Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, má globální minimum v bodě $\mathbf{0}$ pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (b) (2 b) Množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_1 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + 1 \le \frac{1}{4}\ \}$ je konvexní.
   (c) (2 b) Funkce $f(\mathbf{x}) = \max\{\|\mathbf{x}\|_\infty, 2\}$ je konvexní.
   (d) (2 b) Konvexní obal bodů $(0,0), (0,1), (2,0)$ je obsažen v množině $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \le 2\}$.
   (e) (2 b) Problém $\min\{2x_1 - x_3 \mid \|\mathbf{x}\|_2 \le 3,\ x_1 \ge 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}$ je úloha lineárního programování.

Řešení:

(a) Ne. Protipříklad: $f(x) = -x^2$.

(b) Ne. Je to sjednocení dvou různých úseček (stačí náčrtek).

(c) Ano, je to maximum dvou konvexních funkcí.

(d) Ano, každý bod toho trojúhelníka má všechny souřadnice ≤ 2.

(e) Ne. Omezení jsou nelineární, množina přípustných řešení není polyedr.

2. Jsou dány dvě mimoběžky v $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, každá je zadána bodem, kterým prochází, a směrovým vektorem. Najděte jejich vzdálenost metodou nejmenších čtverců.
   (a) (5 b) Zformulujte problém jako optimalizační úlohu a sestavte příslušnou soustavu normálních rovnic umožňující vyřešit problém.
   (b) (5 b) Vyřešte úlohu pro případ dvou mimoběžných přímek v $\mathbb{R}^3$, jedna z nich je osa x_1 a druhá prochází body $(0,1,0)$ a $(0,0,2)$.

Řešení:

(a) Nechť jsou přímky popsány jako $\{\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1 \,|\, t_1 \in \mathbb{R}\}$ a $\{\mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{s}_2 \,|\, t_2 \in \mathbb{R}\}$. Hledá se minimum $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ za podmínek, že $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2 + t_1\mathbf{s}_2$. Řešíme přeurčenou soustavu s n rovnicemi a dvěma proměnnými t_1, t_2: $\mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{s}_2$. Soustavu lze zapsat maticově $\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & -\mathbf{s}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix} = [\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1]$. Soustavu normálních rovnic dostaneme po vynásobení maticí $\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1^T\\ -\mathbf{s}_2^T\end{bmatrix}$ zleva:

$$\begin{bmatrix}\|\mathbf{s}_1\|^2 & -\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_2\\ -\mathbf{s}_1^T\mathbf{s}_2 & \|\mathbf{s}_2\|^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{s}_1^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)\\ -\mathbf{s}_2^T(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)\end{bmatrix}.$$

(b) Volíme $\mathbf{a}_1 = (0,0,0)$, $\mathbf{s}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{s}_2 = (0,-1,2)$ a řešíme soustavu normálních rovnic uvedenou obecně v (a). Máme soustavu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

takže $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{5}$ a vzájemně nejbližší body na mimoběžkách jsou $(0,0,0)$, $(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5})$. Jejich vzdálenost je $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. (10 b) Najděte všechny lokální i globální extrémy funkce $f(x,y) = x\,y - 3\,x$ za podmínky $x^2 + y^2 \leq 9$. Funkci f v nich vyhodnoťte a řekněte, o jaký typ extrému se jedná.

Řešení:

Vše jsou polynomy, mají všechny derivace spojité.

$$f'(x,y) = (y-3, x)\,,$$
$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

A. Volné extrémy dostaneme řešením soustavy

$$f'(x,y) = (y-3, x) = \mathbf{0}\,,$$

$x = 0$, $y = 3$, $f(0,3) = 0$, ale

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(pro všechna x, y), což je negativně semidefinitní matice, pro $\varepsilon \neq 0$

$$f(\varepsilon, 3+\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0\,,$$
$$f(\varepsilon, 3-\varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0\,,$$

takže $(0,3)$ je sedlový bod a žádný extrém. Volný extrém neexistuje.

