OPT midterm 17.5.2024 | Příjmení: Jméno: | 000

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. Uvažujte úlohu max $3x_1 + 4x_2$ při omezení $x_1 - 2x_2 \leq 4$, $-4x_1 + 2x_2 \leq 8$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

   a) Nalezněte optimální řešení, pokud existuje. (2 body)
   b) Napište duální úlohu. (2 body)
   c) Nalezněte optimální řešení duálu, pokud existuje. (1 bod)

   a) Úloha je neomezená. Množina přípustných řešení je neomezený konvexní polyedr s vrcholy $(0,0), (4,0), (0,4)$ obsahující polopřímku (t,t) pro $t \geq 0$. Účelová funkce na té polopřímce roste do nekonečna. b) Duální úloha je min $4y_1 + 8y_2$ za podmínek $y_1 - 4y_2 \geq 3$, $-2y_1 + 2y_2 \geq 4$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$. c) Protože je primární úloha neomezená, duál je nutně nepřípustná úloha. Jinak lze argumentovat přímo tak, že součet dvojnásobku první nerovnice s druhou nerovnicí v omezení duálu dává podmínku $-6y_2 \geq 10$, kterou nelze splnit pro nezáporné proměnné.

2. Rozhodněte a vysvětlete, proč je/není uvedená funkce konvexní (každá úloha za 1 bod).

   a) $f(x) = |x| - 1 + x^4$, kde $x \in \mathbb{R}$
   b) $f(\mathbf{x}) = \|(x_1, x_2, x_3) - (x_4, x_5, x_6)\|_1$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$
   c) $f(x) = \min\{x, 0\}$, kde $x \in \mathbb{R}$
   d) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + b$, pro nějaké $b \in \mathbb{R}$ a symetrickou matici $\mathbf{A}$ se zápornými vlastními čísly
   e) $f(c_1, c_2) = \max\{c_1 x_1 - c_2 x_2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2\}$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

   a) Konvexní. Je to součet tří konvexních funkcí (absolutní hodnota je konvexní, protože je maximem lineárních funkcí, konstanta je konvexní a x^4 je konvexní, což nahlédneme podle znaménka druhé derivace). b) Konvexní. Norma je konvexní a vnitřní zobrazení je lineární. c) Není konvexní, je konkávní, např. je to vidět z grafu. d) Není konvexní, je konkávní, protože ta matice je negativně definitní. e) Konvexní, protože je maximem lineárních funkcí $f_{\mathbf{x}}(c_1, c_2) = c_1 x_1 - c_2 x_2$ proměnných c_1, c_2.

OPT midterm 17.5.2024 | Příjmení: Jméno: | 000

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.
(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

	1
a	
b	
c	
d	
e	

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. Uvažujte úlohu lineárního programování $\min 2x_1 - x_2$ za podmínek $x_2 \leq 1$, $1 \leq x_1 \leq 2$, $2x_1 + x_2 \geq 1$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

   a) Napište duální úlohu (2 body).
   b) Určete optimální hodnotu duální úlohy (3 body).

a) Omezení primární úlohy můžeme ekvivalentně vyjádřit takto: $-x_2 \geq -1$, $x_1 \geq 1$, $-x_1 \geq -2$, $2x_1 + x_2 \geq 1$. Tak dostaneme duální proměnné $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ a omezení $y_2 - y_3 + 2y_4 = 2$, $-y_1 + y_4 = -1$, maximalizujeme účelovou funkci $-y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4$. b) Snadněji vyřešíme primární úlohu, podle věty o silné dualitě má duál stejnou optimální hodnotu. Nalezneme všechny vrcholy omezeného konvexního polyedru definovaného primárními omezeními pomocí řešení soustav odpovídajících lineárních rovnic. Vrcholy: $(1,1), (2,1), (1,-1), (2,-3)$. Minimum je v bodě $(1,1)$ a má hodnotu 1.

2. Rozhodněte a vysvětlete, proč je/není uvedená množina konvexní (každá úloha za 1 bod).

   a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_\infty = 14\}$
   b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x_1 - x_2} \leq 3\}$
   c) Konvexní obal bodů $(1,1), (2,0), (0,-1)$ bez bodu $(2,0)$
   d) $\arg \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1} \|\mathbf{x}\|_2^2$
   e) $\arg \min_{\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}} \mathbf{c}^T\mathbf{x} + b$, pro matici $\mathbf{A}$, vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ a $b \in \mathbb{R}$

a) Není konvexní, je to vrstevnice výšky 14 Čebyševovy normy (čtverec bez vnitřku). b) Konvexní množina, protože jde o subkonturu konvexní funkce (složení exp. funkce s lineární). c) Konvexní, protože bod $(2,0)$ je vrcholem a jeho odebrání tak nenaruší konvexitu. d) Není konvexní, je to množina $\{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$. e) Konvexní. Je to množina optimálních řešení LP, což je konvexní polyedr.

