Pravděpodobnost, proč je to tak těžké?

Tomáš Svoboda and Petr Pošík

Vision for Robots and Autonomous Systems, Center for Machine Perception
Department of Cybernetics
Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague

14. března 2024

Pravděpodobnost (nejistota) je všude

- Pravděpodobnost srážek zítra je 70%.
- Jakou mám šanci vyhrát v loterii?
- Mám pozitivní test na nemoc X, jsem opravdu nemocný?
- Svědectví jsou X, Y, a Z, je obviněný vinen?
- Nezaměstnanost se změnila o X, jaká bude inflace?
- Jak se bude vyvíjet cena akcií?
- Vybraná akce je X, o kolik se robot pohne?
- Jaká je pravděpodobnost, že na fotce je osoba XY?
- Jak dlouho mi bude trvat cesta, když pojedu tramvají?
- ...

Potřebujeme matematický popis ...

Co se naučíme

- Náhodný vs. deterministický pokus
- Náhodný jev jako jeho výsledek; prostor jevů
- Pravděpodobnost – naivní, axiomaticky definovaná
- Podmíněná pravděpodobnost, nezávislé jevy
- Náhodná proměnná a její očekávaná hodnota

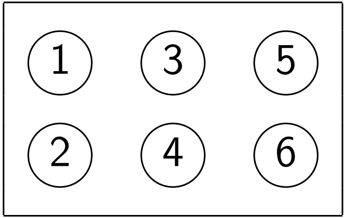
(Náhodný) pokus, jev

Pokus :

- Zjednodušeně:
- Děj či procedura, která
  - může být libovolněkrát konzistentně opakována a
  - má jednoznačně definovanou množinu možných výsledků.
- Deterministický pokus má jediný možný výsledek.
- Náhodný pokus má více možných výsledků.
- Neznáme výsledek *před* vykonáním náhodného pokusu. Po pokusu, je vše již jasné, nejistota mizí.
- Náhodný jev je výsledek náhodného pokusu.

Náhodný pokus 1: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů :



Náhodné jevy :

- A - 6, $P(A) = ?$
- B - liché číslo, $P(B) = ?$
- C - číslo větší než 2, $P(C) = ?$ ...
- D - číslo větší než 6, $P(D) = ?$ ...

Think twice, DALL-E!

Náhodný pokus 1: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech **elementárních jevů** :

1	3	5
2	4	6

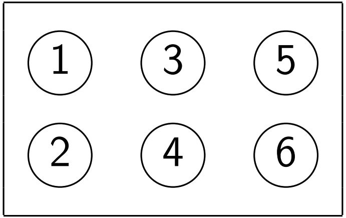
Think twice, DALL-E!

Náhodné jevy :

- A - 6, $P(A) = ?$
- B - liché číslo, $P(B) = ?$
- C - číslo větší než 2, $P(C) = ?$ ...
- D - číslo větší než 6, $P(D) = ?$ ...

Náhodný pokus 1: Jeden hod hrací kostkou

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů :



Náhodné jevy :

- A - 6, $P(A) = ?$
- B - liché číslo, $P(B) = ?$
- C - číslo větší než 2, $P(C) = ? \dots$
- D - číslo větší než 6, $P(D) = ? \dots$

Think twice, DALL-E!

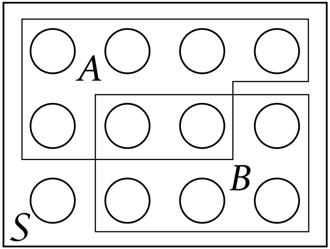
(Náhodné) jevy

Elementární jevy jsou *všechny možné, vzájemně se vylučující výsledky* nějakého experimentu.

Množinu elementárních jevů označme $\mathcal{S}$.

Náhodný jev A je jakákoli podmnožina množiny elementárních jevů, $A \subseteq \mathcal{S}$.

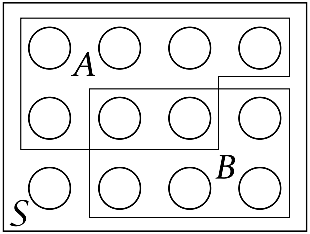
- Jen A nastal, pokud výsledek experimentu patří do A.
- Jevem je jakýkoli výrok o výsledku experimentu, pro který můžeme rozhodnout, zda nastal či nikoli.



Naivní definice pravděpodobnosti (Bernoulli/Laplace)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\mathcal{S}|} = \frac{\text{počet výsledků vyhovujících jevu } A}{\text{celkový počet možných výsledků v } \mathcal{S}}$$

- Platí jen pro *stejně pravděpodobné* elementární jevy. (*Stejně pravděpodobné?*)
- Neumožňuje pracovat s nekonečným počtem elementárních jevů, geometrickou pravděpodobností, ...
- *Kombinatorika!* Počítání možností (variace, permutace, kombinace, ...)



Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

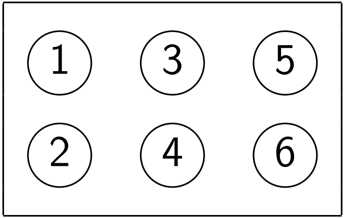
- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

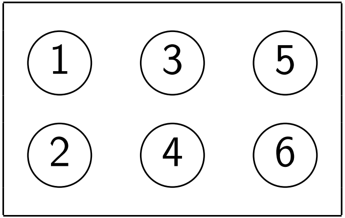
- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

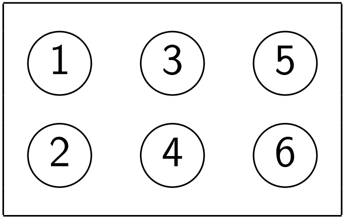
- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

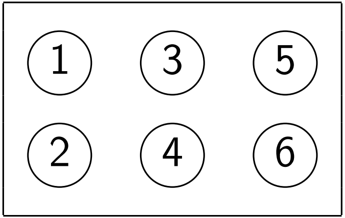
- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

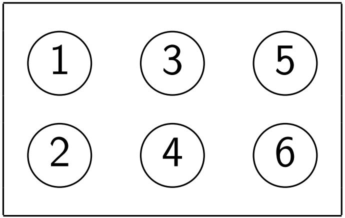
- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

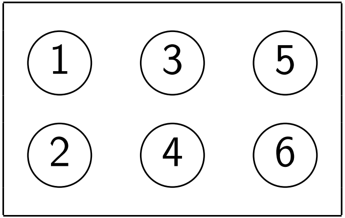
- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

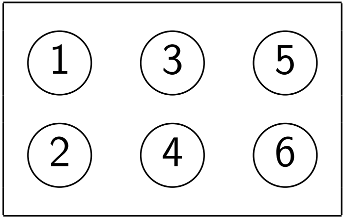
- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

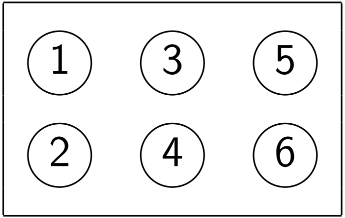
- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P, hod kostkou

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



Uvažujme jevy:

- A - padne 6
- B - padne sudé číslo

Množinově: $A \subset B$

Pravděpodobnost: $P(A) < P(B)$

Další jev:

- C - padne 2 nebo 4

Množinově: $C = B \setminus A$

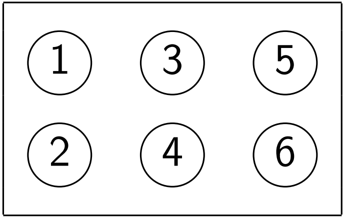
Pravděpodobnost: $P(C) = P(B) - P(A)$

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou,

$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- A - padne 6,
- B - padne liché číslo.



Jaká je pravděpobnost, že nastane jev A *nebo* B?

Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

C - padne sudé číslo.

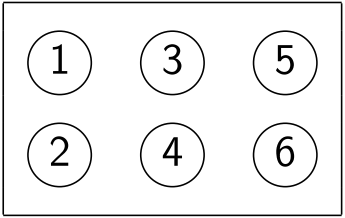
Jaká je pravděpobnost, že nastane jev A *nebo* C?

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou,

$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- A - padne 6,
- B - padne liché číslo.



Jaká je pravděpobnost, že nastane jev A *nebo* B?
Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

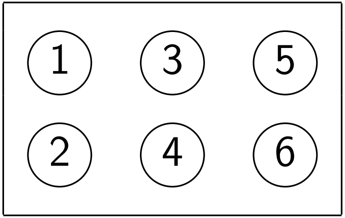
C - padne sudé číslo.
Jaká je pravděpobnost, že nastane jev A *nebo* C?

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou,

$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- A - padne 6,
- B - padne liché číslo.



Jaká je pravděpobnost, že nastane jev A *nebo* B?

Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

C - padne sudé číslo.

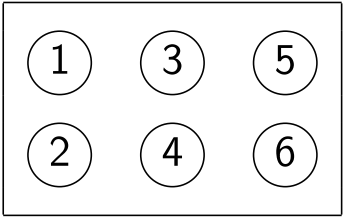
Jaká je pravděpobnost, že nastane jev A *nebo* C?

Příklad 2: Vlastnosti P (pokr.)

Hod kostkou,

$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

- A - padne 6,
- B - padne liché číslo.



Jaká je pravděpobnost, že nastane jev A *nebo* B?
Zjevně $A \cap B = \emptyset$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

C - padne sudé číslo.
Jaká je pravděpobnost, že nastane jev A *nebo* C?

