OPT midterm 5.4.2023

Příjmení:	Jméno:	000

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (2 body) Najděte vzdálenost bodu $\mathbf{z} = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ od nadroviny $\{\mathbf{x};\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 2)$, $b = 3$.

Můžeme využít např. známého vzorce $\frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{z}-b|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|(1,1,1,2)(1,0,1,0)-3|}{\|(1,1,1,2)\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}$. K jeho odvození stačí vědět, že velikost pravoúhlého průmětu vektoru $\mathbf{z}$ na přímku se směrem $\mathbf{a}$ je $\frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{z}|}{\|\mathbf{a}\|}$. Pro získání vzdálenosti od té nadroviny ale musíme vektor posunout o $-\mathbf{x}_0$, kde $\mathbf{x}_0$ je libovolný vektor splňující $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_0 = b$. Tím dostaneme $\frac{|\mathbf{a}^T(\mathbf{z}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{z}-b|}{\|\mathbf{a}\|}$.

2. Nechť $X = \operatorname{span}\{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$. Najděte

   a) (1 bod) bázi podprostoru $X^\perp$,
   b) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor $X^\perp$,
   c) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor X.

a) $X^\perp = \operatorname{span}\{(2, 0, -2, 1)\}$, b) $\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, projektor $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{I} - \mathbf{P}$.

3. Máme 5 pozorování $(0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4)$ tvaru (x_i, y_i). Hledáme optimální regresní přímku $y = \theta_1 x + \theta_2$, kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ jsou hledané parametry.

   a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.
   b) (2 body) Vyřešte tento problém.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hledáme $\theta \in \mathbb{R}^2$ minimalizující $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{b}\|^2$. To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\theta = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, což je soustava

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix},$$

jejíž jediné řešení je $\theta_1 = \theta_2 = \frac{4}{5}$.

4. Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{15\times 5}$ hledáme nejbližší matici hodnosti ≤ 3. Víme, že matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má vlastní čísla $2, 1, 4, 9, 0$.

   a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako optimalizační problém a napište hodnotu účelové funkce v optimu.
   b) (1 bod) Jaké bude optimální řešení tohoto problému, budeme-li hledat matici hodnosti ≤ 4?

a) $\min \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|^2$ pro $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{15\times 5}$, kde $\operatorname{rank}\mathbf{B} \leq 3$. V optimu je chyba $s_4^2 + s_5^2 = 1$. b) Protože $\mathbf{A}$ má podle hodnot singulárních čísel hodnost 4, bude optimální řešení právě $\mathbf{A}$ a chyba bude nulová.

OPT midterm 5.4.2023 Příjmení: Jméno: 000

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.
(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

	1
a	
b	
c	
d	
e	

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. Nechť $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_1 = x_4\}$, $\mathbf{z} = (4, 3, 2, 1)$. Najděte kolmou projekci vektoru $\mathbf{z}$
   a) (2 body) na X,
   b) (1 bod) na $X^\perp$

Je snadnější začít podúlohou b), neboť $X^\perp$ je generován pouze jedním vektorem. b) $\mathbf{y} = \frac{(4,3,2,1)(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}} \frac{(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}(1, 0, 0, -1)$. a) $\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{y} = (5/2, 3, 2, 5/2)$

2. (2 body) Pro afinní podprostor $X = (1, 2, 3, 4) + \operatorname{span}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ najděte matici a vektor pravých stran soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jejíž řešení je X.

Například $\mathbf{A} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1]$ (jednořádková matice) , $b = 2$.

3. Závislost proměnné z na proměnných x, y modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x, y) = a(x-y)^2 + be^{x+y} + cxy + d$. Odhadujeme parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, 100$, ve smyslu nejmenších čtverců.
   a) (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.
   b) (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné řešení? Takové řešení napište.

a) Vektor neznámých parametrů je $\mathbf{p} = (a, b, c, d)$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100\times 4}$ má v řádku i vektor $((x_i - y_i)^2, e^{x_i+y_i}, x_i y_i, 1)$ a dále $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{100})$. Hledáme minimum funkce $\|\mathbf{Ap} - \mathbf{z}\|^2$. b) Má-li $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé sloupce, pak je jediné optimální řešení $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$.