OPT midterm 17.5.2024 | Příjmení: Jméno: | 000

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.
(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

	1
a	
b	
c	
d	
e	

Správně je vždy (a)

1. Nechť K je epigraf funkce $f(x) = |x|$, kde $x \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, co platí.
   (a) neplatí žádné uvedené tvrzení
   (b) množina K není konvexní
   (c) množina K nemá extremální bod
   (d) $(1, 0) \in K$
   (e) každá přímka procházející bodem $(0, 0)$ je opěrná nadrovina k množině K

2. Rozhodněte, co je pravdivé tvrzení.
   (a) Konvexní obal 5 bodů v $\mathbb{R}^n$ má extremální bod.
   (b) Množina všech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ splňujících $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ je neprázdná pro libovolnou volbu matice $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{b}$.
   (c) Každý konvexní polyedr má alespoň jeden extremální bod.
   (d) Každá lineární funkce 2 proměnných má minimum na množině dané podmínkami $x_1, x_2 \geq 0$ a $2x_1 - x_2 \geq 1$.
   (e) Neplatí žádné uvedené tvrzení.

3. Lineární program $\min\{c_1x_1 + c_2x_2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \geq 1\}$ má optimum v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, pokud platí:
   (a) $c_1 = 1$ a $c_2 = 2$.
   (b) $c_1 = 0$ a $c_2 = 1$.
   (c) $c_2 > 0$.
   (d) $c_1 = -1$ a $c_2 = -1$.
   (e) Nic z uvedeného.

4. Uvažujme bod $\mathbf{x} = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(0, \frac{1}{2}, -1) + (1 - \alpha - \beta)(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 0)$ pro nějaká $\alpha, \beta \geq 0$ splňující $\alpha + \beta \leq 1$. Platí:
   (a) $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1$.
   (b) Bod $\mathbf{x}$ má třetí souřadnici kladnou.
   (c) $\mathbf{x} \neq (-1, 1, 0)$.
   (d) Bod $\mathbf{x}$ leží na úsečce s krajními body $(-1, 1, 0)$ a $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 0)$.
   (e) Nic z uvedeného.

5. Funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d$ nabývá maxima v bodě $\mathbf{x}^*$ při omezení $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$. Co z toho plyne?
   (a) Nic z uvedeného.
   (b) Platí $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$ pro všechna $\mathbf{x}$ splňující $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.
   (c) Bod $\mathbf{x}^*$ je vrcholem konvexního polyedru, který je definován nerovnicemi $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.
   (d) Platí $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$.
   (e) Bod $\mathbf{x}^*$ je konvexní kombinací dvou různých vrcholů množiny přípustných řešení.

6. Duální úloha k úloze lineárního programování
   (a) může být neomezená
   (b) má vždy globální maximum, které zdola omezuje primární úlohu
   (c) má vždy optimální řešení
   (d) je vždy přípustná
   (e) je vždy úlohou maximalizace

7. Rozhodněte, co je pravdivé tvrzení.
   (a) Pokud je primární i duální úloha přípustná, optimální hodnoty obou úloh jsou stejné.

(b) Primární i duální úloha mohou být současně neomezené.
(c) Primární úloha může mít optimum a současně je její duál neomezený.
(d) Duální proměnné jsou vždy nezáporné.
(e) Duálních proměnných nemůže být více než primárních proměnných.

8. Pro funkci $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e^{\beta_i x_1}$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \geq 0$, vždy platí:
   (a) je konvexní
   (b) je konkávní
   (c) je afinní
   (d) je lineární
   (e) neplatí žádné uvedené tvrzení

9. Funkce $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{10} |x_i|$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{100}$,
   (a) má konvexní subkontury
   (b) nemá konvexní epigraf
   (c) je norma
   (d) je lineární
   (e) nesplňuje nic z uvedeného

10. Co z uvedené platí pro optimalizační úlohu max $\sum_{i=1}^{n} x_i$ za podmínky $\|\mathbf{x}\|_1 \leq 1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$?
    (a) Jde o úlohu lineárního programování
    (b) Nemá optimální řešení
    (c) Účelová funkce není konvexní
    (d) Množina přípustných řešení je prázdná
    (e) Nic z uvedeného