Test OPT 29. 4. 2026 | Příjmení: Jméno:

0. Dáno je n bodů $(x_1,y_1,z_1),\dots,(x_n,y_n,z_n)\in\mathbb{R}^3$, které jsou po sloupcích uloženy do matice $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{3\times n}$. Napište postup, jak spočítat parametry $a,b,c\in\mathbb{R}$ tak, aby výraz $\sum_{i=1}^n d_i{}^2$ byl minimální, kde d_i je definováno takto:
   a) $d_i = ax_i + by_i + c + z_i$
   Typicka uloha na linearni nejmensi ctverce / linearni regresi. Kriterium muzeme psat jako $\sum_i d_i^2 = \sum_i (f(x_i,y_i)+z_i)^2$ kde $f(x,y)=ax+by+c$ je regresni funkce s hledanymi parametry (a,b,c). Ale pozor: mame tam $+z_i$ a ne $-z_i$, tedy prokladame body $(x_i,y_i,-z_i)$. Kriterium jde napsat jako $\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3}\|\mathbf{Au}+\mathbf{d}\|^2$ kde $\mathbf{u}=(a,b,c)$, matice $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times 3}$ má řádky $(x_i,y_i,1)$, a vektor $\mathbf{d}$ ma slozky $-z_i$. Reseni najdeme resenim normalni rovnice $\mathbf{A}^T\mathbf{Au}=\mathbf{A}^T\mathbf{d}$, coz v Matlabu najdeme snadno prikazem $\mathbf{u}=\mathbf{A}\backslash\mathbf{d}$, viz skripta.
   b) d_i je vzdálenost bodu (x_i,y_i,z_i) od množiny $\{\,(x,y,z)\mid ax+by+cz=0\,\}$
   Optimalni reseni je $a=b=c=0$. V tom pripade totiz bude mnozina cele $\mathbb{R}^3$ a tedy vzdalenost jakehokoli bodu od mnoziny bude 0.
   Pokud by ale bylo predpokladano, ze spon jedno z cisel a,b,c, je nenulove, tak to je typicka uloha na PCA (toto reseni take uzname). Uděláme SVD $\mathbf{X}=\mathbf{USV}^T$, pak (a,b,c) je sloupec matice $\mathbf{U}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ odpovídající nejmenšímu singulárnímu číslu (tedy treti), protože zmíněná množina je nadrovina a (a,b,c) je její normála (tedy báze jejího ortog. doplňku).
   Alternativne můžeme udělat spektrální rozklad $\mathbf{XX}^T=\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T$ a (a,b,c) bude sloupec $\mathbf{V}$ odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu.
   c) d_i je vzdálenost bodu (x_i,y_i,z_i) od množiny $\{\,t(a,b,c)\mid t\in\mathbb{R}\,\}$
   Jina varianta ulohy na PCA. Stejné jako predtim, jen bereme sloupec odpovídající největšímu singulárnímu/vlastnímu číslu (protože zmíněná množina je přímka a (a,b,c) je její směrový vektor, tedy báze, nikoliv tedy baze jejiho ortog. doplnku jako minule).

---

0. Najděte (totální) derivaci funkce
   a) $f(\mathbf{x})=1/\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|$ v bodě $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, ve kterém je $\mathbf{Ax}\neq\mathbf{b}$ (kde $\|\cdot\|$ značí eukleidovskou normu).
   Jelikoz f je funkce $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, derivace (Jacobiho matice) bude radkovy vektor s n slozkami. Derivace jde najit vselijak, ale prirozene je pouzit retizkove pravidlo. Fci $w=f(\mathbf{x})$ muzeme videt jako slozeni funkci

$$w=1/z,\qquad z=\|\mathbf{y}\|,\qquad \mathbf{y}=\mathbf{Ax}-\mathbf{b}.$$

   Tedy neformalne (viz skripta) muzeme psat (na poradi 'zlomku' zalezi!)

$$\frac{dw}{d\mathbf{x}}=\frac{dw}{dz}\frac{dz}{d\mathbf{y}}\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}=\frac{-1}{z^2}\frac{\mathbf{y}^T}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{A}=\frac{-1}{\|\mathbf{y}\|^2}\frac{\mathbf{y}^T}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{A}=\frac{-\mathbf{y}^T\mathbf{A}}{\|\mathbf{y}\|^3}=\frac{-(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^T\mathbf{A}}{\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^3}.$$

   b) $f(\mathbf{x})=\log[(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^T(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})]$ v bodě $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, ve kterém $\mathbf{Ax}\neq\mathbf{b}$ (kde log značí přirozený logaritmus).
   Opet pouzijeme retizkove pravidlo. Fce $w=f(\mathbf{x})$ je slozenim funkci

$$w=\log z,\qquad z=\mathbf{y}^T\mathbf{y},\qquad \mathbf{y}=\mathbf{Ax}-\mathbf{b}.$$

