Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Množina $\{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{a}^T\mathbf{x}\|_\infty - 3 \leq y\}$ je konvexní, kde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
   (b) (2 b) Funkce $f(\mathbf{x}) = \max\{\mathbf{a}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}\|_1 \leq 1\}$ je konvexní.
   (c) (2 b) Funkce $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_1$ je konvexní, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\lambda \geq 0$.
   (d) (2 b) $\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{B}^2 + 2\mathbf{I}$ je pozitivně semidefinitní, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická.
   (e) (2 b) Každý neprázdný konvexní polyedr má alespoň jeden extremální bod.

Řešení:

(a) Ano. Funkce $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{a}^T\mathbf{x}\|_\infty - 3$ je konvexní (součet konvexních funkcí, protože norma z lineární funkce je konvexní) a ta množina je její epigraf.

(b) Ano. Je to maximum konvexních (lineárních) funkcí $f_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$ pro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}\|_1 \leq 1$.

(c) Ano. Jde o účelovou funkci z regularizace nejmenších čtverců, součet čtverce normy z lineární funkce a nezáporného násobku normy.

(d) Ano. Jde o součet tří pozitivně semidefinitních matic.

(e) Ne. Protipříklad např. přímka.

2. Máme n naměřených dat $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ a chceme jimi proložit parabolu $p(x) = ax^2 + b$ tak, aby maximum hodnot $|p(x_i) - y_i|$ bylo minimální.
   (a) (2 b) Zformulujte tuto optimalizační úlohu maticově a specifikujte dané matice.
   (b) (3 b) Pro $n = 3$ máme data $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$. Zformulujte v tomto případě uvedený problém jako úlohu lineárního programování.
   (c) (1 b) Ukažte, že úloha z části (b) je přípustná.
   (d) (4 b) Analýzou úlohy z části (b) ukažte, že optimálním řešením nemůže být parabola, která prochází body $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$.

Řešení:

(a) Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ obsahuje v prvním sloupci x_i^2, ve druhém sloupci jedničky, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Optimalizační úloha $\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{Au} - \mathbf{y}\|_\infty$, kde $\mathbf{u} = (a, b)$ je vektor neznámých parametrů.

(b) Dostaneme $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{y} = (1, 3, 5)$. Minimalizujeme z za podmínek $-z \le b-1 \le z$, $-z \le a+b-3 \le z$, $-z \le 4a+b-5 \le z$, kde $z \ge 0$ (může být i $z \in \mathbb{R}$) a $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Přípustné řešení je např. $a = b = 0$ a $z = 5$.

(d) Předpokládejme, že v optimu parabola prochází třemi zadanými body. Potom je nutně hodnota kritéria v optimu $z = 0$. První omezení si tak vynutí $b = 1$. Dosazením do druhého omezení dostaneme $a = 2$ a do třetího omezení $a = 1$ (spor).

3. (10 b) Najděte všechny globální extrémy funkce $f(x, y, z) = -3x^2 - xy - y^2 + 2xz + x + y + 2z$ na jednotkové krychli $[0, 1]^3$ a funkční hodnoty v nich.

Řešení:

Derivace

$$f'(x, y, z) = (-6x - y + 2z + 1, -x - 2y + 1, \underbrace{2x + 2}_{>0})^\mathsf{T}$$

má v daném oboru třetí složku vždy kladnou, tedy funkce f je rostoucí v z. Má smysl hledat pouze minimum pro $z = 0$ a maximum pro $z = 1$, optimalizací přes x, y.

1. Pro $z = 0$: Funkce $f_1(x, y) = f(x, y, 0) = -3x^2 - xy - y^2 + x + y$ má derivaci

   $$f_1'(x, y) = (-6x - y + 1, -x - 2y + 1)^\mathsf{T}.$$

   Ta je nulová pro $x = 1/11$, $y = 5/11$, jenže tam nabývá f_1 svého maxima, což nepotřebujeme. Její druhá derivace (Hessova matice)

   $$f_1'(x, y) = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

   ukazuje, že f_1 je negativně definitní kvadratická forma, takže na konvexní množině (čtverci) může nabývat minima pouze v extrémech, tj. vrcholech. Vyzkoušíme je a zjistíme, že **jediné globální minimum je v bodě** $(1, 1, 0)$ **a má hodnotu** -3.

2. Pro $z = 1$: Funkce $f_2(x, y) = f(x, y, 1) = -3x^2 - xy - y^2 + 3x + y + 2$ má derivaci

   $$f_2'(x, y) = (-6x - y + 3, -x - 2y + 1)^\mathsf{T}.$$

   Ta je nulová pro $x = 5/11$, $y = 3/11$. Její druhá derivace je stejná jako v předchozím případě, f_2 je negativně definitní kvadratická forma, takže **jediné globální maximum je v bodě** $(5/11, 3/11, 1)$**; má hodnotu** $31/11 \doteq 2.818$.

Kdo předchozí úvahu neudělal, měl hledat vázané extrémy přes 6 stěn krychle. Pro $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ zůstala rovnice pro 3. souřadnici $2x + 2 = 0$, což nemá v daném oboru řešení. Pro $z = 0$, $z = 1$ má tvar $2x + 2 + \lambda = 0$, z něhož můžeme jednoznačně určit λ (které k ničemu nepotřebujeme) a zbylé dvě rovnice jsou ty, které jsme řešili výše.

4. Uvažujeme soustavu lineárních rovnic

$$x_2 = -1, \quad x_1 = 3 + x_2, \quad x_1 = 0.$$

(a) (2 b) Formulujte maticově optimalizační úlohu na hledání řešení této soustavy ve smyslu nejmenších čtverců.

(b) (1 b) Zdůvodněte, proč opt. hodnota nemůže být 0, aniž byste úlohu z bodu (a) řešili.

(c) (3 b) Úlohu z bodu (a) vyřešte.

(d) (4 b) Formulujte úlohu z bodu (a) za dodatečného předpokladu, že řešení leží na přímce $x_1 = 3 + x_2$. Nalezněte možné lokální optimum takové úlohy.

Řešení:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = (-1, 3, 0)$, úloha $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$

(b) Soustava nemá řešení, tedy nějaká souřadnice chybového vektoru $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ je nenulová. Jelikož je kvadrát Eukleidovská normy ryze konvexní nezáporná funkce, hodnota v optimu musí být kladná.

(c) Vyřešíme soustavu normálních rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{b} = (3, -4)$. Řešení je $\mathbf{x} = (\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$.

(d) Jde o úlohu nejmenších čtverců $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2$ při lineárním omezení $x_1 - x_2 - 3 = 0$. Podmínky stacionarity: $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \lambda(1, -1)$. Řešením je $\mathbf{x} = (1, -2)$ a $\lambda = 1$. Bod $\mathbf{x}$ je zjevně regulární.