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

Vážnější problém z oblasti pravděpodobnosti

Čerpadlo v elektrárně je zálohováno pomocí druhého identického čerpadla. Jev A_i znamená, že čerpadlo i funguje. Jaká je pravděpodobnost, že funguje alespoň jedno?

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Obě čerpadla fungují:

$$P(A_1 \cap A_2) = ?$$

Nastanou jevy A a B současně. Házíme kostkou

- A: padne liché číslo
- B: padne číslo menší než tři

Jaká je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně, neboli $P(A, B) = ?$

A $1/4$

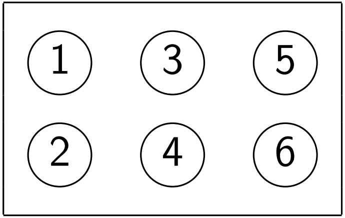
B $1/6$

C $1/2$

D $1/3$

Nastanou jevy A a B současně. Házíme kostkou

- A: padne liché číslo
- B: padne číslo menší než tři



Jaká je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně, neboli $P(A, B) = ?$

A $1/4$

B $1/6$

C $1/2$

D $1/3$

Nastanou jevy A a B současně. Házíme kostkou

- A: padne *sudé* číslo
- B: padne číslo *větší* než tři

Jaká je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně, neboli $P(A, B) = ?$

A $1/4$

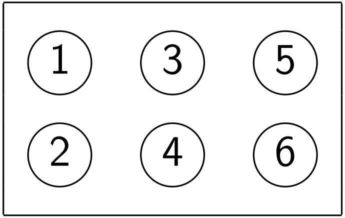
B $1/6$

C $1/2$

D $1/3$

Nastanou jevy A a B současně. Házíme kostkou

- A: padne *sudé* číslo
- B: padne číslo *větší* než tři



Jaká je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně, neboli $P(A, B) = ?$

A $1/4$

B $1/6$

C $1/2$

D $1/3$

Nastane jev B; jak to ovlivní $P(A)$?

- A: padne *sudé* číslo
- B: padne číslo *větší* než tři

Máme informaci, že nastal jev B. Jaká je pravděpodobnost, že je to sudé číslo? Tedy: $P(A|B) = ?$

A $1/4$

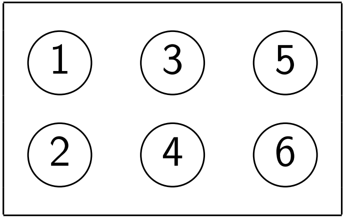
B $2/3$

C $1/2$

D $1/3$

Nastane jev B; jak to ovlivní $P(A)$?

- A: padne *sudé* číslo
- B: padne číslo *větší* než tři



Máme informaci, že nastal jev B. Jaká je pravděpodobnost, že je to sudé číslo? Tedy: $P(A|B) = ?$

A $1/4$

B $2/3$

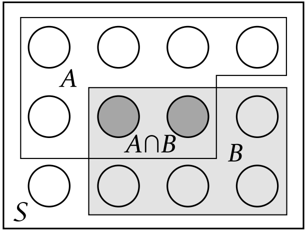
C $1/2$

D $1/3$

Podmíněná pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost jevu A, pokud nastal jev B je definována jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad P(B) \neq 0.$$



- Všechny pravděpodobnosti jsou podmíněné: $P(A) = P(A|\mathcal{S})$.
- Interpretace:
  1. $P(A)$ je naše aktuální (apriorní) důvěra v to, že jev A nastane.
  2. Dostaneme novou informaci, že jiný jev B nastal.
  3. $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že jev A nastane.
- Podmíněné pravděpodobnost je stále pravděpodobnost; mapuje každý jev $A \subseteq \mathcal{S}$ na $\langle 0, 1 \rangle$.

Bayesovo pravidlo

Pravděpodobnost $P(A \cap B)$ průniku dvou jevů A a B lze vyjádřit dvěma způsoby:

- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
- $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Porovnáním získáme Bayesovo pravidlo

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Aplikací pravidla úplné pravděpodobnosti pro výpočet $P(A)$ ve jmenovateli získáme:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}.$$

Bayesovo pravidlo

Pravděpodobnost $P(A \cap B)$ průniku dvou jevů A a B lze vyjádřit dvěma způsoby:

- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
- $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Porovnáním získáme **Bayesovo pravidlo**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Aplikací pravidla úplné pravděpodobnosti pro výpočet $P(A)$ ve jmenovateli získáme:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}.$$

Bayesovo pravidlo

Pravděpodobnost $P(A \cap B)$ průniku dvou jevů A a B lze vyjádřit dvěma způsoby:

- $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
- $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Porovnáním získáme Bayesovo pravidlo

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Aplikací pravidla úplné pravděpodobnosti pro výpočet $P(A)$ ve jmenovateli získáme:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum\limits_{j \in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}.$$

Úprava/aktualizace pravděpodobnosti

1. Pravděpodobnost $P(A)$ je naše úvodní (apriorní) důvěra, že nastane jev A.
2. Dozvíme se, že nastal jev B.
3. Pravděpodobnost $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že nastane jev A.

