REALIZACE ČÍSLICOVÝCH OBVODŮ

Realizace logických a číslicových obvodů závisí:

- ♣ **Složitosti**
- ♣ **Rychlosti odezvy**
- ♣ **Spotřebě**
- ♣ **Ceně**

- ➢ **Klasické obvody z řady 74xxx** – maximálně 4 ÷ 6 IO
- ➢ **Programovatelné obvody s popisem logické funkce**
  - ❖ ***Schématem***
  - ❖ ***RTL*** - obdoba realizace klasickými logickými obvody
  - ❖ ***Jazyky HDL***
    - Behaviorální zápis (popis chování LKO a LSO)
    - Strukturální zápis (LO je rozdělen na funk. části)
- ➢ **Procesorem a mikroprogramovatelným řadičem**
  - ❖ ***Mikroprogramování*** – μP řadiče, nyní řadiče PC.
  - ❖ ***Assembler*** (Strojový kód) – realizace instrukcemi μP. Nyní – ovladače, knihovny jazyků, dílčí program s jasnou kontrolou zpoždění
  - ❖ ***Jazykem C*** – popis složitějších aplikací operacemi, které programovací jazyk poskytuje.

Číselné základy

OBVYKLÉ ČÍSELNÉ ZÁKLADY

V číslicových systémech standardně používáme tři číselné základy:

- **Základ 2** – se symboly 0 a 1 (někdy 0 a I)
  - Realizace operací v počítačích, µP i PLD.

- **Základ 10** – se symboly 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
  - Běžně používaná soustava – zadávání hodnot do výpočetních systémů a k zobrazování vypočtené informace.

- **Základ 16** – se symboly 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
  - Používá se nejčastěji k vyjádření (bitových) hodnot v programech, k výpisu obsahu programových a datových pamětí.

Běžně nepoužívané soustavy

- Základ 8 – se symboly 0,1,2,3,4,5,6,7
  - Lze použít k zadávání čísel v asemblerovských programech.
- Základ 7 – Modifikovaný Bootův algoritmus násobení radix 32
- Základ 11 – Modifikovaný Bootův algoritmus násobení radix 256

PRINCIPY ZMĚNY ZÁKLADU

1. Metoda postupného odečítání mocnin základu

Koeficienty čísla získáváme od nejvyšší mocniny po nejmenší. Jednoduchá a často používaná.

Nevýhoda – doba převodu závisí na hodnotě převáděného čísla.

2. Metoda postupného dělení základem

Dělíme-li číslo N_M základem B, získáme celou část podílu a zbytek. Zbytek je roven koeficientu a_0. Dalším dělením celé části získáváme další koeficienty v pořadí od nejmenšího a_0 k největšímu a_k. **Nevýhodná** pro procesory bez dělení (podmíněné odečítání) nebo z krátkou délkou slov realizující dělení.

3. Metoda postupného násobení základem

Pro převod čísla $N_M<1$ do základu B budeme číslo N_M násobit základem B. Celá část = koeficient a_{-1}. Dalším násobení zbytkové části hodnotou B získáváme další koeficienty a_{-k}. **Rychlý** na procesorech s integrovanou násobičkou.

BINÁRNĚ-DEKADICKÝ PŘEVOD ČÍSLA

- **Zadávání čísel do mikropočítače**.
  - Násobení hodnotou 10
  - Není-li násobička 10=(2^3+2^1).
  - Knihovní funkce atoi(), atol(), atof(), atold(), _atoi64() nebo strtol() nebo strtod().

- **Převod binární hodnoty pro zobrazení** na displeji (celá část).
  - Metoda postupného odečítání mocnin základu
  - Metoda postupného dělení základem
  - Metoda s využitím dekadické korekce – je-li k dispozici.
  - Metoda s využitím dekadické předkorekce.
  - Převod binární hodnoty pro zobrazení na displeji sprintf().

- **Převod binární hodnoty pro zobrazení** (desetinná část).
  - Metoda násobení hodnotou 10
  - Knihovní funkce sprintf() – rozsáhlý program závislý na architektuře a možnostech procesoru.

ZOBRAZENÍ DVOJKOVÉ INFORMACE

Převod binárního čísla N_2 do hexadecimálního vyjádření.

$$N_2 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \cdots + a_5.2^5 + a_4.2^4 + a_3.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0$$

$$N_2 = 16.\left[a_n.2^{n-4} + a_{n-1}.2^{n-5} + \cdots + a_5.2^1 + a_4.2^0\right] + a_3.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0$$

$$= 16.Q_1 + R_1$$

R_1 představuje nejnižší koeficient hexadecimálního čísla vyjádřený váhovanou čtveřicí (8421) nejnižších 4 bitů binárního čísla.

$$R_1 = a_3.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0$$

Opakovaným dělením získáme následující symboly hexadecimálního čísla.

$$R_2 = a_7.2^3 + a_6.2^2 + a_5.2^1 + a_4.2^0$$

Dvojkové číslo rozdělíme od desetinné tečky na čtveřice bitů, které vyjádříme hexadecimálním symbolem. Například takto:

$$101110010101{,}0011_2 = 1011 \mid 1001 \mid 0101, \mid 0011 = B95{,}3_{16}$$

Při převodu do osmičkové soustavy rozdělujeme číslo po trojicích bitů.

Hexadecimální vyjádření v jazyce C – vidím stav jednotlivých **bitů.**

VYJÁDŘENÍ ČÍSEL - KÓDY

Mám binární číslo 10010111 – O jaké číslo se jedná?

VÁHOVANÉ KÓDY - každý bit má přiřazenu určitou váhu w_j. Součet vah jednotlivých bitů b_j (4bity) se rovná dekadickému číslu.

$$N=b_3.w_3+b_2.w_2+b_1.w_1+b_0.w_0$$

Váhy w_j mohou být kladná i záporná čísla a díky tomu mohou být některé kódy nejednoznačné např. (6 4 2 -3) nebo (2 4 2 1).

KOMPLEMENTÁRNÍ KÓDY (self-complementing) usnadňují implementaci aritmetických operací. Součet jejich vah je roven 9. Díky tomu je 9-kový komplement čísla N (9-N) reprezentován jednotkovým doplňkem čísla N. Nejznámější např. Aikenův kód (2,4,2,1).

DEKADICKÉ KÓDY – dvojkový formát používaný pro vyjádření symbolů 0,1,…8,9. Často používaný pro binárně-dekadický převod při zobrazování na segmentových a bodových LED zobrazovačích.

