Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid e^{x_1+\cdots+x_n} \leq 3\}$ je konvexní.
   (b) (2 b) Směr $\mathbf{v} = (1, -3)$ je pro funkci $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ v bodě $(1, 1)$ sestupný.
   (c) (2 b) Platí $\lambda = \min\{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice a $\lambda > 0$ je její nejmenší vlastní číslo.
   (d) (2 b) Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1000\times 500}$ má hodnost 300 a právě 200 kladných singulárních čísel.
   (e) (2 b) Problém $\min \|\mathbf{x}\|_2^2$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ je konvexní úloha.

Řešení:

(a) Ano. Funkce $f(\mathbf{x}) = e^{x_1+\cdots+x_n}$ je konvexní (složení konvexní a lineární funkce) a ta množina je její subkontura.

(b) Ne. Platí totiž $\nabla f(1, 1)^T\mathbf{v} = 14 > 0$.

(c) Ano, nejmenší vl. číslo je vždy řešením této úlohy.

(d) Ne. Hodnost matice je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

(e) Ano. Účelová funkce je konvexní, množina přípustných řešení je konvexní (afinní podprostor) a je to úloha minimalizace.

2. Uvažujte úlohu $\min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ za podmínek $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 + 2x_2 \leq 3$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.
   (a) (3 b) Popište pomocí náčrtku a výpočtu, jak vypadá konvexní polyedr přípustných řešení.
   (b) (1 b) Pro $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$ najděte optimální řešení.
   (c) (1 b) Pro $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ najděte optimální řešení.
   (d) (1 b) Pro $\mathbf{c} = (0, 0, -1)$ najděte optimální řešení.
   (e) (4 b) Napište duální úlohu pro $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$ a její optimální hodnotu.

Řešení:

(a) Projekcí toho polyedru do roviny $x_3 = 0$ je polygon s vrcholy

$$(3, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1.5, 0),$$

třetí souřadnice může nabývat hodnot $x_3 \geq 0$.

(b) Jediné optimum v bodě $(3, 0, 0)$.

(c) Optim je nekonečně mnoho, např. $(3, 0, t)$, $(1, 0, r)$ pro $r, t \geq 0$ a jejich konvexní kombinace.

(d) Úloha je neomezená.

(e) $\max y_1 - 3y_2$ z.p. $y_1, y_2 \geq 0$, $y_1 - y_2 \leq -1$, $y_1 - 2y_2 \leq 0$. Podle věty o silné dualitě je optimální hodnota -3.

3. (10 b) V rovině máte najít přímku, která má nejmenší součet čtverců vzdáleností od následujících bodů: $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$. Vyhodnoťte kritérium v nalezeném optimu/optimech.

Řešení:

Jedná se o úlohu PCA. Od zadaných bodů nejprve odečteme jejich těžiště $\bar{\mathbf{a}} = (0, 1)$ a uvažujeme pak matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dále matice

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ a vlastní vektor příslušný největšímu je $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Hledaná přímka je tedy $\bar{\mathbf{a}} + t\mathbf{v}_1 = (0, 1) + t(1, 1)$. Hodnota kritéria (chyba proložení) v optimu je $\lambda_2 = 1$.

Jiný způsob řešení: můžeme např. použít rovnici přímky ve tvaru

$$ax + by + c = 0\,,$$

kde normálový vektor bude jednotkový

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1\,.$$

(Oproti jiným tvarům rovnice přímky to má tu výhodu, že je tento popis je jednoznačný a dovoluje popsat všechny přímky.) Tedy minimalizujeme funkci

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= (-a + b + c)^2 + (c)^2 + (a + 2b + c)^2 = 2a^2 + 2ab + 5b^2 + 6bc + 3c^2\,, \\ f'(a, b, c) &= (4a + 2b,\ 2a + 10b + 6c,\ 6b + 6c)^\mathsf{T}\,, \\ f''(a, b, c) &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(pozitivně definitní)} \end{aligned}$$

za podmínky

$$g(a,b,c) = a^2 + b^2 - 1\,,$$
$$g'(a,b,c) = (2a, 2b, 0)^\mathsf{T}\,.$$

Derivace Lagrangeovy funkce s multiplikátorem λ:

$$f'(a,b,c) + \lambda g'(a,b,c) = (4a + 2b + 2\lambda a,\ 2a + 10b + 6c + 2\lambda b,\ 6b + 6c)^\mathsf{T}\,.$$

Pro stacionární body dostáváme (po vykrácení) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2a + b + \lambda a &= 0\,,\\ a + 5b + 3c + \lambda b &= 0\,,\\ b + c &= 0\,. \end{aligned}$$

z poslední rovnice hned $c = -b$ a předposlední nabývá tvar

$$a + 2b + \lambda b = 0\,.$$

Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} (2+\lambda)a + b &= 0\,,\\ a + (2+\lambda)b &= 0\,. \end{aligned}$$

Jelikož a, b nesmějí být obě nulová, potřebujeme takovou hodnotu λ, pro kterou matice soustavy bude singulární,

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0\,.$$

Řešíme zvlášť pro každý kořen kvadratické rovnice.