O jevech A a B nevíme nic dalšího. Která z následujících možností je správná?

A $P(A|B) < P(A)$

B $P(A|B) = P(A)$

C $P(A|B) > P(A)$

D Může nastat kterákoli z uvedených možností.

Za jakých podmínek nastane možnost B?

Úprava/aktualizace pravděpodobnosti

1. Pravděpodobnost $P(A)$ je naše úvodní (apriorní) důvěra, že nastane jev A.
2. Dozvíme se, že nastal jev B.
3. Pravděpodobnost $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že nastane jev A.

O jevech A a B nevíme nic dalšího. Která z následujících možností je správná?

- A $P(A|B) < P(A)$
- B $P(A|B) = P(A)$
- C $P(A|B) > P(A)$
- D Může nastat kterákoli z uvedených možností.

Za jakých podmínek nastane možnost B?

Úprava/aktualizace pravděpodobnosti

1. Pravděpodobnost $P(A)$ je naše úvodní (apriorní) důvěra, že nastane jev A.
2. Dozvíme se, že nastal jev B.
3. Pravděpodobnost $P(A|B)$ je naše aktualizovaná (aposteriorní) důvěra, že nastane jev A.

O jevech A a B nevíme nic dalšího. Která z následujících možností je správná?

A $P(A|B) < P(A)$

B $P(A|B) = P(A)$

C $P(A|B) > P(A)$

D Může nastat kterákoli z uvedených možností.

Za jakých podmínek nastane možnost B?

Příklad: Voják nebo technik?

Tomáš je pořádkumilovný, rozhodný a má smysl pro spravedlnost. Jako dítě rád hrál na počítači strategické hry a střílečky. Vždy se zajímal o zbraně a vojenskou techniku.

Čím je podle vás Tomáš v současnosti?

A Voják

B Technik

C Obojí, voják i technik

Příklad: Voják nebo technik?

Tomáš je pořádkumilovný, rozhodný a má smysl pro spravedlnost. Jako dítě rád hrál na počítači strategické hry a střílečky. Vždy se zajímal o zbraně a vojenskou techniku.

Čím je podle vás Tomáš v současnosti?

A Voják

B Technik

C Obojí, voják i technik

Příklad: Voják nebo technik?

Tomáš je pořádkumilovný, rozhodný a má smysl pro spravedlnost. Jako dítě rád hrál na počítači strategické hry a střílečky. Vždy se zajímal o zbraně a vojenskou techniku.

Čím je podle vás Tomáš v současnosti?

A Voják

B Technik

C Obojí, voják i technik

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ?$ ...

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ?$ ...

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ?$ ...

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech elementárních jevů . Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ? \ldots$

Náhodný pokus 1: Házíme třikrát mincí (Head/Tails)

(Náhodný) Jev – výsledek náhodného pokusu

Prostor (množina!) $\mathcal{S}$ všech **elementárních jevů** . Jak je velká?

A 3^2

B 2^3

C $2 \cdot 3$

D ∞

(Náhodné) Jevy :

- A - $3\times$ panna (hlava), $P(A) = ?$
- B - $3\times$ stejný symbol, $P(B) = ?$
- C - alespoň jeden orel (tail), $P(C) = ?$ ...

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...
Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- A_1: tři hlavy – $X(s) = 3$
- A_2: alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- A_3: tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s.
Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X:

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- A_1: tři hlavy – $X(s) = 3$
- A_2: alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- A_3: tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s.

Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X:

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- A_1: tři hlavy – $X(s) = 3$
- A_2: alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- A_3: tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s.

Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X:

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné ...

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- A_1: tři hlavy – $X(s) = 3$
- A_2: alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- A_3: tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- ...

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s.

Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X:

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

Náhodná proměnná/veličina

Pracovat s náhodnými jevy je těžkopádné …

Pokus: 3 hody mincí. Elementární jevy $s \in \mathcal{S}$. Jevy $A_i \subseteq \mathcal{S}$:

- A_1: tři hlavy – $X(s) = 3$
- A_2: alespoň jedna hlava – $X(s) \geq 1$
- A_3: tři stejné symboly – $X(s) \in \{3, 0\}$
- …

Můžeme definovat každý jev jako množinu (leckdy dost obsáhlou) elementárních jevů s.

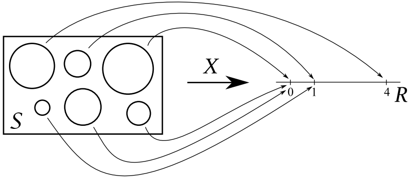
Nebo si zavedeme náhodnou proměnnou/veličinu X:

$$X(s) = \text{počet hlav v } s$$

Náhodná *proměnná* je ve skutečnosti *funkce*!