DEKADICKÉ KÓDY

Nejčastěji používaným dekadickým kódem je kód **BCD (8,4,2,1).**

V procesorové technice se často setkáváme s

- **komprimovaným BCD kódem** - dvě BCD cifry v jednom 8 bitovém slově.
- **ASCII kódem –** používaný při komunikačních přenosech

Symbol	BCD (8421)	(7421)	(8221)	(84-2-1)	BCD + 3
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 1
1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 1 1	0 1 0 0
2	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 1 1 0	0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 1 0
4	0 1 0 0	0 1 0 0	1 0 0 0	0 1 0 0	0 1 1 1
5	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 1 1	1 0 1 1	1 0 0 0
6	0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 0 0	1 0 1 0	1 0 0 1
7	0 1 1 1	1 0 0 0	1 1 0 1	1 0 0 1	1 0 1 0
8	1 0 0 0	1 0 0 1	1 1 1 0	1 0 0 0	1 0 1 1
9	1 0 0 1	1 0 1 0	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 0 0

NEVÁHOVANÉ BINÁRNÍ KÓDY

NEVÁHOVANÉ KÓDY – jednotlivé bity nemají přiřazenu konkrétní váhu, která by umožňovala výpočet hodnoty čísla. Nejsou předurčeny pro výpočetní operace, ale disponují jinými vlastnostmi, které potřebujeme při přenosu signálů a jeho změn.

Přechod mezi dvěma **sousedními stavy** dvojkové informace generuje nežádoucí stavy způsobené různou dobou změny 0 → 1 a 1 → 0).

Problém - snímání, rychlé D/A převodníky, atd. Například

001→000→010 nebo 001→011→010

1000→0000→0111 , 1000→1111→0111

Grayův kód (zrcadlový) – sousední stavy se liší v jednom bitu

- Karnaughova mapa – grafická algebraická minimalizace
- Mechanické snímání s maximální chybou jednoho LSB
- Rychlé A/D a D/A převodníky
- Natočení hřídele

Gray+3 stejná vlastnost pro 10 stavů.

NEVÁHOVANÉ BINÁRNÍ KÓDY

Teploměrový kód se využívá k odstranění nebo potlačení problémů se změnou binární (váhované) informace. Hodnota kódu je vyjádřena počtem log.1 ve sloupci a ukončena řadou log.0. Např. 0001111111=7.

Telegrafní kódy – vytvořeny pro sériovou komunikaci. Informace doplněna **start bitem** (log.0) a na konci **stop bitem** (log.1). Dnes se používá telegrafní kód číslo 5 (**ASCII**). Přenáší se 8 nebo 9 bitů se start bitem a 1, 1.5, 2 stop bity. Při multiprocesorové komunikaci slouží nejvyšší bit k identifikaci **data/adresa** nebo zabezpečuje informaci **paritou**.

Kódy s částečným zabezpečením

- Telegrafní kódy 2 z 5 nebo 2 ze 7
- **Johansonův kód** – spojením vlastností Grayova kódu a částečného zabezpečení. Významný pro realizace velmi rychlých čítačů.
- Hammingovy kódy, Konvoluční kódy, Cyklické kódy

OPERACE S DEKADICKÝMI ČÍSLY

I když výkony μP stále vzrůstají, zůstává otázkou zda jednoduché operace s dekadickými čísly realizovat

BCD → binární → požadované operace → binární → BCD

Pro usnadnění jednoduchých operací s dekadickými čísly (součet, rozdíl, snadný součin) vznikly:

- Kódy (excess-3, Aikenův kód, BCD+3)
- Operace (instrukce – dekadické korekce)

Problém operace s dekadickými čísly spočívá:

- Procesory pracují s dvojkovou soustavou
- Čísla vyjádřená 4 bity = soustava hexadecimální, přenos při dosažení čísla 16 – dochází k přenosu do dalšího řádu.
- Desítková soustava, přenos při dosažení čísla 10.
- Rozdíl mezi soustavami je číslo 6

SČÍTÁNÍ DEKADICKÝCH ČÍSEL V KÓDU EXCEESS-3

Dříve používaný kód exceess-3 (BCD+3). Při součtu mohou nastat tyto možnosti, aby výsledek byl zase v kódu exceess-3.

$$(A+3) + (B+3) = V+6$$

pro V+6 $\in$<6;15>, pak od výsledku odečteme číslo 3 (jedna 3 přebývá)

pro V+6 $\in$<16;24>$_{mod16}$, pak k výsledku přičteme číslo 3 (obě 3 jsou spotřebované na korekci mezi soustavou 16 a 10)

```
  535          1000  0110  1000
  637          1001  0110  1010
------přenos---1------0-------1----------
 1172   0001  0001  1101  0010
          +11   +11   -11   +11
-----------------------------------------
        0100  0100  1010  0101
          1     1     7     2
```

```
  135          0100  0110  1000
  194          0100  1100  0111
-----přenos---0-------1-------0---------
  329   0000  1001  0010  1111
          +11   -11   +11   -11
-----------------------------------------
        0011  0110  0101  1100
          0     3     2     9
```

SČÍTÁNÍ DEKADICKÝCH ČÍSEL V KOMPRIMOVANÉM BCD KÓDU

DEKADICKÁ KOREKCE - ihned po součtu (8051) nebo i rozdílu (Zilog, PC) dvou BCD čísel koriguje součet přičtením hodnoty 6 ke čtveřici (spodních/horních) bitů, které představují číslo >9 nebo došlo k přenosu do dalšího řádu (mezi bity 4 a 5 bitem (částečný přenos) nebo 8 a 9 (přenos).

	0	1	1	0	0	1	0	1	= 65
	0	0	0	1	0	0	1	1	= 13
	0	1	1	1	1	0	0	0	= 78
			7				8		

	0	1	1	0	0	1	0	1	= 65
	0	0	0	1	0	1	1	1	= 17
	0	1	1	1	1	1	0	0	= 7C výsledek není BCD
Korekce mezi 10 a 16 soustavou	0	0	0	0	0	1	1	0	
	1	0	0	0	0	0	1	0	= 82
			8				2		

AC=1

	0	1	1	0	1	0	0	1	= 69
	0	0	0	1	1	0	0	0	= 18
	1	0	0	0	0	0	0	1	= 81 výsledek je BCD ale špatný
Korekce mezi 10 a 16 soustavou	0	0	0	0	0	1	1	0	
	1	0	0	0	0	1	1	1	= 87
			8				7		