   Tedy neformalne (viz skripta) muzeme psat

$$\frac{dw}{d\mathbf{x}}=\frac{dw}{dz}\frac{dz}{d\mathbf{y}}\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}=\frac{1}{z}(2\mathbf{y}^T)\mathbf{A}=\frac{2\mathbf{y}^T\mathbf{A}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}=\frac{2(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^T\mathbf{A}}{(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^T(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})}.$$

   Muzeme ale funkci f videt i jako slozeni jinych funkci, napr. $f(\mathbf{x})=\log(\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2)=2\log\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|$ a pouzit vzorecek pro derivaci normy.

---

0. Najděte Taylorův polynom prvního stupně
   a) funkce $f(x,y)=x^2/y$ v bodě $(x_0,y_0)=(-1,2)$. Výsledný polynom zjednodušte.
   Totalni derivace (Jacobiho matice) funkce $f(x,y)$ podle vektoru (x,y) je $f'(x,y)=[\,2x/y\quad -x^2/y^2\,]$ (radkovy vektor). Oznacime-li $\mathbf{x}=(x,y)$ a $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$, mame (vzorecek viz skripta)

$$T^1_{f,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)+f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=(1/2)+[\,-1\quad -1/4\,]\begin{bmatrix}x+1\\ y-2\end{bmatrix}=-x-y/4.$$

   b) funkce $f(x,y)=x+1/y$ v bodě $(x_0,y_0)=(-1,2)$. Výsledný polynom zjednodušte.
   Postup zcela analogicky, vyjde $T^1_{f,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})=x-y/4$.

0.
   a) Najděte všechny extrémy funkce $f(x,y)=2x+y$ na množině $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=1,\ 0\le x\le 1\,\}$. Ke každému extrému napište jeho typ (minimum/maximum, globální/lokální, volný/vázaný). Dále nakreslete obrázek, ve kterém bude množina přípustných řešení a pro každý extrém v něm bude vrstevnice účelové funkce procházející tím extrémem.
   Pripustna mnozina je cast kladne vetve hyperboly, koncici v bode $(1,1)$. Ucelova fce je linearni, s koeficienty $(2,1)$. Vrstevnice f jsou tedy kolme k vektoru $(2,1)$. Z obrazku tedy vidime, ze v bode $(1,1)$ je lokalni maximum (ktere ale neni globalni, protoze funkce je na mnozine shora neomezena) a nekde na vetvi hyperboly bude globalni minimum. To spocitame nejjednoduseji dosazenim $y=1/x$ do ucelove fce, tedy hledame volny extrem fce $2x+1/x$: polozenim derivace rovne nule dostaneme $x=1/\sqrt{2}$, tedy hledane globalni minimum je bod $(1/\sqrt{2},\sqrt{2})$. Oba extremy jsou vazane (neb jsou to hranicni body mnoziny).

Test OPT 29. 4. 2026 | Příjmení: Jméno:

b) Najděte všechny extrémy funkce $f(x,y) = x - 2y$ na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2,\ x \le 1\}$. Ke každému extrému napište jeho typ (minimum/maximum, globální/lokální, volný/vázaný). Dále nakreslete obrázek, ve kterém bude množina přípustných řešení a pro každý extrém v něm bude vrstevnice účelové funkce procházející tím extrémem.
Podobne jako minule. Mnozina je cast paraboly, koncici v bode $(1,1)$. Z obrazku vidime, ze mame dva extremy: lokalni minimum v koncovem bode $(1,1)$ (globalni minimum neexistuje, neb fce je na mnozine zdola neomezena) a globalni maximum na parabole ale ne v bode $(1,1)$. Toto maximum opet najdeme nejlepe dosazenim $y = x^2$ do ucelove fce, tedy hledame volne maximum fce $x - 2x^2$, ktere je v bode $x = 1/4$, tedy hledane maximum je bod $(1/4, 1/16)$. Oba extremy jsou vazane (neb jsou to hranicni body mnoziny).

---

0. Řešíme rovnici $x - \cos x = 0$ Newtonovou metodou. Napište iteraci metody (pro tuto konkrétní úlohu).
Oznacime-li $g(x) = x - \cos x$, dle vzorecku ze skript je iterace Newtonovy metody (na hledani korenu, ne extremu!) $x_{k+1} = x_k - g(x_k)/g'(x_k)$, tam si uz kazdy dosadi.