Náhodná veličina

Náhodná proměnná/veličina na pravděpodobnostním prostoru $(\mathcal{S}, P)$ je funkce X zobrazující elementární jevy $s \in \mathcal{S}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, tj. $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

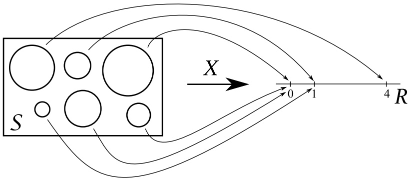


"Náhodná veličina je *číselná charakteristika* nějakého aspektu experimentu."

- N.v. X přiřazuje číselnou hodnotu $X(s)$ každému možnému výsledku $s \in \mathcal{S}$.
- Samo zobrazení je *deterministické*; náhodnost pochází z výsledků náhodného pokusu (pravděpodobnosti jednotlivých výsledků jsou určeny pravděpodobnostní funkcí P).
- Před provedením experimentu neznáme ani jeho výsledek s, ani hodnotu n.v. $X(s)$. Ale můžeme spočítat pravděpodobnosti, že X nabyde určité hodnoty, nebo že její hodnota bude v určitém intervalu.
- Po provedení experimentu získáme výsledek s a realizaci n.v. $X(s)$.

Náhodná veličina

Náhodná proměnná/veličina na pravděpodobnostním prostoru $(\mathcal{S}, P)$ je funkce X zobrazující elementární jevy $s \in \mathcal{S}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, tj. $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.



"Náhodná veličina je *číselná charakteristika* nějakého aspektu experimentu."

- N.v. X přiřazuje číselnou hodnotu $X(s)$ každému možnému výsledku $s \in \mathcal{S}$.
- Samo zobrazení je *deterministické*; náhodnost pochází z výsledků náhodného pokusu (pravděpodobnosti jednotlivých výsledků jsou určeny pravděpodobnostní funkcí P).
- Před provedením experimentu neznáme ani jeho výsledek s, ani hodnotu n.v. $X(s)$. Ale můžeme spočítat pravděpodobnosti, že X nabyde určité hodnoty, nebo že její hodnota bude v určitém intervalu.
- Po provedení experimentu získáme výsledek s a realizaci n.v. $X(s)$.

Náhodné jevy vs hodnoty náhodné proměnné

X je náhodná veličina, tj. $X : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

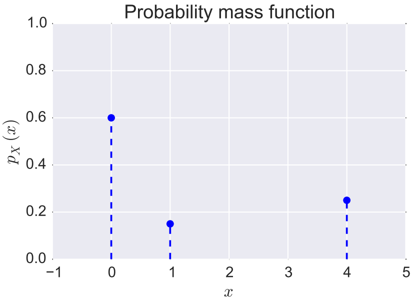
- $X = x$ označuje jev $\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}$, tj. množinu všech výsledků s, pro které $X(s) = x$.
- $X \in \langle a, b)$ označuje jev $\{s \in \mathcal{S} : a \leq X(s) < b\}$, tj. množinu všech výsledků s, pro které $a \leq X(s) < b$.

Diskrétní náhodná veličina

Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

- konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nebo
- nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \ldots$

Podpora (Support) n.v. X:
$\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$



Pravděpodobností funkce diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$

Kumulativní distribuční funkce (CDF) diskrétní n.v. X je funkce F_X definovaná jako

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} p_X(t).$$

Diskrétní náhodná veličina

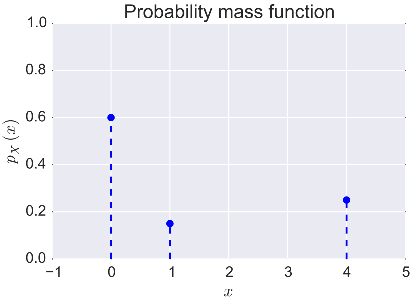
Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

- konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nebo
- nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \ldots$

Podpora (Support) n.v. X:
$\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$

Pravděpodobností funkce diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$



Kumulativní distribuční funkce (CDF) diskrétní n.v. X je funkce F_X definovaná jako

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p_X(t).$$

Diskrétní náhodná veličina

Náhodná veličina X je **diskrétní**, pokud hodnoty $X(s)$ přes všechny $s \in \mathcal{S}$ tvoří buď

- konečnou množinu hodnot $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nebo
- nekonečnou, ale spočetnou množinu $a_1, a_2, \ldots$

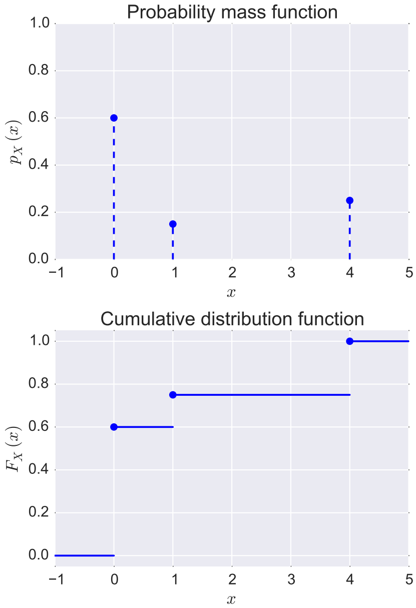
Podpora (Support) n.v. X:
$\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > 0\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$

