

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napište do připravených mezer.

1. (2 body) Najděte vzdálenost bodu $\mathbf{z} = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ od nadroviny $\{\mathbf{x}; \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 2)$, $b = 3$.

Můžeme využít např. známého vzorce $\frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|(1,1,1,2)(1,0,1,0) - 3|}{\|(1,1,1,2)\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}$. K jeho odvození stačí vědět, že velikost pravoúhlého průmětu vektoru \mathbf{z} na přímku se směrem \mathbf{a} je $\frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z}|}{\|\mathbf{a}\|}$. Pro získání vzdálenosti od té nadroviny ale musíme vektor posunout o $-\mathbf{x}_0$, kde \mathbf{x}_0 je libovolný vektor splňující $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_0 = b$. Tím dostaneme $\frac{|\mathbf{a}^T (\mathbf{z} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{z} - b|}{\|\mathbf{a}\|}$.

2. Nechť $X = \text{span}\{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$. Najděte

- a) (1 bod) bázi podprostoru X^\perp ,
 b) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor X^\perp ,
 c) (1 bod) matici ortogonálního projektoru na podprostor X .

a) $X^\perp = \text{span}\{(2, 0, -2, 1)\}$, b) $\mathbf{U} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, projektor $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{I} - \mathbf{P}$.

3. Máme 5 pozorování $(0, 1), (1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4)$ tvaru (x_i, y_i) . Hledáme optimální regresní přímku $y = \theta_1 x + \theta_2$, kde $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ jsou hledané parametry.

- a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako problém nejmenších čtverců.
 b) (2 body) Vyřešte tento problém.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hledáme $\theta \in \mathbb{R}^2$ minimalizující $\|\mathbf{A}\theta - \mathbf{b}\|^2$. To je to samé, jako řešit soustavu normálních rovnic $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \theta = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$, což je soustava

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 12 \end{bmatrix},$$

jejíž jediné řešení je $\theta_1 = \theta_2 = \frac{4}{5}$.

4. Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{15 \times 5}$ hledáme nejbližší matici hodnosti ≤ 3 . Víme, že matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ má vlastní čísla 2, 1, 4, 9, 0.

- a) (1 bod) Formulujte úlohu maticově jako optimalizační problém a napište hodnotu účelové funkce v optimu.
 b) (1 bod) Jaké bude optimální řešení tohoto problému, budeme-li hledat matici hodnosti ≤ 4 ?

a) $\min \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|^2$ pro $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{15 \times 5}$, kde $\text{rank } \mathbf{B} \leq 3$. V optimu je chyba $s_4^2 + s_5^2 = 1$. b) Protože \mathbf{A} má podle hodnot singulárních čísel hodnost 4, bude optimální řešení právě \mathbf{A} a chyba bude nulová.

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000



	1
a	
b	
c	
d	
e	

Příklady z první části vyřešte a odpovědi včetně postupu napíšte do připravených mezer.

1. Nechť $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_4\}$, $\mathbf{z} = (4, 3, 2, 1)$. Najděte kolmou projekci vektoru \mathbf{z}

- (2 body) na X ,
- (1 bod) na X^\perp

Je snadnější začít podúlohou b), neboť X^\perp je generován pouze jedním vektorem. b) $\mathbf{y} = \frac{(4,3,2,1)(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}} \frac{(1,0,0,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}(1, 0, 0, -1)$. a) $\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{y} = (5/2, 3, 2, 5/2)$

2. (2 body) Pro afinní podprostor $X = (1, 2, 3, 4) + \text{span}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ najděte matici a vektor pravých stran soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, jejíž řešení je X .

Například $\mathbf{A} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1]$ (jednořádková matice), $\mathbf{b} = 2$.

3. Závislost proměnné z na proměnných x, y modelujeme regresní funkcí $z \approx f(x, y) = a(x - y)^2 + be^{x+y} + cxy + d$. Odhadujeme parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funkce z naměřených bodů (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, 100$, ve smyslu nejmenších čtverců.

- (2 body) Formulujte úlohu v maticové podobě.
- (1 bod) Za jakých předpokladů bude mít úloha jediné řešení? Takové řešení napíšte.

a) Vektor neznámých parametrů je $\mathbf{p} = (a, b, c, d)$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100 \times 4}$ má v řádku i vektor $((x_i - y_i)^2, e^{x_i+y_i}, x_i y_i, 1)$ a dále $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{100})$. Hledáme minimum funkce $\|\mathbf{Ap} - \mathbf{z}\|^2$. b) Má-li \mathbf{A} lineárně nezávislé sloupce, pak je jediné optimální řešení $\mathbf{A}^+ \mathbf{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{z}$.

4. Matice \mathbf{A} typu $10^4 \times 50$ má prvky 0 nebo 1. Každý řádek i odpovídá jedné osobě a každý sloupec j streamovací službě (Netflix, Spotify atd.), přičemž $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když si osoba i předplácí službu j .