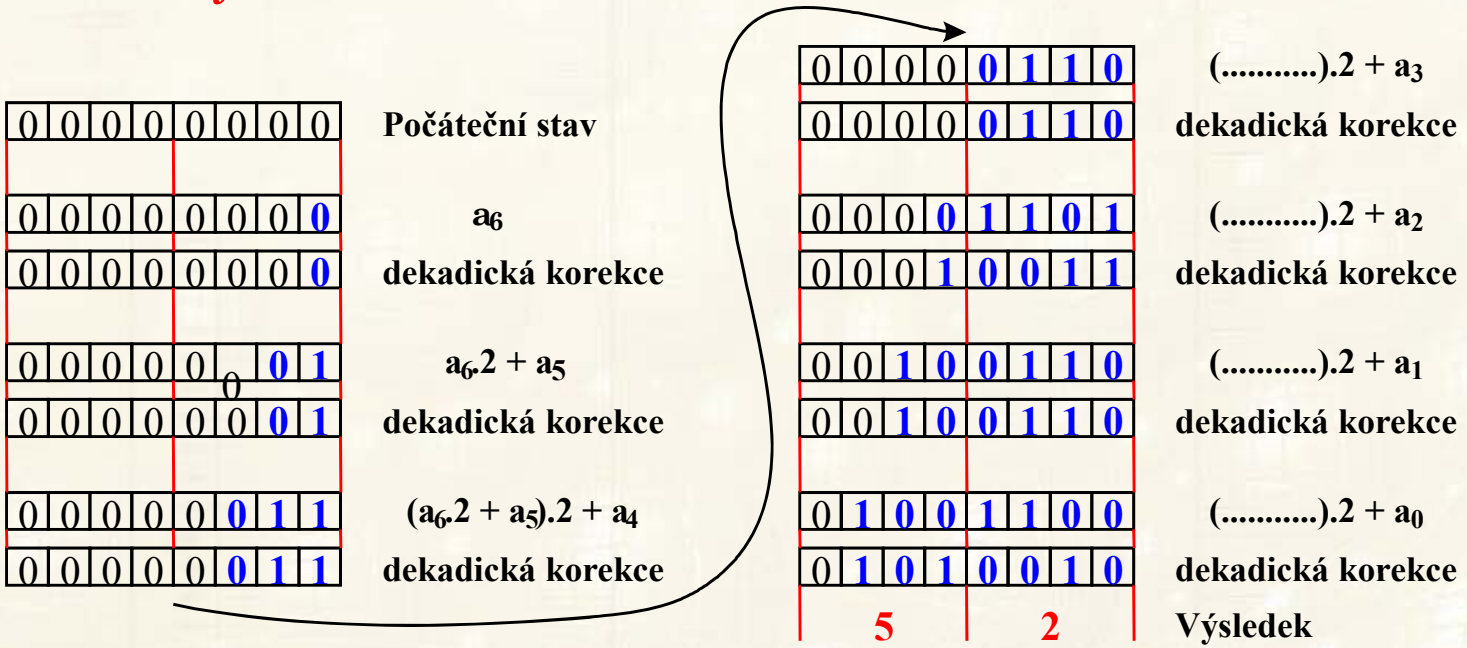
PŘEVOD BINÁRNÍ HODNOTY DO BCD KÓDU

U μP s malou pamětí může být použití funkce sprintf problematické. Binární číslo s pevnou desetinnou čárkou rozdělíme na celou a desetinnou část. Celou část vyjádříme Hornerovým schématem

$$N = ((a_n.2 + a_{n-1}).2 + a_{n-2}).2 + ... + a_0$$

Závorky představují součet dvou stejných čísel (.2) s hodnotou 0 nebo 1 ($a_{n-i} \in <0,1>$). Bude-li mezivýsledek v BCD kódu můžeme součet korigovat dekadickou korekcí.

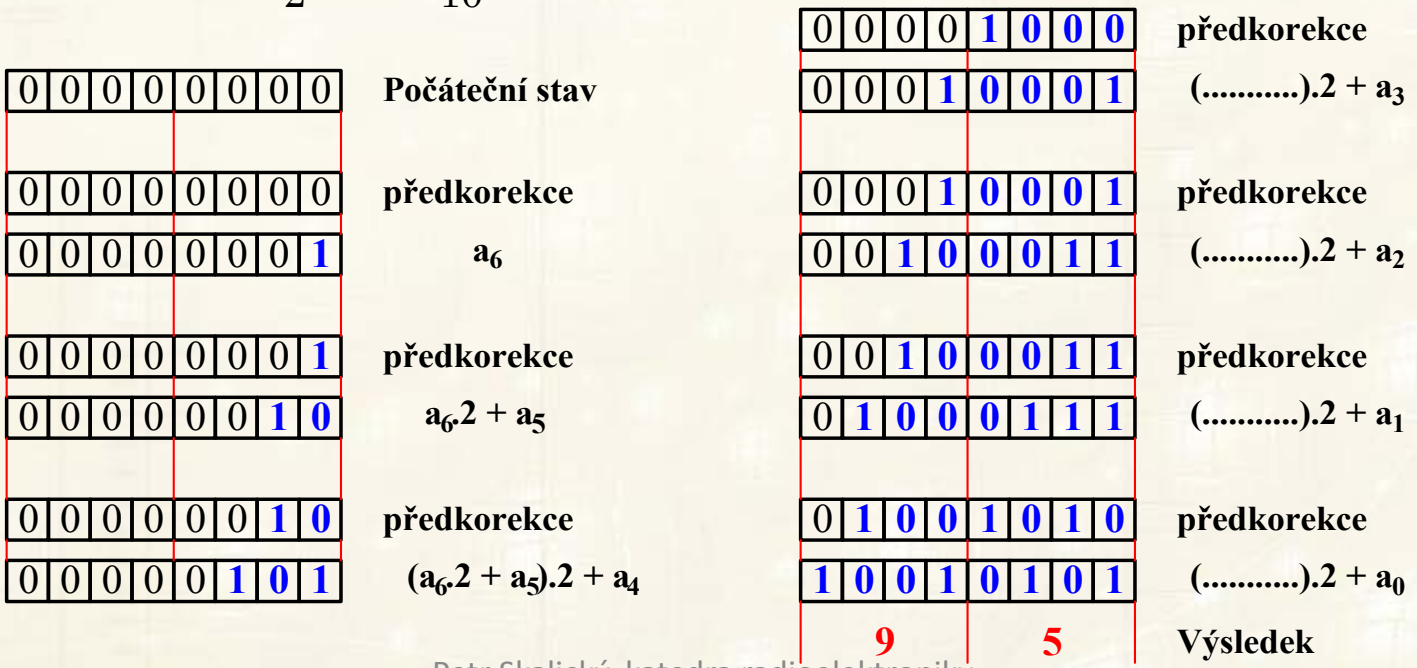
Doba převodu je nezávislá na velikosti čísla. Příklad $0110100_2 \rightarrow N_{10}$.



PŘEVOD BINÁRNĚ DEKADICKÝ BEZ DEKADICKÉ KOREKCE

Jsou procesory (AVR, PIC, ARM), které nemají instrukci dekadické korekce. Má-li procesor

- Příznak částečného přenosu můžeme implementovat dekadickou korekci programově.
- V opačném případě realizujeme předstih dekadické korekce. Před dvojnásobkem mezivýsledku a přičtením dalšího bitu testujeme spodní i horní 4 bity. Budou-li 4 bity <0÷4> korekce není třeba. K číslu <5÷9> realizujeme předstih korekce přičtením hodnoty 3. Příklad $1011111_2 = 95_{10}$.



VYJÁDŘENÍ ZÁPORNÝCH ČÍSEL V PEVNÉ DESETINNÉ ČÁRCE

Čísla se znaménkem mají počet bitů rezervovaný na rozsah čísla zvětšený o jeden bit, který ponese informaci o znaménku.