Pravděpodobností funkce diskrétní n.v. X je funkce p_X definovaná jako

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{s \in \mathcal{S} : X(s) = x\}).$$

Kumulativní distribuční funkce (CDF) diskrétní n.v. X je funkce F_X definovaná jako

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p_X(t).$$



Střední (očekávaná) hodnota n.v.

Před začátkem experimentu, kolik očekávám , že padne hlav?

Střední hodnota diskrétní n.v. X se označuje jako $\mathrm{E}\,X$ a je definována jako

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{t\in\mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t\in\mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

Pro stejně pravděpodobné výsledky $s \in \mathcal{S}$ platí také $\mathrm{E}\,X = \dfrac{1}{|\mathcal{S}|}\displaystyle\sum_{s\in\mathcal{S}} X(s).$

Vlastnosti $\mathrm{E}\,X$:

- $\mathrm{E}\,r = r$, $\mathrm{E}(\mathrm{E}\,X) = \mathrm{E}\,X$
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}\,X + \mathrm{E}\,Y$, $\mathrm{E}(X+r) = \mathrm{E}\,X + r$, $\mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}\,X - \mathrm{E}\,Y$
- $\mathrm{E}(rX+sY) = r\,\mathrm{E}\,X + s\,\mathrm{E}\,Y$
- Pro *nezávislé* n.v.: $\mathrm{E}(X\cdot Y) = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y$.

Střední (očekávaná) hodnota n.v.

Před začátkem experimentu, kolik očekávám, že padne hlav?

Střední hodnota diskrétní n.v. X se označuje jako $\mathrm{E}\,X$ a je definována jako

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

Pro stejně pravděpodobné výsledky $s \in \mathcal{S}$ platí také $\mathrm{E}\,X = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{s \in \mathcal{S}} X(s)$.

Vlastnosti $\mathrm{E}\,X$:

- $\mathrm{E}\,r = r$, $\mathrm{E}(\mathrm{E}\,X) = \mathrm{E}\,X$
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}\,X + \mathrm{E}\,Y$, $\mathrm{E}(X + r) = \mathrm{E}\,X + r$, $\mathrm{E}(X - Y) = \mathrm{E}\,X - \mathrm{E}\,Y$
- $\mathrm{E}(rX + sY) = r\,\mathrm{E}\,X + s\,\mathrm{E}\,Y$
- Pro *nezávislé* n.v.: $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y$.

Střední (očekávaná) hodnota n.v.

Před začátkem experimentu, kolik očekávám , že padne hlav?

Střední hodnota diskrétní n.v. X se označuje jako $\mathrm{E}\,X$ a je definována jako

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

Pro stejně pravděpodobné výsledky $s \in \mathcal{S}$ platí také $\mathrm{E}\,X = \dfrac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{s \in \mathcal{S}} X(s).$

Vlastnosti $\mathrm{E}\,X$:

- $\mathrm{E}\,r = r$, $\mathrm{E}(\mathrm{E}\,X) = \mathrm{E}\,X$
- $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}\,X + \mathrm{E}\,Y$, $\mathrm{E}(X+r) = \mathrm{E}\,X + r$, $\mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}\,X - \mathrm{E}\,Y$
- $\mathrm{E}(rX+sY) = r\,\mathrm{E}\,X + s\,\mathrm{E}\,Y$
- Pro *nezávislé* n.v.: $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y$.

Střední (očekávaná) hodnota n.v.

Před začátkem experimentu, kolik očekávám , že padne hlav?

Střední hodnota diskrétní n.v. X se označuje jako $\mathrm{E}\,X$ a je definována jako

$$\mathrm{E}\,X = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot p_X(t) = \sum_{t \in \mathcal{S}_X} t \cdot p_X(t).$$

Pro stejně pravděpodobné výsledky $s \in \mathcal{S}$ platí také $\mathrm{E}\,X = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \sum_{s \in \mathcal{S}} X(s)$.

Vlastnosti $\mathrm{E}\,X$:

- $\mathrm{E}\,r = r$, $\mathrm{E}(\mathrm{E}\,X) = \mathrm{E}\,X$
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}\,X + \mathrm{E}\,Y$, $\mathrm{E}(X + r) = \mathrm{E}\,X + r$, $\mathrm{E}(X - Y) = \mathrm{E}\,X - \mathrm{E}\,Y$
- $\mathrm{E}(rX + sY) = r\,\mathrm{E}\,X + s\,\mathrm{E}\,Y$
- Pro *nezávislé* n.v.: $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}\,X \cdot \mathrm{E}\,Y$.

