(n)) &= O\left(f(n) \cdot g(n)\right) \\
O(f(n) \cdot g(n)) &= f(n) \cdot O(g(n))
\end{aligned}
$$

- Třídu složitosti polynomu určuje člen s nejvyšší mocninou:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^{k-i} \in \sum_{i=0}^{k} O(n^k) = k \cdot O(n^k) = O(k \cdot n^k) = O(n^k)$$

Vlastnosti asymptotických odhadů

- Věta: Jsou-li funkce $f(n)$, $g(n)$ vždy kladné, pak pro limitu v ∞ platí
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, pak $f(n) \in O(g(n))$, ale **neplatí** $f(n) \in \Theta(g(n))$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$, kde $0 < a < \infty$, pak $f(n) \in \Theta(g(n))$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, pak $g(n) \in O(f(n))$, ale **neplatí** $g(n) \in \Theta(f(n))$
- Důsledek: Mějme pevně zvolené číslo $k \in \mathbb{N}$, pak platí

$$(\log(n))^k \in O(n)$$

- Důkaz lze provést pomocí L'Hopitalova pravidla.

Vlastnosti asymptotických odhadů

- Dokážeme $(\ln(n))^2 \in O(n)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{((\ln x)^2)'}{x'}$$

Vlastnosti asymptotických odhadů

Co je derivací funkce $(\ln x)^2$?

A. $\dfrac{2}{x}$

B. $\dfrac{2 \cdot \ln x}{x}$

C. $2 \cdot \ln x$

D. $\sin(x^2)$

slido

Derivace funkce $(\ln x)^2$?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Vlastnosti asymptotických odhadů

- Dokážeme $(\ln(n))^2 \in O(n)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{((\ln x)^2)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2\cdot\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0$$

slido

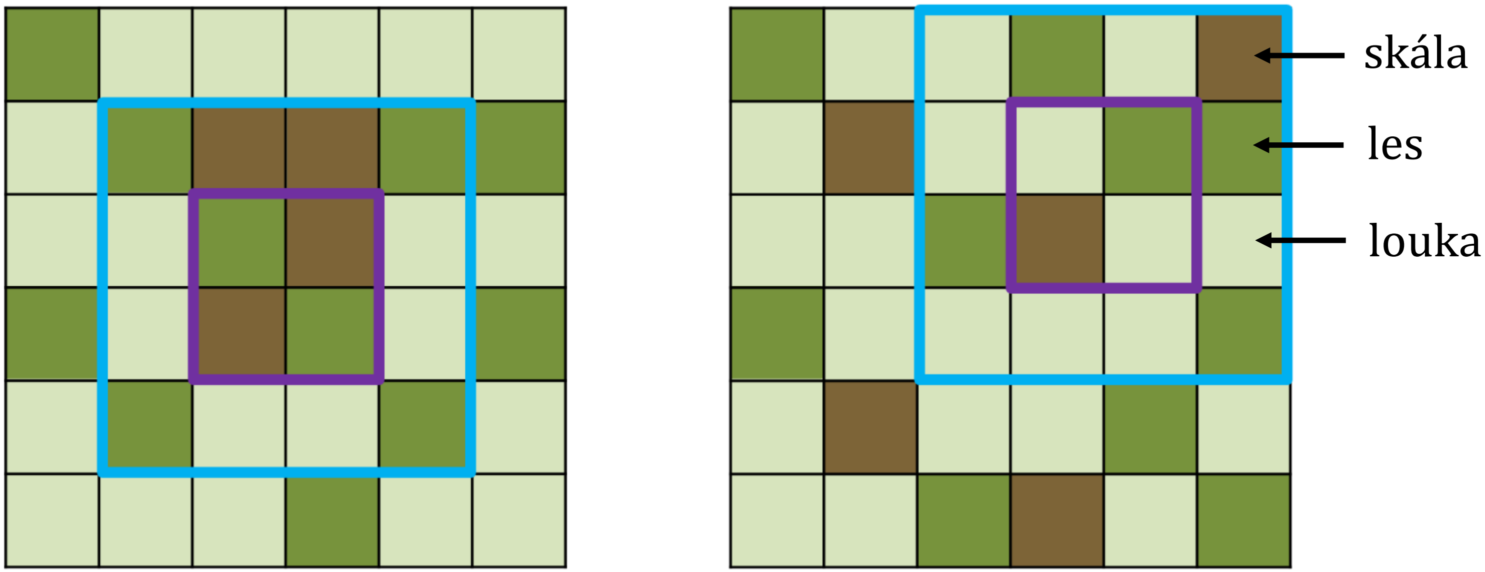
Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.

Domácí úloha

a) N = 6, K = 4, S = 2

b) N = 6, K = 4, S = 1



Plocha N x N.

Hledáme v ní plochu K x K, která obsahuje maximální počet lesů a jejíž centrální část má alespoň S skal.

Prefixové součty

A … pole čísel indexované od 1 do N
P … pole prefixových součtů (v A) indexované od 0 do N

P[i] = A[1] + … + A[i] - prefixový součet pro úsek délky i
P[0] = 0

Příklad:
A =   {1, -2, 4, 5, -1, -5, 2, 7}
P = {0, 1, -1, 3, 8, 7, 2, 4, 11}

Každý součet A[i] + A[i+1] + … + A[j-1] + A[j] lze určit v konstantním čase, je roven P[j] – P[i-1].

Viz programátorská kuchařka:
https://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/zakladni-algoritmy/

slido

Audience Q&A Session

ⓘ Start presenting to display the audience questions on this slide.