0. Hledáme lokální extrém funkce $f(x) = \sin x - x^2$ čistou Newtonovou metodou. Napište iteraci metody (pro tuto konkrétní úlohu).
Zde nehledame koren nybrz extrem, tedy iterace je $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)/f''(x_k)$.

---

0. Maximalizujeme $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ přes proměnné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ za podmínky $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 1$, kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Vyřešte metodou Lagrangeových multiplikátorů. Výsledkem bude vzorec pro optimální argument $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$.
Zde jsme omylem do zadani napsali max, ale chteli jsme napsat min. Tak, jak to je, je uloha neomezena (za predpokladu $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$), protoze funkce $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ (ctverec vzdalenosti od pocatku) je na nadrovine $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 1$ shora neomezena. Toho si ale nikdo z vas nevsiml.
Nicmene zadani dava smysl i tak: metodou Lagr multiplikatoru muzeme najit lokalni extremy fce na mnozine. Lagr fce je $L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\lambda(1 - \mathbf{a}^T\mathbf{x})$ (dvojku jsme pridali pro pohodli, v ocekavani derivace fce $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$). Podminky prvniho radu na lokalni extremy jsou
$$L_{\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T - 2\lambda\mathbf{a}^T = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 1.$$
Prvni rovnici ekvivalentne upravime na $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}$. Dosadime $\mathbf{x}$ do druhe rovnice, $\lambda\mathbf{a}^T\mathbf{a} = 1$, z toho $\lambda = 1/(\mathbf{a}^T\mathbf{a})$, z toho $\mathbf{x} = \mathbf{a}/(\mathbf{a}^T\mathbf{a})$. Gometrickou uvahou vidime, ze je to globalni minimum: je to bod na nadrovine nejblize pocatku.

---

0. Maximalizujeme $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ přes proměnné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ za podmínky $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$, kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je dáno. Vyřešte metodou Lagrangeových multiplikátorů. Výsledkem bude vzorec pro optimální argument $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$.
Obdobne. Piseme $L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \frac{1}{2}\lambda(1 - \mathbf{x}^T\mathbf{x})$, podm. prvniho radu jsou
$$L_{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^T - \lambda\mathbf{x}^T = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1.$$
Prvni prepiseme jako $\mathbf{x} = \mathbf{c}/\lambda$ za predpokladu $\lambda \neq 0$, dosazenimn do podminky mame $\mathbf{c}^T\mathbf{c} = \lambda^2$, tedy $\lambda = \pm\|\mathbf{c}\|$, tedy $\mathbf{x} = \pm\mathbf{c}/\|\mathbf{c}\|$. Uvahou snadno vidime, ze kladne znamenko odpovida globalnimu maximu linearni fce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ na jendotkove sfere $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$, zaporne globalnimu minimu.

Test OPT 29. 4. 2026 | Příjmení: Jméno:

V řešení kvízových příkladů je vždy **první odpověď** správná:

1. Singulární čísla matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 8}$ jsou 1.1, 1, 0.2, 0.2, 0.1. Nechť $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{5\times 8}$ je mezi všemi maticemi hodnosti 2 ta nejbližší (ve Frobeniově normě) k matici $\mathbf{A}$. Čemu je roven výraz $\|\mathbf{A} - \mathbf{X}\|$, kde $\|\cdot\|$ značí Frobeniovu normu?
   (a) 0.3
   (b) 0.5
   (c) $\sqrt{5}/10$
   (d) 1.2
   ll (e) nelze z uvedených údajů rozhodnout
   Treba z Eckart-Youngovy vety: udelame SVD rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$, oznacme jako $\mathbf{S}'$ matici $\mathbf{S}$ s vynulovanymi tremi nejmensi diagonalnimi prvky, a nakonec $\mathbf{X} = \mathbf{US}'\mathbf{V}^T$. Protoze isometrie nemeni euklid. normu, mame $\|\mathbf{A}-\mathbf{X}\| = \|\mathbf{USV}^T - \mathbf{US}'\mathbf{V}^T\| = \|\mathbf{U}(\mathbf{S}-\mathbf{S}')\mathbf{V}^T\| = \|\mathbf{S}-\mathbf{S}'\|$, což je norma vektoru jehoz slozky jsou ta vynulovana sing. cisla, tedy $\|(0.2, 0.2, 0.1)\| = 0.3$. Takhle to mozna zni slozite, ale je to ve skriptech.