Někdy nejsou elemenární jevy stejně pravděpodobné . . .

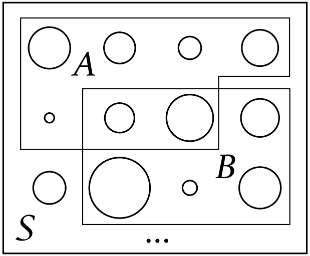

[1]

$$\mathcal{S} = \{\text{A,B,C,D,} \cdots \text{,Z}\}$$

[1] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Scrabble_game_in_progress.jpg

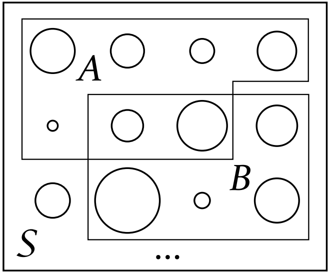
Axiomatická definice pravděpodobnosti (Kolmogorov)

- Množina elementárních jevů $\mathcal{S}$ může být i nekonečná.
- Elementární jevy nemusejí být stejně pravděpodobné.
- „Axiomatická“:
  1. sestav omezení, která musí pravděpdobnostní funkce dodržet
  2. najdi funkci, která jim vyhovuje



Definice pravděpodobnosti

- **Pravděpodobnostní funkce** P přiřazuje reálné číslo mezi 0 a 1 každému jevu $A \subseteq \mathcal{S}$.
- P musí vyhovovat následujícím axiomům:



1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\mathcal{S}) = 1$
2. Pro jakékoli vzájemně se vylučující jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(n může být nekonečné)

Literatura, další zdroje

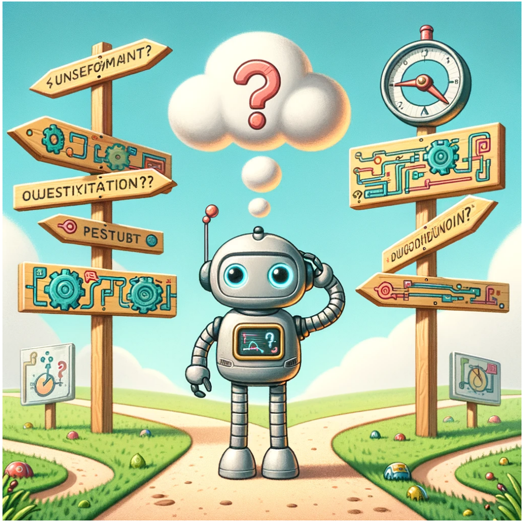
Klasické české čtení [2], na domácí stránce https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/ mnoho dalších zajímavých studijních materiálů.

[1] Joseph K. Blitzstein and Jessica Hwang.
Introduction to Probability.
CRC Press, 2nd edition, 2019.
http://probabilitybook.net/.

[2] Mirko Navara.
Pravděpodobnost a matematická statistika.
ČVUT v Praze, Praha, 2007.
https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/.

[3] N. Silver.
Signál a šum.
Paseka, 2014.

Zbytek prezentace použijte dle potřeby . . .



Jevy a jejich kombinace

Důležité jevy:

- **Jistý jev** : $\mathcal{S}$, 1
- **Nemožný jev** : $\emptyset$, 0

Kombinace jevů:

- Konjunkce $(A$ a $B)$: $A \cap B$
- Disjunkce $(A$ nebo $B)$: $A \cup B$
- Jev opačný k A: $A^c = \mathcal{S} \setminus A$
- $A \Rightarrow B$: $A \subseteq B$
- Jevy neslučitelné : $A_1, \ldots, A_n$: $\bigcap\limits_{i \leq n} A_i = \emptyset$
- Jevy po dvou neslučitelné = vzájemně se vylučující : $A_1, \ldots, A_n : \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

Jevy a jejich kombinace

Důležité jevy:

- Jistý jev : $\mathcal{S}$, 1
- Nemožný jev : $\emptyset$, 0

Kombinace jevů:

- Konjunkce (A a B): $A \cap B$
- Disjunkce (A nebo B): $A \cup B$
- Jev opačný k A: $A^c = \mathcal{S} \setminus A$
- $A \Rightarrow B$: $A \subseteq B$
- Jevy neslučitelné : $A_1, \ldots, A_n : \bigcap_{i \leq n} A_i = \emptyset$
- Jevy po dvou neslučitelné = vzájemně se vylučující :
  $A_1, \ldots, A_n : \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$

Úplný systém jevů

Úplný systém jevů je každá množina jevů $B_1, \ldots, B_n$, které se vzájemně vylučují a současně $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \mathcal{S}$.

- Množina elemenárních jevů $\mathcal{S}$ je z definice úplný systém jevů.
- Jevy $\{C, C^c\}$ tvoří úplný systém jevů: $C \cap C^c = \emptyset$ and $C \cup C^c = \mathcal{S}$.

