OPT midterm 27.3.2024

Příjmení:	Jméno:	000

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (3 body) Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Najděte báze těchto podprostorů: $\operatorname{rng} \mathbf{A}$, $\operatorname{null} \mathbf{A}$, $(\operatorname{rng} \mathbf{A})^\perp$, $(\operatorname{null} \mathbf{A})^\perp$.

Matice má rank $= 3$, první tři její sloupce jsou LN, takže mohou tvořit bázi $\operatorname{rng} \mathbf{A}$.
Řešením soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je například $(-1, -1, 0, 3)$, takže může tvořit bázi $\operatorname{null} \mathbf{A}$.
Řešením soustavy $\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je například $(1, -1, 1, -1)$, takže může tvořit bázi $(\operatorname{rng} \mathbf{A})^\perp$.
Protože $(\operatorname{null} \mathbf{A})^\perp = \operatorname{rng} \mathbf{A}^T$ a první tři řádky matice $\mathbf{A}$ jsou LN, mohou tvořit bázi $(\operatorname{null} \mathbf{A})^\perp$

2. (2 body) Najděte nejmenší vzdálenost bodu $\mathbf{z} = (0, 1, 1, 0)$ od množiny všech bodů $\mathbf{x}$, které jsou řešením rovnice $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 5$, kde $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 0)$. Použitý vzorec zdůvodněte.

Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od nadroviny $\mathbf{a}^T\mathbf{x} - b$ je stejná, jako vzdálenost projekce $\mathbf{z}$ od projekce partikulárního řešení $\mathbf{p}$ do $\operatorname{rng} \mathbf{a}$, což jest

$$\left\| \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{z}}{\|\mathbf{a}\|^2} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{p}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{z} - b)\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} |\mathbf{a}^T\mathbf{z} - b|,$$

v našem případě $(1/3)\,|4 - 5| = 1/3$.

3. (2 body) Najděte spektrální rozklad matice $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve tvaru $a_1\mathbf{M}_1 + a_2\mathbf{M}_2$.

Charakteristický polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ dává vlastní čísla $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 1$, těm odpovídají normované vlastní vektory $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ a $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ a platí

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \lambda_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \lambda_2\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Pozorujeme data $(0, 1), (1, 4), (2, 10), (3, 20)$ ve tvaru (x_i, y_i). Hledáme optimální regresní funkci $y = \alpha x + \beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou neznámé parametry.

   a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.
   b) (2 body) Vyřešte tento problém a výsledek zaokrouhlete na 1 desetinné místo.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Hledáme $\mathbf{z} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ minimalizující $\|\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}\|^2$. To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$, což je soustava

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 35 \end{bmatrix},$$

jejíž jediné řešení je přibližně $\alpha = 6.3$ a $\beta = -0.7$.

OPT midterm 27.3.2024 Příjmení: Jméno: 000

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

	1
a	
b	
c	
d	
e	

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. Nechť $X = \text{span}\{(1,2,2,1),(2,1,1,2),(1,1,2,2)\}$, $\mathbf{z} = (3,0,3,0)$. Najděte kolmou projekci vektoru $\mathbf{z}$

   a) na X,
   b) na $X^\perp$.

Je snadnější začít podúlohou b), protože $X^\perp$ má dimenzi 1 a jeho bázi tvoří nějaké nenulové řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, kde zadané tři vektory tvoří řádky matice $\mathbf{A}$. Je tedy $X^\perp = \text{span}\{(-1,1,-1,1)\}$. Při značení $\mathbf{u} = (-1,1,-1,1)/2$ (tento vektor má jednotkovou velikost a leží v $X^\perp$) je projekce na $X^\perp$ rovna $\mathbf{uu}^T\mathbf{z} = (-1,1,-1,1)/2(-6/2) = (3/2)(1,-1,1,-1)$.
Projekce na X je rejekce na $X^\perp$ a tedy je $(3,0,3,0) - (3/2)(1,-1,1,-1) = (3/2)(1,1,1,1)$.

2. Najděte ortonormální bázi nulového prostoru zobrazení $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, které je dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ jsou například vektory $(0,1,0,-1),(1,0,-1,0)$. Jsou LN a tvoří bázi množiny řešení, protože $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 2$. Jsou na sebe kolmé. Aby tvořily ortonormální bázi, stačí je normalizovat: $\{(0,1,0,-1)/\sqrt{2},\ (1,0,-1,0)/\sqrt{2}\}$.

3. Závislost proměnné z na proměnných x, y modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x,y) = a(xy)^2 + b\,(x+y)^2 + c$. Odhadujeme parametry $a,b,c \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů (x_i,y_i,z_i), $i = 1,\ldots,50$, ve smyslu nejmenších čtverců.

   a) (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.
   b) (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné optimální řešení? Takové řešení napište.

a) Vektor neznámých parametrů je $\mathbf{p} = (a,b,c)$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{50\times 3}$ má v řádku i vektor $((x_iy_i)^2,(x_i+y_i)^2,1)$ a dále $\mathbf{z} = (z_1,\ldots,z_{50})$. Hledáme minimum funkce $\|\mathbf{Ap} - \mathbf{z}\|^2$. b) Má-li $\mathbf{A}$ lineárně nezávislé sloupce, pak je jediné optimální řešení $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$.

