Příjmení a jméno: ______________________________

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Pro matici $\mathbf{A}$ s lin. nezávislými sloupci je každé vlastní číslo matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ kladné.
   (b) (2 b) Matice $\begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ má všechna singulární čísla kladná.
   (c) (2 b) Pro negativně definitní matici $\mathbf{A}$ je množina $\{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq y\}$ konvexní.
   (d) (2 b) Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{10\times 9000}$ je následující úloha konvexní: $\min \sum_{j=1}^{7} \mathbf{x}_j^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x}_j$ za podmínky, že vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_7 \in \mathbb{R}^{10}$ tvoří ortonormální množinu.
   (e) (2 b) Pro zadané $\alpha > 0$, matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ je následující úloha konvexní: $\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ za podmínek $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \alpha$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:

(a) Ano, protože $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární a pozitivně semidefinitní, tedy nutně pozitivně definitní, a tak má jen kladná vlastní čísla.

(b) Ne, protože snadno nahlédneme, že $\mathbf{A}$ má hodnost 2 (první řádek je násobkem druhého).

(c) Ne. Je to epigraf konkávní funkce (např. plocha nad parabolou $-x^2$), což je typicky nekonvexní množina.

(d) Ne. Je to vlastně instance úlohy PCA. Účelová funkce je konvexní, ale netriviální konvexní kombinace dvou jednotkových vektorů nemá jednotkovou délku.

(e) Ano. Je to úloha nejmenších čtverců s konvexními omezeními, protože $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \alpha$ definuje subkonturu konvexní funkce.

2. Je dána matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = (1, 1, 1).$$

   Najděte kolmé projekce vektoru $\mathbf{x}$ na
   (a) (2 b) $\operatorname{span}\{(1, 1, 2)\}$,
   (b) (2 b) $\operatorname{rng}\mathbf{A}$,
   (c) (2 b) $\operatorname{null}\mathbf{A}$,
   (d) (2 b) $\operatorname{rng}\mathbf{A}^T$,

(e) (2 b) null $\mathbf{A}^T$.

Řešení:

(a) Kolmá projekce je $2/3\,(1,1,2)$.

(b) Projekci spočítáme například jako $\mathbf{x}$ minus řešení (e), vychází $1/5\,(3,6,5)$.

(c) $\operatorname{null}\mathbf{A} = \operatorname{span}\{(1,1,-1)\}$ a kolmá projekce je $1/3\,(1,1,-1)$.

(d) Projekci spočítáme například jako $\mathbf{x}$ minus řešení (c), vychází $2/3\,(1,1,2)$.

(e) $\operatorname{null}\mathbf{A}^T = \operatorname{span}\{(2,-1,0)\}$ a kolmá projekce je $1/5\,(2,-1,0)$.

3. (10 b) Najděte globální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2\,x + y^2 + 2\,y + 3$$

za podmínek

$$x^2 + y^2 \le 4\,,$$
$$3\,x + 2\,y \le -6\,.$$

Znázorněte obor, na kterém extrémy hledáme, a nezapomeňte zformulovat závěr, k němuž jste dospěli.

Řešení:

Všechny funkce v úloze jsou všude diferencovatelné.

1. Volné extrémy dostaneme řešením soustavy

$$f'(x,y) = (2(x+1), 2(y+1)) = \mathbf{0}\,,$$

$x = y = -1$, $f(-1,-1) = 1$. Funkce f je ryze konvexní, takže $(-1,-1)$ je její jediné volné minimum, ale nesplňuje druhou omezující podmínku.

2. Extrémy vázané podmínkou $g_1(x,y) = 0$, kde $g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, dostaneme řešením soustavy

$$f'(x,y) + \lambda_1\, g_1'(x,y) = (2(x+1) + 2\,\lambda_1\, x, 2(y+1) + 2\,\lambda_1\, y) = \mathbf{0}\,,$$

$x = y = \frac{-1}{1+\lambda_1}$, dosazením do omezující podmínky $x^2 + y^2 - 4 = 0$ dostaneme $x = y = -\sqrt{2}$ (druhé řešení $x = y = \sqrt{2}$ je mimo obor), $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 7 - 4\sqrt{2} \doteq 1.343$. Je to lokální minimum.