- (1 bod) Co vyjadřují prvky matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$? Interpretujte jejich numerické hodnoty.
- (1 bod) Matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ má jen 15 nenulových singulárních čísel s_1, \dots, s_{15} . Napíšte teoretickou chybu aproximace matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ maticí hodnosti nejvýše 10.

a) Složka b_{ij} matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ udává, kolik lidí celkem předplácí současně služby i a j . b) Chyba je $s_{11} + \dots + s_{15}$.

V každém z následujících kvízových příkladů je právě jedna odpověď správně. Odpovědi vyznačte do tabulky křížky. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela vyplňte barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY.

(Za každou správnou odpověď je 1 bod.)

000



	1
a	
b	
c	
d	
e	

- Nechť \mathbf{A} je matice s lineárně nezávislými řádky. Matice ortogonálního projektoru na podprostor $\text{null } \mathbf{A}^T$ je
 - $\mathbf{I} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
 - $\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
 - $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}$
 - $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
 II (e) neplatí žádné výše uvedené tvrzení
- Rozhodněte, co je správně.
 - neplatí žádné z uvedených tvrzení
 - $\text{rank}(\mathbf{AB}) = \text{rank } \mathbf{A} \text{ rank } \mathbf{B}$
 - $\text{rank}(\mathbf{AB}) = \min\{\text{rank } \mathbf{A}, \text{rank } \mathbf{B}\}$
 - $\text{rng } \mathbf{AB} \subseteq \text{rng } \mathbf{B}$
 FI (e) $\text{rng } \mathbf{AB} = \text{rng } \mathbf{A}$
- Máme matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že každá matice \mathbf{A}_i má ortonormální sloupce. Označme $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k$ součin těchto matic.
 - Matice \mathbf{B} je ortogonální.
 - Matice \mathbf{B} má ortonormální sloupce, ale nemusí být ortogonální.
 - Matice \mathbf{B} je ortogonální jen tehdy, když $k \leq 2$.
 - Matice \mathbf{B} je identická.
 II (e) Neplatí žádné výše uvedené tvrzení.
- Nechť $n \geq 2$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je nenulový vektor. Ortogonální projektor promítající na podprostor $\text{span}\{\mathbf{a}\}$ je
 - je singulární matice
 - je matice plné hodnosti
 - je symetrická regulární matice
 - je široká matice, která není čtvercová
 II (e) žádná z uvedených možností
- Pro která $a \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonální projektor?
 - žádná z uvedených možností
 - pro $a = 0$
 - pro $a \in \{0, 1\}$
 - pro $a \in [0, 1]$
 FI (e) pro $a \geq 0$
- Množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$,
 - je afinní podprostor dimenze $n - 1$
 - je vždy lineární podprostor
 - je vždy přímka, která nemusí procházet počátkem
 - je konečná
 II (e) nespĺňuje žádnou z uvedených možností

7. Máme zadánu symetrickou matici \mathbf{A} řádu n .

- (a) Její nejmenší vlastní číslo splňuje $\lambda \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pro libovolný vektor \mathbf{x} takový, že $\|\mathbf{x}\| = 1$.
- (b) Její největší vlastní číslo λ je vždy kladné a platí $\lambda = \max \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pro vektory \mathbf{x} splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
- (c) Optimální řešení úlohy $\max \{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ vždy existuje.
- (d) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ nabývá vždy maxima pro nějaký vektor \mathbf{x} splňující $\|\mathbf{x}\| = 1$.
- (e) Každý vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice \mathbf{A} je řešením úlohy $\max \{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

8. Pro úlohu nejmenších čtverců $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|^2$ platí:

- (a) Optimálních řešení může být nekonečně mnoho.
- (b) Hodnota v optimu je vždy 0.
- (c) Úloha nemusí mít optimální řešení.
- (d) Optimální řešení je vždy tvaru $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$.
- (e) Každé řešení úlohy nejmenších čtverců je i řešením soustavy $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

9. Hledáme afinní podprostor X dimenze 5 minimalizující součet čtverců kolmých vzdáleností od vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{1000} \in \mathbb{R}^{50}$.

- (a) X je afinním podprostorem prostoru \mathbb{R}^{50} .
- (b) X je afinním podprostorem prostoru \mathbb{R}^5 .
- (c) Neplatí žádná z uvedených možností.
- (d) Hledaný afinní podprostor X nemusí existovat.
- (e) X je vždy lineárním obalem 5 lineárně nezávislých vektorů.

10. Rozhodněte, co platí pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

- (a) Neplatí žádná z uvedených možností.
- (b) \mathbf{A} je pozitivně definitní.
- (c) \mathbf{A} má vlastní číslo 0.
- (d) Kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ má minimum v bodě 0.
- (e) Optimální hodnota úlohy $\min \{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\| = 1\}$ je kladná.