- **± absolutní hodnota** – Nejvyšší bit = znaménko (0 = +, 1 = -). Zbývající bity určují absolutní hodnotu.
  Rozsah kladných i záporných čísel pro n bitů je $<0, 2^{n-1}-1>$.
  Ve vyjádření existují dvě nuly, použití záporné nuly 10000...00 se většinou zakazuje.
  Vyjádření je pro obvodovou implementaci nevhodné, při procesorovém zpracování nevadí.

- **Vyjádření záporného čísla jednotkovým doplňkem** – získáme inverzí všech jeho bitů.

$$^{1}A = 2^{n} - 1 - A = 2^{n} - 1 - \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^{i}$$

  Rozsah čísla pro n bitů se shoduje s vyjádřením ± absolutní hodnota. Existují dvě nuly kladná (000..0), záporná (111..1). Použití v rychlých sčítačkách a násobičkách.

VYJÁDŘENÍ ZÁPORNÝCH ČÍSEL V PEVNÉ DESETINNÉ ČÁRCE

- **Vyjádření záporného čísla dvojkovým doplňkem** – vypočteme z následujícího vztahu

$$^{2}A = 2^{n} - A = 1 + {}^{1}A = 2^{n} - \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

Dvojkový doplněk = jednotkový doplněk plus 1 k nejnižšímu řádu (pro celá i desetinná). Rozsah kladných čísel <0, 2^{n-1}-1>, záporných <-1, -2^{n-1}>. Nejvyšší bit = znaménko (0 = +, 1 = -). Existuje již jen jedna nula (000 .. 0).

- **+1/2 intervalu (s posunem)** – Číslo v tomto formátu vypočteme ze vztahu

$$^{1/2}A = 2^{n-1} + A = 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

kde n je počet bitů čísla. Kladná čísla leží v intervalu < 0, 2^{n-1}-1>, záporná čísla <-1, -2^{n-1}>. Bit s nejvyšší váhou opět značí znaménko s tím, že 0 = -, 1 = +. Stejně jako v případě dvojkového doplňku má vyjádření jen jednu nulu (100 .. 0).

VYJÁDŘENÍ ZÁPORNÝCH ČÍSEL

Číslo	bin.hodnota	±|A|	^{1}A	^{2}A	$^{1/2}A$
+10	+1010	01010	01010	01010	11010
+0	+0000	00000	00000	00000	10000
-0	-0000	10000	11111	-------	-------
-2	-0010	10010	11101	11110	01110
-14	-1110	11110	10001	10010	00010
-3,5	-0011,10	10011,10	11100,01	11100,10	01100,10
-0,5	-0000,10	10000,10	11111,01	11111,10	01111,10
-16	nelze vyjádřit	nelze vyjádřit	nelze vyjádřit	10000	00000

Vytváření doplňků

- **Jednotkový** – inverze všech bitů
- **Dvojkový** – inverze všech bitů plus 1 k nejnižšímu řádu.
  - **Sériový převod** spočívá v kopírování bitů od nejnižšího bitu po bit nejvyšší včetně první jedničky. Po první jedničce jsou všechny bity **invertovány**.

ODEČÍTÁNÍ S DVOJKOVÝM DOPLŇKEM

Rozdíl čísel A-B za pomoci dvojkového doplňku čísla B realizujeme pomocí součtu $A+{}^2B$. Tím získáváme požadovaný rozdíl A-B zvětšený o hodnotu 2^n. Pro jednotlivé případy můžeme psát

pro A>B

$$A+{}^2B > 2^n$$

$$A-B = A+{}^2B-2^n$$

pro A<B

$$A+{}^2B \le 2^n$$

$$A-B = 2^n + A-B = 2^n - R = {}^2R$$

K dosažení správné hodnoty rozdílu A-B potřebujeme odečíst (oříznout) hodnotu 2^n.

A_{10}= 21 A= 0 1 0 1 0 1
B_{10}= 13 ^{2}B=1 1 0 0 1 1

A	0 1 0 1 0 1
^{2}B	1 1 0 0 1 1
	1 0 0 1 0 0 0

Výsledek kladný

Je-li rozdíl záporný, pak získáme přímo jeho dvojkový doplněk.

A_{10}= 21 ^{2}A= 1 0 1 0 1 1
B_{10}= 13 B=0 0 1 1 0 1

^{2}A	1 0 1 0 1 1
B	0 0 1 1 0 1
	1 1 1 0 0 0

Výsledek záporný

OBVODOVÁ REALIZACE OPERACE SČÍTÁNÍ A ODEČÍTÁNÍ

Při sčítání a odečítání nastávají tyto limitní případy:

- Součtem dvou kladných čísel bez znaménka dochází k přenosu za nejvyšší bit = indikováno **příznakem přenosu C**
- Součtem dvou kladných čísel se znaménkem získáme číslo záporné. Indikováno **příznakem přetečení OV**
- Součtem dvou záporných čísel získáme číslo kladné. Indikováno **příznakem přetečení OV**