3. Extrémy vázané podmínkou $g_2(x,y) = 0$, kde $g_2(x,y) = 3\,x + 2\,y + 6$, dostaneme řešením soustavy

$$f'(x,y) + \lambda_2\, g_2'(x,y) = (2(x+1) + 3\,\lambda_2, 2(y+1) + 2\,\lambda_2) = \mathbf{0}\,,$$

$x = -1 - \frac{3}{2}\lambda$, $y = -1 - \lambda$, dosazením do omezující podmínky $3\,x + 2\,y + 6 = 0$ dostaneme $\lambda = \frac{2}{13}$, $x = -\frac{16}{13}$, $y = -\frac{15}{13}$, $f(\frac{16}{13}, \frac{15}{13}) = \frac{14}{13} \doteq 1.077$. Je to lokální minimum (minimum ostře konvexní funkce na konvexní množině – úsečce).

4. Rovnosti v obou omezujících podmínkách nastávají současně ve dvou bodech, které dostaneme řešením soustavy

$$x^2 + y^2 = 4\,,$$
$$3\,x + 2\,y = -6\,.$$

Z druhé rovnice vyjádříme $y = -3 - \frac{3}{2}\,x$ a dosazením do první dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{13}{4}\,x^2 + 9\,x + 5 = 0$$

s řešeními
$x_1 = -2$, $y_1 = 0$, $f(x_1, y_1) = 3$,
$x_2 = -\frac{10}{13}$, $y_2 = -\frac{24}{13}$, $f(x_2, y_2) = \frac{23}{13} \doteq 1.769$.
Tyto body jsou lokální maxima, neboť relevantní část Hessovy matice Lagrangeovy funkce je pro $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$

$$\begin{bmatrix} 2\,(1+\lambda_1) & 0 & \dots \\ 0 & 2\,(1+\lambda_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

tedy pozitivně definitní v prvních dvou proměnných (x, y).

Závěr: V $(\frac{16}{13}, -\frac{15}{13})$ (z části 3) je jediné globální minimum (jedná se o minimum ostře konvexní funkce na konvexním oboru), v $(-2, 0)$ (z části 4) je jediné globální maximum.

4. Fitness centrum nakupuje oříšky, banány a mléko do energetického koktejlu. Jednotkové ceny oříšků, banánů a mléka jsou $(3, 1, 4)$, cílem je minimalizace nákladů na jejich pořízení. Zohlednit se musí minimální požadavky na živiny tří různých druhů, které jsou vyjádřeny vektorem $(3, 2, 4)$. Oříšky obsahují jednotku první i druhé živiny a dvě jednotky třetí živiny, banány pouze dvě jednotky první živiny a tři jednotky třetí živiny, a mléko obsahuje pouze dvě jednotky druhé živiny a jednotku třetí živiny.
   (a) (3 b) Formulujte úlohu jako lineární program.
   (b) (3 b) Napište duální úlohu.
   (c) (2 b) Optimální řešení duálu je $(\frac{1}{2}, 2, 0)$. Stanovte optimální řešení primární úlohy bez jejího řešení.
   (d) (2 b) Je optimální řešení duálu vrcholem polyedru? Vysvětlete přesně, proč ano/ne.

Řešení:

(a) $\min 3x_1 + x_2 + 4x_3$ z.p. $x_1 + 2x_2 \geq 3$, $x_1 + 2x_3 \geq 2$, $2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4$, kde $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

(b) $\max 3y_1 + 2y_2 + 4y_3$ z.p. $y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3$, $2y_1 + 3y_3 \leq 1$, $2y_2 + y_3 \leq 4$, kde $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

(c) Podle věty o slabé dualitě stačí uhodnout přípustný vektor $\mathbf{x}^*$ splňující

$$3x_1^* + x_2^* + 4x_3^* = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = \frac{11}{2}.$$

Snadno nalezneme $\mathbf{x}^* = (0, \frac{3}{2}, 1)$.

(d) Ano, je to řešení soustavy $y_3 = 0$, $2y_1 + 3y_3 = 1$, $2y_2 + y_3 = 4$, jejíž matice má lin. nezávislé sloupce.