Příjmení a jméno: _____

Úloha	1	2	3	4	*Celkem*
Maximum	10	10	10	10	40
Počet bodů					

1. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení (ano/ne) a každou odpověď zdůvodněte.
   (a) (2 b) Funkce $f(x_1, x_2, x_3) = |x_2 - x_3| + |x_1|$ je konvexní.
   (b) (2 b) Průnik epigrafů funkcí $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $g(x) = x$ je konvexní množina.
   (c) (2 b) Z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ lze vždy sestavit ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^m$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
   (d) (2 b) Matice $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ má hodnost 1, kde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{100}$ je nenulový vektor.
   (e) (2 b) Pro zadanou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ nemusí mít úloha $\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ globální minimum.

Řešení:

(a) Ano, je to součet dvou konvexních funkcí, z nichž ta první je konvexní, protože absolutní hodnota je konvexní funkce a její argument je zde lineární funkce.

(b) Ano, obě množiny jsou konvexní a jejich průnik tedy také.

(c) Ano, to zaručuje věta o spektrálním rozkladu pro reálnou symetrickou matici $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

(d) Ano. Ta matice je dyáda, jejíž každý řádek je jen násobkem $\mathbf{u}^T$ a ne všechny takto vzniklé řádky jsou nulové.

(e) Ne. Je to úloha nejmenších čtverců a ta je konvexní.

2. Máme množinu $X = \{(x, y, z) \mid x = t, y = 2t, z = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}\}$.
   (a) (5 b) Najděte nějakou matici $\mathbf{A}$ a nějaký vektor $\mathbf{b}$ tak, aby platilo $X = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}\}$.
   (b) (5 b) Jaká je vzdálenost bodu $(1, 1, 1)$ od množiny X? Uveďte dva rozdílné způsoby výpočtu.

Řešení:

(a) X je přímka $\mathrm{span}\{(1, 2, -1)\} + (0, 0, 1)$. Řádky matice $\mathbf{A}$ musejí být kolmé na směrový vektor přímky, leží tedy v null $[1\ 2\ -1]$, máme například $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Vektor $\mathbf{b}$ dopočítáme z faktu, že $(0, 0, 1)$ leží v X, tedy $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Na vzdálenost bodu $\mathbf{v}$ od afinního prostoru $\{\mathbf{u} \mid \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}\}$ lze uplatnit vzoreček $\sqrt{(\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b})}$, nebo použijeme vzorec pro vzdálenost přímky $A + \mathbf{s}\,t$ od

bodu B: $\frac{\|(B-A)\times\mathbf{s}\|}{\|\mathbf{s}\|}$, nebo provedeme projekci posunutého bodu $B-A$ na přímku $\operatorname{span}\{\mathbf{s}\}$ a následně určíme vzdálenost této projekce od bodu $B-A$. Ve všech případech vyjde vzdálenost $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Další alternativa je vyřešit optimalizační úlohu hledání minima kvadrátu vzdálenosti bodu na přímce $(t, 2t, 1-t)$ od bodu $(1,1,1)$. Minimum nastává pro $t=\frac{1}{2}$, průmět tedy je $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ a vzdálenost je $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Hledáme lokální minimum funkce

$$f(x,y) = \frac{3}{4}\,x^3 + 4\,x^2 + 12\,x\,y + 12\,y^2 - 28\,x - 48\,y + 52\,.$$

Počáteční odhad je $(x_0, y_0) = (0, 2)$.

(a) (4 b) Proveďte jeden krok gradientní metodou s optimální délkou kroku a vypočtěte funkční hodnotu v novém bodě.

(b) (4 b) Proveďte jeden krok Newtonovou metodou a vypočtěte funkční hodnotu v novém bodě.

(c) (2 b) Daná funkce má lokální minimum. Vyjádřete se k tomu, zda ho může gradientní metoda nalézt (z nějakého počátečního bodu) a zda to může být globální minimum.