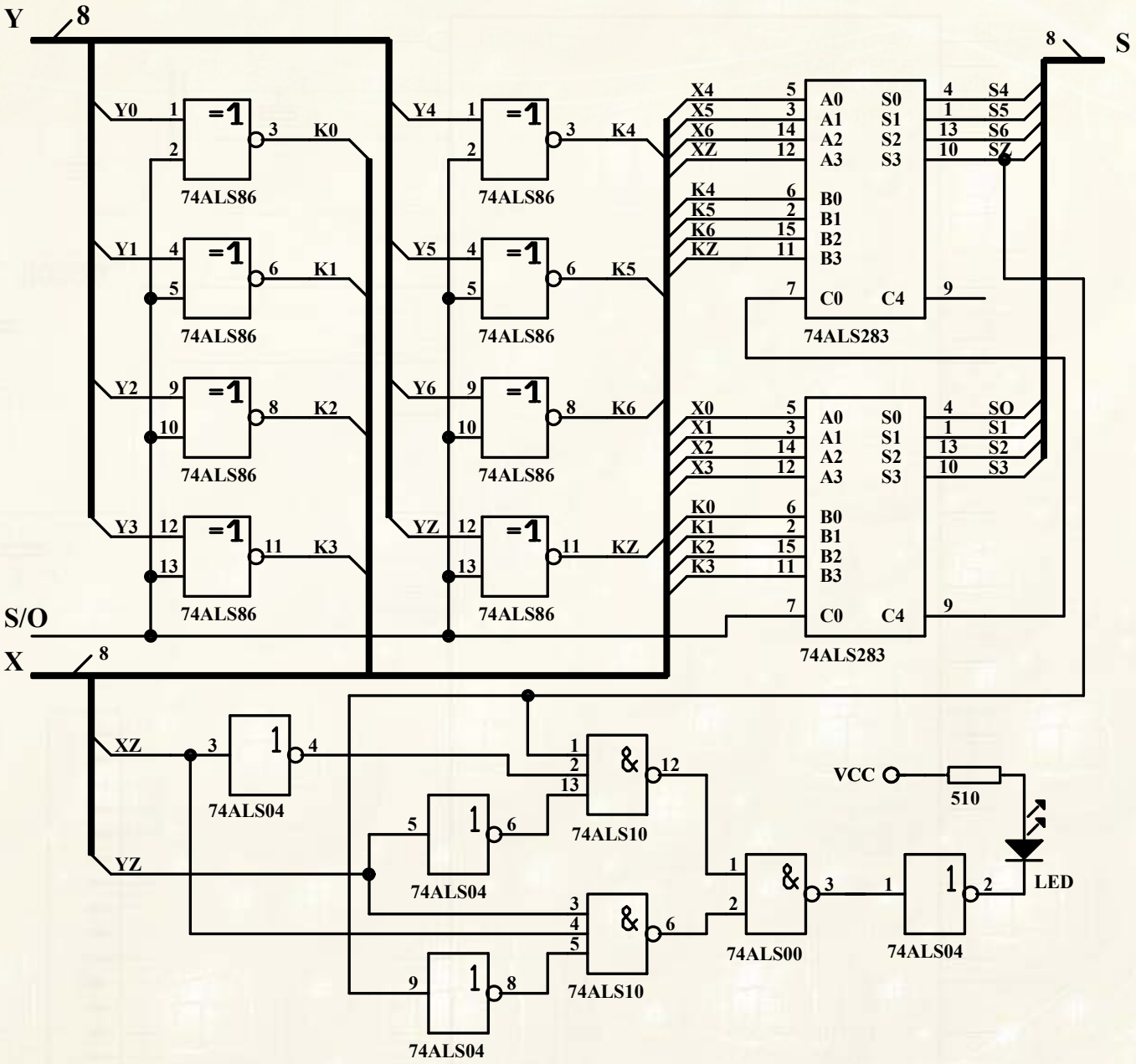
Příznak přetečení identifikuje obvod, který kontroluje znaménka čísel a výsledku.

$$OV = \bar{z}_x.\bar{z}_y.z_s + z_x.z_y.\bar{z}_s$$

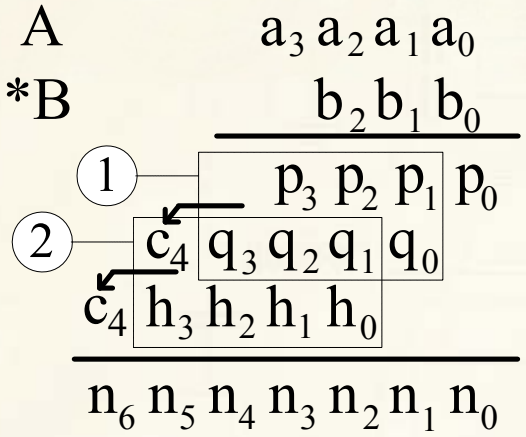
kde z_x, z_y a z_s představují znaménka X,Y a součtu (nebo rozdílu).

Při odečítání vytvoříme jednotkový doplněk obvody EX-OR (neekvivalence) nebo EX-NOR (ekvivalence) podle polarity signálu S/O. **Dvojkový doplněk** vytvoříme při sčítání ve **sčítačce** zavedením **nenulového počátečního přenosu** pro operaci odčítání viz. následující blána.

REALIZACE 8-BITOVÉ SČÍTAČKY A ODEČÍTAČKY S INDIKACÍ PŘETEČENÍ



OBVODOVÁ REALIZACE OPERACE NÁSOBENÍ



Aritmetický součin bitů shodný s operací AND.

Součet dílčích součinů

- Ve sčítačkách s kaskádním přenosem
- Jedno nebo více stupňovým zrychleným kanálem přenosu

Doba k vytvoření součinu

- Zřetězený $t_{součinu} = (n-1).t_{\Sigma}$ n-počet bitů
- Stromový $t_{součinu} = (\log(n)/\log(2)).t_{\Sigma}$
- Walesova stromová sčítačka (kompresory)

Další zkrácení doby výpočtu ⇒ redukce počtu dílčích součinů

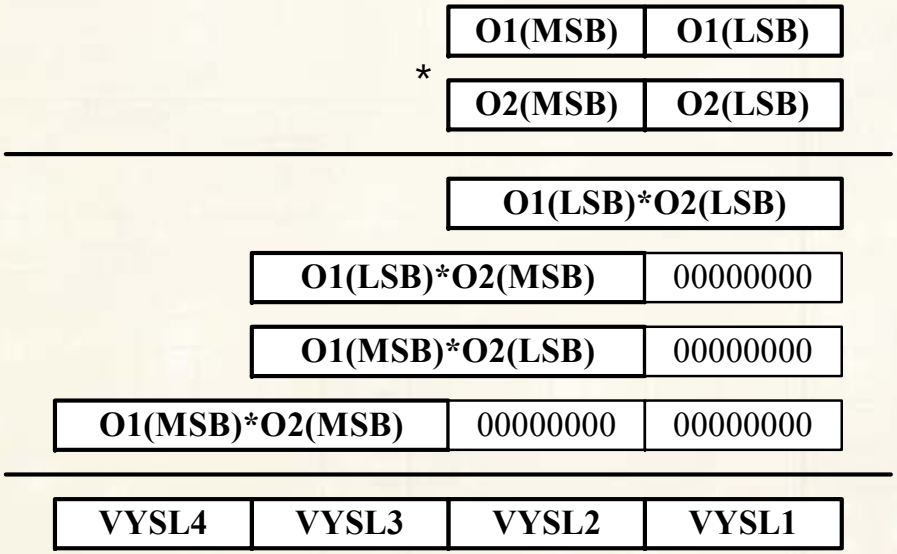
- Booth algoritmus
- Modifikovaný Booth algoritmus (radix4, 8, 32, 256)

V Booth nebo modifikovaném algoritmu násobíme dvěma nebo více bity najednou. Dochází tak ke snížení sčítaných dílčích součinů na polovinu, třetinu atd.

PROCESOROVÁ REALIZACE OPERACE NÁSOBENÍ

Programové řešení může být

- Sériové na μP bez násobičky.
- Procesor má násobičku s rozsahem bitů potřebným pro operandy.
- Program využívá násobičku μP, která má nedostatečný počet bitů (aplikace dávného řešení s pamětmi ROM). Příklad součinu 16x16bitů na μP s násobičkou 8x8bitů.



Má-li v jazyce C výsledek násobení stejný počet bitů jako operandy, přináší to výhody i úskalí.

unsigned int x , y; (int=16bitů).

x=1000; y=100; z=x*y;

Kolik bude z=?

Poslední součin v knihovně jazyka C není ⇒ při práci s aritmetikou s pevnou desetinnou tečkou je žádoucí **testovat velikost operandů**.