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Úplný systém jevů

Úplný systém jevů je každá množina jevů $B_1, \ldots, B_n$, které se vzájemně vylučují a současně $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \mathcal{S}$.

- Množina elemenárních jevů $\mathcal{S}$ je z definice úplný systém jevů.
- Jevy $\{C, C^c\}$ tvoří úplný systém jevů: $C \cap C^c = \emptyset$ and $C \cup C^c = \mathcal{S}$.

Proč je úplný systém jevů důležitý koncept?

Interpretace pravděpodobnosti

Frekventistická :

- Relativní četnost jevu po mnoha opakováních náhodného pokusu.

Bayesovská :

- Stupeň důvěry v to, že jev nastane.
- Umožňuje nám přiřadit pravděpodobnosti k výrokům typu "kandidát A vyhraje volby" nebo "podezřelý X je vinen", ačkoli nemůžeme opakovat stejné volby nebo stejný zločin stále dokola.

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce

Pro jakoukoli platnou pravděpodobnostní funkci musí platit:

- $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$ (z definice)
- $P(\emptyset) = 0$; $P(\mathcal{S}) = 1$ (axiomy)
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Pokud $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$
- Pokud $A \subseteq B$, pak $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
- Pokud $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (*aditivita*)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Příklad 3: Pravděpodobnost částí

Vybereme-li z populace náhodně jednoho člověka, pak pro něj platí:

- Trpí nemocí X a je mladší 18 let s pravděpodobností 0.01.
- Trpí nemocí X a je mu/jí mezi 18 a 65 lety s pravděpodobností 0.05.
- Trpí nemocí X a je starší 65 let s pravděpodobností 0.09.

Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk má nemoc X?

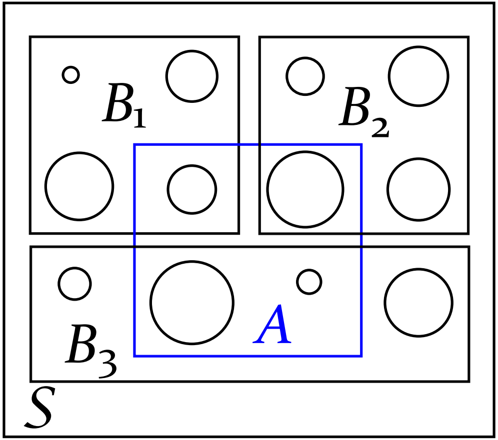
Vlastnostni pravděpodobnostní funkce (pokr.)

Pokud je $\{B_1, \ldots, B_n\}$ úplný systém jevů, pak pro jakýkoli jev $A \subseteq \mathcal{S}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \; .$$

Konkrétně, pro úplný systém jevů $\{C, C^c\}$

$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap C^c) \, .$$



Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Nezávislé jevy

Vzpomínáte na čerpadla u elektrárny? Chtěli bychom, aby byla nezávislá!

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Jsou-li A a B nezávislé, pak

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$,
- a páry A, B^c a A^c, B a A^c, B^c jsou také nezávislé.

Nezávislost jevů: hod dvěma mincemi

- A - na první minci padla hlava
- B - na druhé minci padla hlava
- C - na mincích padly různé symboly

Které skupiny jevů jsou nezávislé?

A žádná skupina jevů

B dvojice (A, B), (B, C), (A, C)

C dvojice (A, B), (B, C), (A, C) i trojice (A, B, C)

D pouze trojice (A, B, C)

Nezávislost jevů: hod dvěma mincemi

- A - na první minci padla hlava
- B - na druhé minci padla hlava
- C - na mincích padly různé symboly

Které skupiny jevů jsou nezávislé?

A žádná skupina jevů

B dvojice (A, B), (B, C), (A, C)

C dvojice (A, B), (B, C), (A, C) i trojice (A, B, C)

D pouze trojice (A, B, C)

Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti

- $P(\mathcal{S}|B) = 1$, $P(\emptyset|B) = 0$.
- $P(A|A) = 1$, $P(A^c|A) = 0$.
- Pokud $B \subseteq A$, pak $P(A|B) = 1$.
- Pokud $P(A \cap B) = 0$, pak $P(A|B) = 0$.
- Pokud $A_1, \ldots, A_n$ jsou vzájemně se vylučující jevy, pak $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$.
- Jevy A, B jsou nezávislé právě tehdy, když $P(A|B) = P(A)$ (pokud je $P(A|B)$ definována).

Věta o úplné pravděpodobnosti

Nechť $B_1, \dots, B_n$ je úplný systém jevů vzhledem k $\mathcal{S}$ (tj., B_i jsou vzájemně neslučitelné a jejich sjednocením je $\mathcal{S}$) s $P(B_i) > 0$ pro všechna i.
Pak

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$