B. Extrémy vázané podmínkou $g(x,y) = 0$, kde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$, dostaneme jako stacionární body Lagrangeovy funkce $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$, tj. řešením soustavy

$$f'(x,y) + \lambda\, g'(x,y) = (y - 3 + 2\,\lambda\, x, x + 2\,\lambda\, y) = \mathbf{0}\,,$$

tj.

$$2\,\lambda\, x + y = 3\,,$$
$$x + 2\,\lambda\, y = 0\,.$$

Součet a rozdíl těchto rovnic dá

$$x + y = \frac{3}{2\,\lambda + 1}\,,$$
$$x - y = \frac{3}{2\,\lambda - 1}\,.$$

(Pokud by jmenovatel byl nulový, řešení neexistuje.) Součet a rozdíl těchto rovnic dá

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\,\lambda + 1} + \frac{3}{2\,\lambda - 1}\right) = \frac{6\,\lambda}{4\,\lambda^2 - 1}\,,$$
$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\,\lambda + 1} - \frac{3}{2\,\lambda - 1}\right) = \frac{-3}{4\,\lambda^2 - 1}\,.$$

Dosazením do omezující podmínky $x^2 + y^2 - 9 = 0$ dostaneme

$$\frac{-144\,\lambda^4 + 108\,\lambda^2}{(4\,\lambda^2 - 1)^2} = 0\,.$$

Čitatel je $36\,\lambda^2\,(-4\,\lambda^2 + 3)$ a je nulový pro $\lambda \in \left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Tomu odpovídají následující body:

1. $\lambda = 0$, $x = 0$, $y = 3$; $f(0, 3) = 0$. Není extrém.
2. $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.866$, $x = 3\,\lambda = \frac{3}{2}\sqrt{3} \doteq 2.598$, $y = \frac{-3}{2}$; $f(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2}) = -\frac{27}{4}\sqrt{3}$. Je to globální minimum.
3. $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \doteq -0.866$, $x = 3\,\lambda = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \doteq -2.598$, $y = \frac{-3}{2}$; $f(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2}) = \frac{27}{4}\sqrt{3}$. Je to globální maximum.

Zdůvodnění: Relevantní část Hessovy matice Lagrangeovy funkce

$$\begin{bmatrix} 2\,\lambda & 1 & \dots \\ 1 & 2\,\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

je pro $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pozitivně definitní a pro $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ negativně definitní v prvních dvou proměnných (x, y). Pro $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ je negativně semidefinitní, což nedává rozhodnutí. Ale např. derivace kritéria podél hranice množiny (kružnice) je spojitá, tedy nemůže měnit znaménko jinde než ve stacionárních bodech a mezi nimi je monotónní.

Závěr: V bodě $(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2})$ je globální minimum, v bodě $(-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{-3}{2})$ je globální maximum. Jiné extrémy (ani lokální) neexistují.

4. Uvažujeme matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) (1 b) Bez počítání zdůvodněte, proč má matice $\mathbf{A}$ právě jedno singulární číslo nulové.

   (b) (3 b) Spočtěte všechna singulární čísla matice $\mathbf{A}$.

   (c) (3 b) Stanovte levé a pravé singulární vektory matice $\mathbf{A}$.

   (d) (3 b) Vyřešte úlohu $\min \{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 \mid \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \operatorname{rank} \mathbf{B} \leq 2\}$.

Řešení:

(a) Matice řádu 4 má hodnost 3, tedy má právě 3 kladná singulární čísla a jedno nulové.

(b) Dostaneme

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Tedy singulární čísla jsou $s_1 = 3, s_2 = 2, s_3 = 1, s_4 = 0$.

(c) Levé singulární vektory jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, snadno je nalezneme z definice. Rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{u} = 9\mathbf{u}$$

řeší např. $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 0, 1)$. Dále $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, 0, 0)$ a $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, 0)$. Analogicky stanovíme pravé singulární vektory: $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$.

(d) Optimální řešení (Eckart-Young) je

$$\mathbf{B}^* = s_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + s_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$