NÁSOBENÍ ČÍSEL SE ZNAMÉNKEM VE DVOJKOVÉM DOPLŇKU

$$\tilde{X} = (-1).\tilde{x}_z + \sum_{i=1}^{b} \tilde{x}_{-i}.2^{-i} \qquad \tilde{Y} = (-1).\tilde{y}_z + \sum_{j=1}^{b} \tilde{y}_{-j}.2^{-j}$$

$$\tilde{X}.\tilde{Y} = \left[(-1).\tilde{x}_z + \sum_{i=1}^{b} \tilde{x}_{-i}.2^{-i}\right].\left[(-1).\tilde{y}_z + \sum_{j=1}^{b} \tilde{y}_{-j}.2^{-j}\right] =$$

$$= (-1).\tilde{x}_z.\left[(-1).\tilde{y}_z + \sum_{j=1}^{b} \tilde{y}_{-j}.2^{-j}\right] + \sum_{i=1}^{b} \tilde{x}_{-i}.\left[(-1).\tilde{y}_z + \sum_{j=1}^{b} \tilde{y}_{-j}.2^{-j}\right].2^{-i}$$

A	1,0 0 1 1	= - 13
B	0,1 0 0 1	= 9
	1,1 1 1 1 0 0 1 1	
	0,0 0 0 0 0 0 0 0	
	0,0 0 0 0 0 0	
	1,1 0 0 1 1	
	1,1 0 0 0 1 0 1 1	= -117

A	0,1 1 0 1	= 13
B	1,0 1 1 1	= - 9
	0,0 0 0 0 1 1 0 1	
	0,0 0 0 1 1 0 1	
	0,0 0 1 1 0 1	
	0,0 0 0 0 0	
	0 0,0 0 1 0 1 1 0 1 1	
	- 0,1 1 0 1	
	1 1,1 0 0 0 1 0 1 1	= -117

A	1,0 0 1 1	= - 13
B	1,0 1 1 1	= - 9
	1,1 1 1 1 0 0 1 1	
	1,1 1 1 0 0 1 1	
	1,1 1 0 0 1 1	
	0,0 0 0 0 0	
	1 0,1 1 0 1 0 0 1 0 1	
	- 1,0 0 1 1	
	1 0,0 1 1 1 0 1 0 1	= 117

Algoritmus je vhodný pro sériovou realizaci násobení.

MODIFIKOVANÝ BOOTHŮV ALGORITMUS

Booth při hledání metody zmenšující počet sčítaných produktů přišel s nápadem (příklad B*00111100)

Klasický součin B*bit realizuje součet čtyřech produktů

$$B*00111100 = B*2^5 + B*2^4 + B*2^3 + B*2^2$$

Násobitele můžeme nestandardně vyjádřit **0 1 0 0 0 0 0 0 –1 0 0**

$$B*(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 - 1\ 0\ 0) = B*2^6 - B*2^2$$

Při násobení konstantou nám to v některých případech pomůže, **obecně ne**. Analýza ukázala cestu ke snížení počtu součinů.

Vyjádření	Bitové vyjádření 0 0 1 1 0 1 1 1 0 , 0	Nenulový počet bitů	
		Průměrný	Max.
Binární	2^6 2^5 2^3 2^2 2^1	n/2	n
Kanonické znaménkové	2^7 -2^4 -2^1	n/3	n/2
Modif.Bootův algoritmus R.4	0 +2 -1 0 -2 2.2^6 -1.2^4 -2.2^0	---	n/2

NÁSOBÍCÍ ALGORITMY VYŠŠÍHO ŘÁDU - BOOTHŮV ALGORITMUS

a_{2j+1}	a_{2j}	$p_{2(j-2)+4}$	p_{2j+2}	B	A
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Násobíme-li dvěma bity

$$a_{2j+1},a_{2j} = 0, 1, 2, 3.$$

Hodnotu 3 realizujeme jako 4-1 ⇒ realizovat dekodér, který k bitům a_{2j+3},a_{2j+2} přičte hodnotu 1.

Výstupy dekodéru B, A adresují multiplexer, který přivede dílčí součin 0, B, 2B nebo –B.

Bit p_{2j+2} je přenos do dalšího řádu.

NEVÝHODA: **Nelze paralelizovat v důsledku kaskádního přenosu.**

Y	0 1 1 0 1	= 13
X	0 0 1 1 1	= 7
0 0 0 0 0 1 1 0 1		součin s x0
0 0 0 0 1 1 0 1		součin s x1
0 0 0 1 1 0 1		součin s x2
0 0 0 0 0 0		součin s x3
0 0 0 1 0 1 1 0 1 1		= 91

Y	0 1 1 0 1	= 13
X	0 0 1 1 1	= 7
1 1 1 1 1 0 0 1 1		součin s x1,x0 -B
0 0 1 1 0 1 0		součin s x3,x2 (01+1).4 B
1 0 0 1 0 1 1 0 1 1		= 91

přenos

MODIFIKOVANÝ BOOTHŮV ALGORITMUS - RADIX4

$$\tilde{A}.\tilde{B} = \left[-\tilde{a}_{n-1}.2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \tilde{a}_i.2^i \right].\tilde{B} + \tilde{a}_{-1}.\tilde{B}.2^0 =$$

$$-\tilde{a}_{n-1}.\tilde{B}.2^{n-1} + \tilde{a}_{n-2}.\tilde{B}.2^{n-2} + \ldots + \tilde{a}_1.\tilde{B}.2^1 + \tilde{a}_0.\tilde{B}.2^0 + \tilde{a}_{-1}.\tilde{B}.2^0 =$$

$$= (\tilde{a}_{n-2} - \tilde{a}_{n-1}).\tilde{B}.2^{n-1} + (\tilde{a}_{n-3} - \tilde{a}_{n-2}).\tilde{B}.2^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + (\tilde{a}_2 - \tilde{a}_3).\tilde{B}.2^3 + (\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2).\tilde{B}.2^2 + (\tilde{a}_0 - \tilde{a}_1).\tilde{B}.2^1 + (\tilde{a}_{-1} - \tilde{a}_0).\tilde{B}.2^0 =$$

$$= (\tilde{a}_{n-2}.2 - \tilde{a}_{n-1}.2 + \tilde{a}_{n-3} - \tilde{a}_{n-2}).\tilde{B}.2^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-\tilde{a}_2.2 - \tilde{a}_3.2 + \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2).\tilde{B}.2^2 + (\tilde{a}_0.2 - \tilde{a}_1.2 + \tilde{a}_{-1} - \tilde{a}_0).\tilde{B}.2^0 =$$

$$= (-\tilde{a}_{n-1}.2 + \tilde{a}_{n-2} + \tilde{a}_{n-3}).\tilde{B}.2^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-\tilde{a}_3.2 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_1).\tilde{B}.2^2 + (-\tilde{a}_1.2 + \tilde{a}_0 + \tilde{a}_{-1}).\tilde{B}.2^0$$

Bude-li koeficient $a_{-1}=0$, pak výpočet součinu z trojice bitů násobitele bude roven součinu čísel A a B se znaménkem. Kombinace tří bitů pak představuje hodnotu násobence 0, B, 2B, -2B,-B. Jak udělat posun trojce bitů o dva bity?