Řešení:

Vše jsou polynomy, mají všechny derivace spojité.

$$\begin{aligned}
f'(x,y) &= (\tfrac{9}{4}\,x^2 + 8\,x + 12\,y - 28, 12\,x + 24\,y - 48)\,,\\
f''(x,y) &= \begin{bmatrix} \frac{9}{2}\,x + 8 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}\,,\\
f(x_0,y_0) &= 4\,,\\
f'(x_0,y_0) &= (-4, 0)\,,\\
f''(x_0,y_0) &= \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}\,,\\
(f''(x_0,y_0))^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}\,.
\end{aligned}$$

1. (4 b.) Gradientní metoda:

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1) &= (x_0,y_0) - \alpha\, f'(x_0,y_0) = (4\alpha, 2)\,,\\
\varphi(\alpha) &= f(x_1,y_1) = 48\,\alpha^3 + 64\,\alpha^2 - 16\,\alpha + 4\,,\\
\varphi'(\alpha) &= 144\,\alpha^2 + 128\,\alpha - 16\,.
\end{aligned}$$

Podmínka $\varphi'(\alpha) = 0$ je ekvivalentní

$$9\,\alpha^2 + 8\,\alpha - 1 = 0\,.$$

Zajímá nás jen kladné řešení (v sestupném směru),

$$\alpha = \frac{-8 + \sqrt{8^2 + 4 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9}\,,$$
$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{9}, 2\right),$$
$$f(x_1, y_1) = \frac{748}{243} \doteq 3.078\,.$$

2. (4 b.) Newtonova metoda (krok značíme stejně):

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - f''(x_0, y_0)^{-1}\, f'(x_0, y_0)^{\mathsf{T}} = (0, 2) - (-2, 1) = (2, 1)\,,$$
$$f(x_1, y_1) = 6\,.$$

Výsledek Newtonovy metody může být zklamáním. Zkusíme ho vysvětlit. Funkce f bez prvního členu $\frac{3}{4}\,x^3$ je pozitivně definitní kvadratická forma $(x-2)^2+3\,(x+2\,y-4)^2$, která má globální minimum 0 v bodě $(2, 1)$. To by Newtonova metoda našla v jednom kroku. Člen $\frac{3}{4}\,x^3$ situaci změnil, ale nezměnil postup, neboť má v počátečním bodě nulouvou první i druhou derivaci.

3. (2 b.) Lokální minimum lze nalézt gradientní metodou, bude-li vhodně volena velikost kroku. Nemůže to být globální minimum, protože pro velké záporné hodnoty x dovolí člen s nejvyšší mocninou, $\frac{3}{4}\,x^3$, libovolně nízkou hodnotu funkce f.

4. Minimalizujeme funkci $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_2$ za podmínek $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 8$, $4x_1 + x_2 \leq 20$, $x_2 \leq 6$.
   (a) (4 b) Vyřešte tuto úlohu a zdůvodněte postup.
   (b) (3 b) Formulujte duální úlohu.
   (c) (3 b) Vyřešte duální úlohu pomocí podmínek komplementarity.

Řešení:

Omezení tvoří konvexní polyedr, který je konvexním obalem bodů $(0, 0)$, $(0, 6)$, $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(5, 0)$. O tom se lze předsvědčit náčrtkem nebo řešením odpovídajích soustav lineárních rovnic. Minimální hodnota účelové funkce -12 nastává v $(0, 6)$. Duální úloha: maximalizuj $-8y_1 - 20y_2 - 6y_3$ za podmínek $y_1, y_2, y_3 \geq 0$, $-y_1 - 4y_2 \leq 2$, $-y_1 - y_2 - y_3 \leq -2$. Jelikož nejsou v optimu první dvě primární omezení těsná, maximum duální úlohy musí nastat v bodě $(0, 0, y_3)$. Pomocí druhého omezní duálu pak zjistíme, že $y_3 = 2$.