Příjmení a jméno: ______________________________

Úloha	1	2	3	4	5	6	*Celkem*
Maximum	5	5	5	5	5	5	30
Počet bodů							

1. Uvažujme zobrazení $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 2x_2 - x_3 - 2)$, kde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
   (a) (1 b) Je f afinní/lineární zobrazení? Zdůvodněte.
   (b) (1 b) Vyjádřete f v maticovém tvaru.
   (c) (3 b) Popište množinu všech bodů $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ splňujících $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$ jako afinní/lineární podprostor a určete jeho dimenzi.

Řešení:

Je to afinní zobrazení $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Řešíme soustavu dvou rovnic $2x_1 - 3x_2 = 0$ a $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$. Dostaneme řešení $\mathbf{x} = (3, 2, 7)t + (0, 0, -2)$, kde $t \in \mathbb{R}$. Jde o přímku, afinní podprostor dim. 1.

2. (5 b) Nalezněte redukovaný QR rozklad matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Řešení:

Protože má $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé sloupce, jde jen o maticové vyjádření Gram-Schmidtovy ortogonalizace jejích sloupců $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 2)$ a $\mathbf{a}_2 = (-5, 4, 2)$. Sloupce matice $\mathbf{Q}$ jsou proto $\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{3}(1, -2, 2)$ a

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1}{\|\mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1\|} = \tfrac{1}{6}\mathbf{a}_2 + \tfrac{1}{6} \cdot 3\mathbf{q}_1.$$

Tedy $\mathbf{a}_1 = 3\mathbf{q}_1$ a $\mathbf{a}_2 = -3\mathbf{q}_1 + 6\mathbf{q}_2$. Dostaneme

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Máme 5 pozorování $(0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4)$ tvaru (x_i, y_i). Hledáme optimální regresní přímku $y = \theta_1 x + \theta_2$, kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ jsou hledané parametry.
   (a) (2 b) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.

(b) (3 b) Vyřešte tento problém.

Řešení:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hledáme $\theta \in \mathbb{R}^2$ minimalizující $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{b}\|^2$. To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\theta = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, což je soustava 2 lineárních rovnic o 2 neznámých

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix},$$

jejíž jediné řešení je $\theta_1 = \theta_2 = \frac{4}{5}$.

4. Matice $\mathbf{A}$ typu 1000×30 má prvky $a_{ij} \in \{0, 1\}$, kde řádky matice odpovídají studentům a sloupce předmětům. Platí $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když má student i zapsán předmět j.
   (a) (1 b) Jakou interpretaci má pro tato data matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$?
   (b) (1 b) Jakou interpretaci má pro tato data matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$?
   (c) (2 b) Popište výpočetně efektivní způsob výpočtu singulárních čísel matice $\mathbf{A}$ pomocí vlastních čísel.
   (d) (1 b) Napište chybu aproximace matice $\mathbf{A}$ maticí $\mathbf{B}$ hodnosti nejvýše 3 pomocí singulárních čísel.

Řešení:

Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ typu 30×30 má na pozici (i, j) počet studentů, kteří současně studují předměty i a j. Matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ typu 1000×1000 má na pozici (i, j) počet předmětů, které mají současně zapsáni studenti i a j. Všechna nenulová singulární čísla matice $\mathbf{A}$ jsou odmocniny z nenulových vlastních čísel matice matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, která je menší oproti $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Tedy použijeme spektrální rozklad reálné symetrické matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$. Chyba je $\sqrt{s_4^2 + \cdots + s_r^2}$, kde r je hodnost matice $\mathbf{A}$, a platí $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_r$.

5. Uvažujme funkci $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
   (a) (1 b) Zderivujte f.
   (b) (1 b) Napište, ve kterých bodech je f diferencovatelná a zdůvodněte.
   (c) (1 b) Najděte Taylorův polynom prvního řádu v okolí bodu $(1, \ldots, 1)$.
   (d) (2 b) Najděte Taylorův polynom druhého řádu v okolí bodu $(1, \ldots, 1)$.

Řešení:

Parciální derivace mají tvar $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{2\|\mathbf{x}\|}2x_i$, takže derivace se rovná $f'(x) = \frac{\mathbf{x}^\top}{\|\mathbf{x}\|}$. Díky zlomku tato derivace existuje všude kromě $\mathbf{x} = 0$. Pro Taylorův polynom prvního stupně označne $\mathbf{x}_0 = (1, \ldots, 1)$ referenční bod. Pak Taylorův polynom má tvar

$$T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \sqrt{n} + \frac{\mathbf{x}_0^\top}{\sqrt{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Pro Taylorům polynom druhého řádu je třeba vypočítat Hessián. Parciální derivace druhého řádu se rovnají

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{\partial x_j}\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{x_i x_i}{\|\mathbf{x}\|^2} & \text{pokud } i = j, \\ -\frac{x_i x_j}{\|\mathbf{x}\|^2} & \text{pokud } i \neq j. \end{cases}$$

Celkem tedy

$$T_2(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}I - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x}\mathbf{x}^\top\right)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

6. Máme body $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$, které chceme proložit kružnicí ve smyslu nejmenších čtverců. Tedy hledáme kružnici se středem v (u, v) a poloměrem r takovou, aby součet čtverců kolmých vzdáleností bodů ke kružnici byl minimální.
   (a) (1 b) Pro bod (x_i, y_i) odvoďte jeho vzdálenost ke kružnici popsanou v zadání.
   (b) (1 b) Napište optimalizační problém nejmenších čtverců.
   (c) (2 b) Napište iteraci gradientní metody největšího spádu.
   (d) (1 b) Ve kterém bodě by tato iterační metoda neměla začínat a proč?

Řešení:

Vzdálenost je $|\|(x_i, y_i) - (u, v)\| - r|$. Absolutní hodnota je nutná, protože bod může být vevnitř nebo vně kruhu. Úloha nejmenších čtverců pak vypadá minimalizace

$$f(u, v, r) := \sum_{i=1}^n \big(\|(x_i, y_i) - (u, v)\| - r\big)^2$$

Jakobián má tvar

$$\nabla f(u, v, r) = 2\sum_{i=1}^n \big(\|(x_i, y_i) - (u, v)\| - r\big) \begin{bmatrix} \frac{u - x_i}{\|(x_i, y_i) - (u, v)\|} \\ \frac{v - y_i}{\|(x_i, y_i) - (u, v)\|} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Iterace požadované metody jsou

$$\begin{bmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \\ r^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^k \\ v^k \\ r^k \end{bmatrix} - \alpha^k \nabla f(u^k, v^k, r^k),$$

kde $\alpha^k > 0$ je krok. Iterace by neměly začínat v $u^0 = x_i$ a $v^0 = y_i$ pro nějajé i, neboť pak gradientní update není definován.