A. $\lambda = -3$

$$a = b = -c = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

rovnice přímky je např.

$$x + y - 1 = 0$$

a hodnota kritéria

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\,.$$

B. $\lambda = -1$

$$a = -b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

rovnice přímky je např.

$$x - y + 1 = 0$$

a hodnota kritéria

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1\,.$$

Oba stacionární body jsou lokální minima, globální minimum je řešení B.

Ještě jiný způsob řešení:
Jelikož přímku můžeme libovolně posunout (např. ve směru její normály), lze snadno zdůvodnit, že bude procházet těžištěm daných bodů, což je $(0, 1)$. Tedy stačí volit přímku ve tvaru $y = ax + 1$, neboli

$$ax - y + 1 = 0\,,$$

s normálovým vektorem velikosti $\sqrt{a^2+1}$ a hledat volný extrém funkce

$$\begin{aligned} f_*(a) &= f(a, -1, 1) = \frac{(-a)^2 + 1 + (a-1)^2}{a^2+1} = \frac{2a^2 - 2a + 2}{a^2+1}\,, \\ \frac{1}{2}f'_*(a) &= \frac{(2a-1)(a^2+1) - (a^2 - a + 1)2a}{(a^2+1)^2} = \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}\,, \\ \frac{1}{2}f''_*(a) &= \frac{-2a(a^2-3)}{(a^2+1)^3}\,. \end{aligned}$$

Stacionární body jsou $a = \pm 1$ (zde nenormujeme normálový vektor). (V tomto tvaru nelze vyjádřit svislou přímku $x = 0$, pro tu je $f(1, 0, 0) = 2$.) Pro $a = -1$ je $f_*(-1) = f(-1, -1, 1) = 3$ globální maximum funkce f_*, ale sedlový bod funkce f. Pro $a = 1$ je $f_*(1) = f(1, -1, 1) = 1$ globální minimum funkce f_* i funkce f.

4. Je dána rovina $\varrho = \operatorname{span}\{(0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ a přímka $p = \{(1, 1, 1, 1) + t\,(0, 1, 0, 1);\ t \in \mathbb{R}\}$. Hledáme vzdálenost přímky p od roviny ϱ v $\mathbb{R}^4$.
   (a) (4 b) Zformulujte problém jako řešení lineární soustavy ve smyslu nejmenších čtverců.
   (b) (4 b) Najděte bod $\mathbf{x} \in \varrho$, který je nejblíže přímce p, a bod $\mathbf{y} \in p$ nejblíže rovině ϱ.
   (c) (2 b) Najděte vzdálenost ϱ od p.

Řešení:

(a) Druhá mocnina vzdálenosti p od ϱ je rovna druhé mocnině vzdálenosti levé strany od pravé strany následující soustavy čtyř rovnic s proměnnými u, v, t:

$$(0, 0, 1, 0)\,u + (1, 0, 0, 1)\,v = (1, 1, 1, 1) + (0, 1, 0, 1)\,t.$$

Tato soustava má matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ a pravou stranu $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Je $\operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \mathbf{b}] = 4$, takže $\mathbf{b} \notin \operatorname{rng}\mathbf{A}$ a jedná se o přeurčenou soustavu lineárních rovnic a přímka s rovinou

se neprotínají. Protože $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 3$, není přímka s rovinou rovnoběžná. Jsou to tedy dva mimoběžné afinní prostory.

(b) Vyřešíme soustavu ve smyslu nejmenších čtverců, tedy řešíme $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, konkrétně

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Řešením je $(u, v, t) = (1, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. Tedy je $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0) + \frac{2}{3}(1, 0, 0, 1) = (\frac{2}{3}, 0, 1, \frac{2}{3})$, $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 1) - \frac{2}{3}(0, 1, 0, 1) = (1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3})$.

(c) Hledaná vzdálenost je $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = ||(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})|| = \frac{1}{3}\,||(-1, -1, 0, 1)|| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.