4. (2 body) Najděte spektrální rozklad matice $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ve tvaru $a_1\mathbf{M}_1 + a_2\mathbf{M}_2$.

Vlastní čísla matice $2\mathbf{A}$ jsou dvojnásobky vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ a vlastní vektory zůstávají stejné. Charakteristický polynom pro matici $2\mathbf{A}$ je $\lambda^2 - 10\lambda + 24$, což dává řešení 6 a 4 a tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ matice $\mathbf{A}$. Těm odpovídají normované vlastní vektory $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ a $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ a platí

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \lambda_2\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

OPT midterm 27.3.2024 Příjmení: Jméno: 000

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.
ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000

[redacted]

	1
a	
b	
c	
d	
e	

Správné řešení kvízů je vždy (a)

1. Nechť $\mathbf{A}$ je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null $\mathbf{A}^T$ je
   (a) $\mathbf{O}$
   (b) $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   (c) $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
   (d) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
ll (e) neplatí žádné uvedené tvrzení

2. Nechť $\mathbf{A}$ je matice s lineárně nezávislými sloupci. Matice ortogonálního projektoru na podprostor null $\mathbf{A}^T$ je
   (a) $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   (b) $\mathbf{O}$
   (c) $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
   (d) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
ll (e) neplatí žádné uvedené tvrzení

3. $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ je regulární právě když
   (a) $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé řádky
   (b) $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce
   (c) $\mathbf{A}$ má levou inverzi
   (d) soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ má více než jedno řešení
   (e) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární

4. Rozhodněte, co je správně.
   (a) $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\operatorname{rank}\mathbf{A}, \operatorname{rank}\mathbf{B}\}$
   (b) $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) = \operatorname{rank}\mathbf{A}\ \operatorname{rank}\mathbf{B}$
   (c) $\operatorname{rank}(\mathbf{AB}) = \min\{\operatorname{rank}\mathbf{A}, \operatorname{rank}\mathbf{B}\}$
   (d) $\operatorname{rng}\mathbf{AB} \subseteq \operatorname{rng}\mathbf{B}$
   (e) $\operatorname{rng}\mathbf{AB} = \operatorname{rng}\mathbf{A}$

5. Pro která $a \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{bmatrix} 1/2 & a \\ a & 1/2 \end{bmatrix}$ ortogonální projektor?
   (a) pro $a = \frac{1}{2}$
   (b) pro $a = 0$
   (c) pro $a \in \{0, \frac{1}{4}\}$
   (d) pro $a = \frac{1}{4}$
   (e) pro libovolné $a \in \mathbb{R}$

6. Kvadratická funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 4$ v bodě $(0, 0)$
   (a) má minimum
   (b) má maximum
   (c) nemá ani minimum ani maximum
   (d) má lokální maximum
   (e) nabývá nulové hodnoty

7. Pro spektrální rozklad matice $\mathbf{AA}^T$, kde $\mathbf{A}$ je reálná matice typu 10×100, platí:
   (a) Vlastní vektory lze volit po dvou ortogonální
   (b) Všechna vlastní čísla jsou různá
   (c) Z vlastních vektorů lze vytvořit bázi prostoru $\mathbb{R}^{100}$
   (d) Největší vlastní číslo je kladné
   (e) Neplatí žádné uvedené tvrzení

8. Pro úlohu nejmenších čtverců $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, platí
   (a) Neplatí žádné uvedené tvrzení
   (b) Úloha má jediné optimální řešení
   (c) Množina všech optimálních řešení tvoří lineární prostor
   (d) Úloha má vždy optimální řešení $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$
   (e) Úloha má optimální řešení jen v případě, že rank $\mathbf{A} = n$

9. Metodou nejmenších čtverců řešíme lineární regresi $f(x) = ax + b$ pro data tvaru (x_i, y_i), kde $i = 1, \ldots 500$ a $x_i \neq x_j$ pro nějaká $i \neq j$.
   (a) Úloha má jediné optimální řešení
   (b) Uvedený problém nelze nijak transformovat na řešení soustavy lineárních rovnic
   (c) Optimální hodnoty parametrů a, b splňují $a \neq b$
   (d) Pro optimální hodnoty parametrů a, b vždy platí $ax_i + b = y_i$ pro nějakou dvojici (x_i, y_i)
   (e) Neplatí žádné uvedené tvrzení

10. Pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ platí toto:
   (a) $\mathbf{A}$ je indefinitní
   (b) $\mathbf{AA}^T$ je indefinitní
   (c) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je negativně definitní
   (d) $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$ neexistuje
   (e) kvadratická forma $\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$ má globální maximum v bodě $(0, 0)$