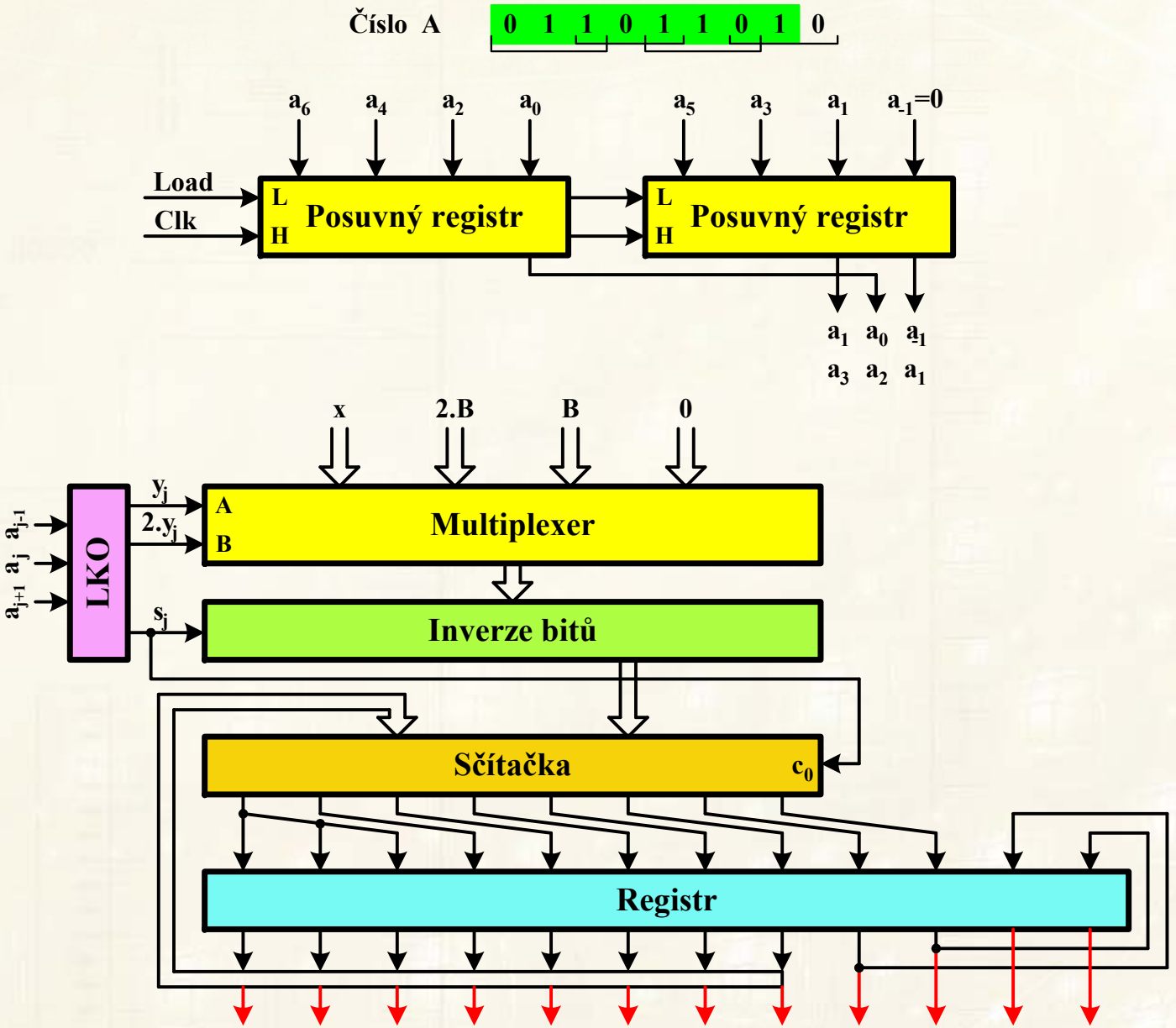
Proces se dá plně paralelizovat.

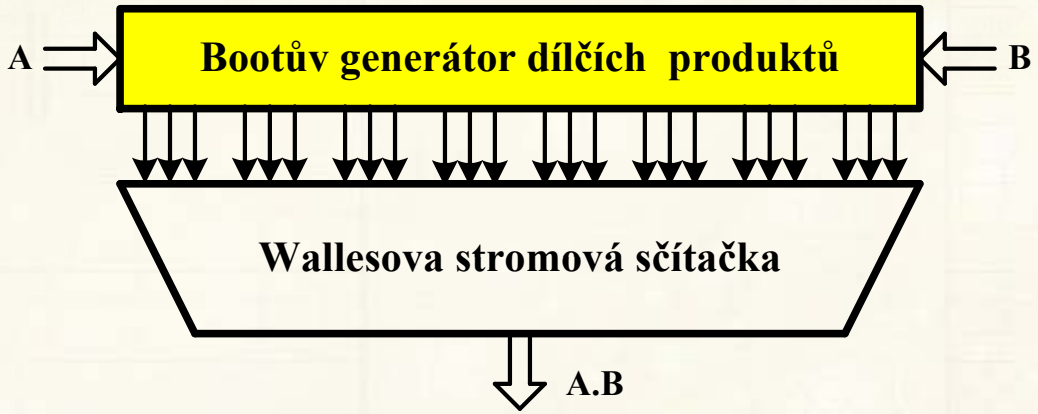
MODIFIKOVANÝ BOOTHŮV ALGORITMUS - RADIX4

Příklad na sériově realizovaný součin čtyřbitových čísel 1110 (-2) a 1101 (-3) (Výsledek = 0000 0110 (+6)) modifikovaným Boothovým algoritmem-Radix4. Součin vzniká v **ALU** a pomocném posuvném **registru** i s pomocným **bitem** pro počáteční hodnotu a_{-1}.

Iterace	B	Modifikovaný Boothův algoritmus – Radix4	
		Krok	Součin
0	1110	Inicializace	0000 1101 0
1	1110	010 ⇒ výsl = výsl + B	1110 1101 0
	1110	2x posun doprava	1111 1011 0
2	1110	110 ⇒ výsl = výsl-B	0001 1011 0
	1110	2x posun doprava	0000 0110 1

MODIFIKOVANÝ BOOTHŮV ALGORITMUS - RADIX4 - SÉRIOVÝ





Stejně dospějeme k modifikovanému Boothovu algoritmu – RADIX8 (práce se 4 bity) vede na dílčí součiny (0, B, 2B, 3B, 4B, – 4B, – 3B, – 2B a –B).

Součin 3B (-3B) je třeba realizovat a otázkou zůstává kolik ušetříme na výpočtu 1/3 součinů a spotřebujeme na realizaci 3B.

U algoritmů RADIX32 a RADIX256 je situace s dílčími součiny složitá a využívají se při ní číselné soustavy mod7 a mod11.