4. Matice $\mathbf{A}$ typu $10^4 \times 50$ má prvky 0 nebo 1. Každý řádek i odpovídá jedné osobě a každý sloupec j streamovací službě (Netflix, Spotify atd.), přičemž $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když si osoba i předplácí službu j.
   a) (1 bod) Co vyjadřují prvky matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$? Interpretujte jejich numerické hodnoty.
   b) (1 bod) Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ má jen 15 nenulových singulárních čísel $s_1, \ldots, s_{15}$. Napište teoretickou chybu aproximace matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ maticí hodnosti nejvýše 10.

a) Složka b_{ij} matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ udává, kolik lidí celkem předplácí současně služby i a j. b) Chyba je $s_{11}^2 + \ldots + s_{15}^2$.

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

[redacted]

	1
a	
b	
c	
d	
e	

1. Nechť $\mathbf{A}$ je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null $\mathbf{A}^T$ je
   (a) $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
   (b) $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   (c) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
   (d) $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
ll (e) neplatí žádné výše uvedené tvrzení

2. Rozhodněte, co je správně.
   (a) neplatí žádné z uvedených tvrzení
   (b) $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rank}\mathbf{A}\,\operatorname{rank}\mathbf{B}$
   (c) $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) = \min\{\operatorname{rank}\mathbf{A}, \operatorname{rank}\mathbf{B}\}$
   (d) $\operatorname{rng}\mathbf{AB} \subseteq \operatorname{rng}\mathbf{B}$
fl (e) $\operatorname{rng}\mathbf{AB} = \operatorname{rng}\mathbf{A}$

3. Máme matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že každá matice $\mathbf{A}_i$ má ortonormální sloupce. Označme $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_k$ součin těchto matic.
   (a) Matice $\mathbf{B}$ je ortogonální.
   (b) Matice $\mathbf{B}$ má ortonormální sloupce, ale nemusí být ortogonální.
   (c) Matice $\mathbf{B}$ je ortogonální jen tehdy, když $k \leq 2$.
   (d) Matice $\mathbf{B}$ je identická.
ll (e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.

4. Nechť $n \geq 2$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor. Ortogonální projektor promítající na podprostor span$\{\mathbf{a}\}$ je
   (a) je singulární matice
   (b) je matice plné hodnosti
   (c) je symetrická regulární matice
   (d) je široká matice, která není čtvercová
ll (e) žádná z uvedených možností

5. Pro která $a \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonální projektor?
   (a) žádná z uvedených možností
   (b) pro $a = 0$
   (c) pro $a \in \{0, 1\}$
   (d) pro $a \in [0, 1]$
fl (e) pro $a \geq 0$

6. Množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,
   (a) je afinní podprostor dimenze $n - 1$
   (b) je vždy lineární podprostor
   (c) je vždy přímka, která nemusí procházet počátkem
   (d) je konečná
ll (e) nesplňuje žádnou z uvedených možností

7. Máme zadánu symetrickou matici $\mathbf{A}$ řádu n.
   (a) Její nejmenší vlastní číslo splňuje $\lambda \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$ takový, že $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (b) Její největší vlastní číslo λ je vždy kladné a platí $\lambda = \max\ \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro vektory $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (c) Optimální řešení úlohy $\max \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ vždy existuje.
   (d) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ nabývá vždy maxima pro nějaký vektor $\mathbf{x}$ splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
   (e) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$ je řešením úlohy $\max \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

8. Pro úlohu nejmenších čtverců $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2$ platí:
   (a) Optimálních řešení může být nekonečně mnoho.
   (b) Hodnota v optimu je vždy 0.
   (c) Úloha nemusí mít optimální řešení.
   (d) Optimální řešení je vždy tvaru $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$.
   (e) Každé řešení úlohy nejmenších čtverců je i řešením soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

9. Hledáme afinní podprostor X dimenze 5 minimalizující součet čtverců kolmých vzdáleností od vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{1000} \in \mathbb{R}^{50}$.
   (a) X je afinním podprostorem prostoru $\mathbb{R}^{50}$.
   (b) X je afinním podprostorem prostoru $\mathbb{R}^5$.
   (c) Neplatí žádná z uvedených možností.
   (d) Hledaný afinní podprostor X nemusí existovat.
   (e) X je vždy lineárním obalem 5 lineárně nezávislých vektorů.

10. Rozhodněte, co platí pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
   (a) Neplatí žádná z uvedených možností.
   (b) $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní.
   (c) $\mathbf{A}$ má vlastní číslo 0.
   (d) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ má minimum v bodě 0.
   (e) Optimální hodnota úlohy $\min \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\| = 1\}$ je kladná.