2. Chceme dané body $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^2$ (tvořící sloupce matice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times m}$) proložit kružnicí v rovině tak, aby součet čtverců vzdáleností bodů ke kružnici byl minimální (chceme globální, ne pouze lokální minimum). Střed optimální kružnice
   (a) žádná z uvedených možností
   (b) je levý singulární vektor matice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times m}$ odpovídající nejmenšímu singulárnímu číslu.
   (c) je levý singulární vektor matice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times m}$ odpovídající největšímu singulárnímu číslu.
   (d) je v těžišti bodů $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$.
   fl (e) lze najít vyřešením úlohy tvaru $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ kde prvky $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$ jsou jednoduché výrazy obsahující vektory $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$.
   Kdo delal poctive domaci ulohu na fitovani kruznice, tak vi, jak to je. Kdo u domaci ulohy podvadel, tak to nevi.

3. Nechť spojitá funkce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má na okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ spojité derivace až do řádu 2. Nutná podmínka pro existenci lokálního maxima v bodě $\mathbf{a}$ je:
   (a) $f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
   (b) Hessova matice funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je positivně definitní
   (c) Hessova matice funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je positivně semidefinitní
   (d) Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je kvadratická forma
   ll (e) žádná z uvedených možností
   Nutna podminka prvniho radu je (a), nutna podminka druheho radu je negativni semidefintnost Hessianu. Tedy zbyva jen (a).

4. Vnitřek množiny $\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x \geq 1\,\} \cup \{(0, 0)\}$ je množina
   (a) prázdná
   (b) $\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x > 1\,\} \cup \{(0, 0)\}$
   (c) $\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x > 1\,\}$
   (d) $\{(0, 0)\}$
   ll (e) žádná z uvedených možností
   Dle definice vnitrnich bodu (skripta) nema mnozina zadne vnitrni body: kolem zadneho bodu nejde udelat kulicka (s nenulovym polomerem), ktera je v mnozine.

5. Chcete spočítat aproximaci čísla $2^{1/3}$ s co největší přesností. Výpočet smí použít jen aritmetické operace $+, -, \times, /$ a celočíselné konstanty, celkově smí vykonat nejvýše 50 aritmetických operací. Který z algoritmů je k tomu vhodný?
   (a) Iterační metoda s iterací $x_{k+1} = \frac{2}{3}(x_k + 1/x_k^2)$.
   (b) Iterační metoda s iterací $x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)$ kde $f(x) = x^3 - 2$.
   (c) Metoda půlení intervalu.
   (d) Gradientní metoda s optimální délkou kroku (exact line search).
   ll (e) Gradientní metoda s přibližnou délkou kroku (inexact line search).
   Resime rovnici $g(x) = x^3 - 2 = 0$. Mate vedet, ze Newtonova metoda konverguje superlinearne (pokud konverguje, coz zde lze ocekavat v analogii napr. s Babylonskou metodou ze skript) a v praxi velmi rychle (strojova presnost se dosahne za nekolik iteraci). Kdyz si napisete iteraci Newtonovy metody a upravite, dostanete (a).

6. Minimalizujeme funkci $f(x, y) = x + 2y$ za podmínky $g(x, y) = (1 - xy)^2 = 0$. Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů s Lagrangeovou funkcí $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Platí:
   (a) Úloha má alespoň jedno lokální minimum, ale metoda ho nenajde.
   (b) Úloha má alespoň jedno lokální minimum a metoda ho najde.
   (c) Úloha je neomezená.
   (d) Úloha je nepřípustná.
   ll (e) žádná z uvedených možností
   Podminka $(1 - xy)^2 = 0$ je stejna jako $xy = 1$. Uvahou/obrazkem usoudime, ze funkce $x + 2y$ na hyperbole $xy = 1$ je zdola neomezena, uloha je tedy neomezena.
   Zaroven ale ma fce na hyperbole lokalni minimum a lok. maximum. Ovsem zadny bod splnujici $xy = 1$ neni regularni bod funkce $g(x, y) = (1 - xy)^2$, neb gradient funkce g je ve vsech techto bodech nulovy. Tedy soustava rovnic popisující podmínky prvního řádu nebude mít řešení, jak ukázáno ve skriptech na podobných příkladech.

Tedy je spravne je (a) i (c) $\Rightarrow$ chyba v zadani.

7. Máme funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s hodnotami $f(\mathbf{x}) = \sum_i c_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+b_i)^2$ kde vektory $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ a skaláry $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ jsou dány. Taylorův polynom druhého stupně funkce f v bodě $\mathbf{x}_0 = \mathbf{1}$
   (a) je roven funkci f
   (b) je roven Taylorovu polynomu prvního stupně funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$
   (c) je konstantní
   (d) je roven Hessově matici funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$
   ll (e) žádná z uvedených možností

   Funkce f je jiz polynom druheho stupne, tedy jeji Tayl polynom druheho stupne v libovolnem bode bude ona sama (to tak musi byt, protoze Tayl polynom je aproximace funkce v okoli daneho bodu polynomem daneho stupne).