Číslo v pohyblivé desetinné čárce je rozšířeno o hodnotu exponentu včetně jeho znaménka. Standardem je **IEEE 754-1985** (inovovaný **IEEE 754-2008**)

$$A = 0, \quad A = \infty, \quad A = (-1)^z . (1+m) . 2^{e+127}$$

kde **z** - znaménko čísla, **e** - exponent a **m** -mantisu (desetinné číslo) danou výrazem

$$m = a_{-1}2^{-1} + a_{-2}2^{-2} + \ldots + a_{-n+1}2^{-n+1} + a_{-n}2^{-n}$$

Závorka (1+m) leží v intervalu <1,0;2,0) (**normovaná mantisa**). Mantisa je ve formátu ±absolutní hodnota. Exponent se znaménkem je ve formátu s posunutou nulou (+1/2 intervalu zmenšeném o hodnotu 1)

$$exponent = e + 127 = a_{m-1}a_{m-2}a_{m-3}\ldots a_0$$

se pohybuje v intervalu <-126;127> pro dvojnásobnou přesnost <-1022;1023>).

Krajní hodnoty exponentu e+127=0 a e+127=255 se využívají k vyjádření 0 a ±∞. Číslo je vyjádřeno 4 byty

$$\text{MSB} = z\ e_7e_6e_5e_4e_3e_2e_1$$
$$e_0\ m_{-1}m_{-2}m_{-3}m_{-4}m_{-5}m_{-6}m_{-7}$$
$$m_{-8}m_{-9}m_{-10}m_{-11}m_{-12}m_{-13}m_{-14}m_{-15}$$
$$\text{LSB} = m_{-16}m_{-17}m_{-18}m_{-19}m_{-20}m_{-21}m_{-22}m_{-23}$$

Jednička z výrazu (1+m) je tzv. **skrytá jednička** (ve vyjádření se neobjevuje).

Číslo		Vyjádření		
		z	exponent	mantisa
$1{,}000.10^{0}$	$1{,}000000.2^{0}$	0	01111111	0000000000
$8{,}000.10^{0}$	$1{,}000000.2^{3}$	0	10000010	0000000000
$0{,}000.10^{0}$	$0{,}000000.2^{0}$	0	00000000	0000000000
$-1{,}750.10^{0}$	$1{,}750000.2^{0}$	1	01111111	1100000000
$1{,}250.10^{2}$	$1{,}953125.2^{6}$	0	10000101	1111010000
$-1{,}250.10^{2}$	$-1{,}953125.2^{6}$	1	10000101	1111010000
$-7{,}812.10^{-2}$	$-1{,}249920.2^{-4}$	1	01111011	0011111111

Pro atypické vyjádření čísel s pohyblivou čárkou určíme nezbytný počet bitů mantisy **n** ze vztahů :

$$2^{-n} \leq 10^{-\text{pocet desetinných míst}} \qquad n \geq \frac{pocet\ desetinných\ míst}{\log 2}$$

Počet bitů exponentu **m** bude dán vztahy

$$2^{2^{m-1}} \geq 10^{\text{rozsah exponentu}} \qquad m \geq 1 + \frac{\log\left(\frac{rozsah\ exponentu}{\log 2}\right)}{\log 2}$$

Násobení čísel A a B v pohyblivé čárce můžeme vyjádřit takto

$$A.B = \left[(-1)^{z_A} . M_A . 2^{e_A}\right] . \left[(-1)^{z_B} . M_B . 2^{e_B}\right]$$

M_A M_B - normované mantisy (1+m), $M_A.M_B$ - součin čísel v pevné desetinné čárce. Výsledek součinu bude mít dvojnásobný počet bitů a bude ležet v intervalu <1;4). Pro $M_A.M_B \geq 2$, nutný posun o pozici doprava (normovaná mantisa) a exponent + 1. Po **normování** dojde k omezení/zaokrouhlení mantisy ⇒ operace není **lineární a výsledek je zatížen chybou**

$$A.B = (-1)^{z_A \oplus z_B} . M_A . M_B . 2^{e_A + e_B} = (-1)^{z_V} . m_V . 2^{e_A + e_B} =$$

$$= \textit{normování} = (-1)^{z_V} . M_V . 2^{e_V}$$

Při **dělení** je situace stejná, násobení nahrazeno dělením, součet exponentů rozdílem. Pro mantisu <1, posun o jednu pozici doleva a exponent zmenšen o jedničku.

OPERACE V POHYBLIVÉ DESETINNÉ ČÁRCE

Při sčítání a odečítání je situace následující

$$A \pm B = (-1)^{z_A} . M_A . 2^{e_A} \pm (-1)^{z_B} . M_B . 2^{e_B} =$$

$$(-1)^{z_A} . M_A . 2^{e_A} \pm (-1)^{z_B} . m_B . 2^{e_A} =$$

$$\left[(-1)^{z_A} . M_A \pm (-1)^{z_B} . m_B\right] . 2^{e_A} =$$

$$(-1)^{z_V} . m_V . 2^{e_A} = \textit{normování} = (-1)^{z_V} . M_V . 2^{e_V}$$

Mantisa menšího čísla posunována doprava až dojde ke srovnání exponentů. Následuje součet mantis v pevné desetinné čárce. Podle výsledku je mantisa upravena tak, aby ležela v intervalu <1;2). Rozšířenou mantisu opět omezíme nebo zaokrouhlíme na standardní počet bitů ⇒

!

- **Operace není lineární, výsledek je zatížen chybou.**
- **Součet nebo rozdíl řádově velkého a malého čísla se nemusí projevit ve výsledku.**

PROBLÉMY PŘI POUŽITÍ POHYBLIVÉ ČÁRKY

Formát v pohyblivé čárce nepokrývá všechna racionální čísla.

- Pohyblivou čárku je nevhodné používat **pro finanční operace**. Např. hodnotu 0,1 nelze přesně vyjádřit.

Problémy s Excel v 90 letech 20. století

- Následující zápis vede na nekonečnou smyčku

double y=0.0; while(y!=1.0) { y+=0.1; ….. atd. }

- Zápis programu vede na špatný počet cyklů

double y=0.0; int počet=0;

while(y<1.0) { y+=0.1; počet++; ….. }

Pro (y<1.0) cyklů 11 místo 10. Pro (y<2.0) správně 20 cyklů.

Řada případů špatné implementace pohyblivé čárky vedla až k tragickým událostem.

Např. systém Patriot v Irácké válce.

PROBLÉMY PŘI POUŽITÍ POHYBLIVÉ ČÁRKY

Nejčastější problémy souvisí s rozsahem operandů a mantisy.

- Rozsah mantisy

  float x = 4194304.0; x+=0.25; ⇒ **výsledek x= 4194304.0;**

  float u=0.001; y=1000000;

  for (i=0; i<1000; i++) {y=y+u} ⇒ **výsledek y= 1000000.0;**