

# Řešení některých cvičení ze skript Optimalizace (B0B33OPT)

Petr Olšák

25. 2. 2024

Tento text vznikl v letech 2020 a 2021, kdy studenti nemohli chodit do školy a museli studovat samostatně, případně se „scházeli“ jen ve virtuálním počítačovém prostředí. Pro studenty jsem tehdy připravil podrobná řešení všech cvičení, která bylo potřeba projít na tehdy vzdáleně realizovaných „cvičeních“.

Plánoval jsem řešení doplňovat o další, aby byla nakonec sbírka úplná a korespondovala zcela s cvičeními ve skriptech doc. Wenera. Zatím se mi ale nedaří najít odhodlání ten plán realizovat, ale možná někdy. . .

Sbírka neobsahuje zadání cvičení ze skript doc. Wenera, ale jen řešení odkazované do skript číslem cvičení. Původně byla čísla příkladů odkazována fixními čísly. To ale vedlo k potížím, protože čísla příkladů se ve skriptech v čase bohužel mění. Nově jsou už některá čísla přímo prolinkována se svým zadáním, což poznáte podle modré barvy, která funguje jako hyperlink do konkrétního místa ve skriptech.

Značení v této sbírce se může mírně odchylovat od skript. Např. definice množin pomocí vlastností prvků se zde píše se středníkem ale ve skriptech se svíslítkem. Tedy např. kružnice je zde  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  zatímco ve skriptech  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Bod/vektor (prvek  $\mathbb{R}^n$ ) se zde někdy značí v hranatých závorkách jako matice, např.  $[1, 2]$  a někdy v kulatých  $(1, 2)$ . Uzavřený interval se zde značí  $\langle a, b \rangle$  zatímco ve skriptech  $[a, b]$ . Tyto rozdíly snad nepovedou ke zmatení, neboť vše bude jasné z kontextu.

Najdete-li v textu chybu, prosím, neváhejte mě informovat, pokusím se to napravit.

# Kapitola 1

**1.1 a)** V řešení této úlohy ve skriptech je popsán geometrický přístup (obrázek a úvaha). Zde si ukážeme metodu eliminace proměnné a převedení úlohy na hledání minima funkce jedné proměnné. Úloha má dvě proměnné a je zřejmé, že řešení nebude uvnitř množiny přípustných řešení, ale na její hranici  $xy = 1$ , tedy  $y = 1/x$ . Nahradíme-li v účelové funkci proměnnou  $y$  výrazem  $1/x$ , dostaneme účelovou funkci v jedné proměnné:  $f = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , pro kterou hledáme minimum na intervalu  $(0, \infty)$ . Funkce je na tomto intervalu spojitá a má spojitou derivaci, takže její minimum může být jen ve stacionárních bodech  $f' = 0$ , tedy  $2x - \frac{2}{x^3} = 0$ , tedy  $x^4 = 1$ , tedy  $x = 1$ . Vyloučili jsme  $x = -1$ , protože tento bod neleží v  $(0, \infty)$ . Souřadnici  $y$  dopočítáme ze vztahu  $y = 1/x$  a máme tedy argument minima v bodě  $[1, 1]$ . Hodnota minima je  $f = 2$ . Že to je minimum a ne maximum by se dalo vyšetřit z průběhu funkce  $f$  v jedné proměnné  $x$ : na daném intervalu má  $f$  jediný stacionární bod a má jednostranné limity v obou krajních bodech  $+\infty$ .

**b,c,d)** Má řešení ve skriptech.

e) Při obvyklém značení  $r$  pro poloměr podstavy válce a  $v$  pro jeho výšku vyjádříme jeho objem  $V = \pi r^2 v = 1$  a jeho povrch  $S = 2\pi r v + 2\pi r^2$ . Optimalizační úloha tedy zní:

$$\min\{2\pi r v + 2\pi r^2; \pi r^2 v = 1, r > 0, v > 0\}$$

Z první podmínky popisující množinu přípustných řešení snadno eliminujeme proměnnou  $v = \frac{1}{\pi r^2}$  a účelovou funkci máme pak jen v proměnné  $r$ , tedy  $f = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$ . Vyšetříme ji na intervalu  $(0, \infty)$ . Uvnitř má jediný stacionární bod  $f' = 0$ , tedy  $-\frac{2}{r^2} + 4\pi r = 0$ , tedy  $r^3 = \frac{1}{2\pi}$ , tedy  $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ . Tento stacionární bod tedy musí být minimum, protože  $f$  je spojitá se spojitou derivací a v krajních bodech intervalu  $(0, \infty)$  má limity  $\infty$ . Dále je  $v = \frac{1}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$  a argument minima máme v bodě  $[r, v] = \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\right]$ . Tím jsou rozměry válce s minimálním povrchem určeny.

f) Úlohu formálně zjednodušíme a počítáme  $\min\{2\pi r v + \pi r^2; \pi r^2 v = 1/2, r > 0, v > 0\}$ . Postupujeme stejně, jako v úloze e). Vychází stejné  $r$  a dále zde vychází  $v = r$ .

g) Intuitivně je to čtverec, ale udělejme to pořádně. Strany obdélníka označme  $a, b$ , jeho úhlopříčka musí mít délku 2, takže dle Pythagorovy věty je  $a^2 + b^2 = 4$ . Hledáme maximum součinu  $ab$ , takže optimalizační úloha zní:  $\max\{ab; a^2 + b^2 = 4, 0 < a < 2, 0 < b < 2\}$ . Z podmínky eliminujeme proměnnou  $a$ :  $a^2 = 4 - b^2$ , tedy  $a = \sqrt{4 - b^2}$ . Účelová funkce má po eliminaci jen jednu proměnnou  $f = \sqrt{4 - b^2} b$ . Vyšetříme ji na intervalu  $(0, 2)$ . Funkce je spojitá, má všude spojitou derivaci, v krajních bodech má limity 0, je všude kladná a má jediný stacionární bod, který tedy musí být maximum. Stacionární bod zjistíme z  $f' = 0$ , tedy  $\frac{-2b}{\sqrt{4-b^2}} + \sqrt{4-b^2} = 0$ , tedy  $-b^2 + 4 - b^2 = 0$ , tedy  $b^2 = 2$ , tedy  $b = \sqrt{2}$ . Dopočítáme  $a = \sqrt{4 - b^2} = \sqrt{2}$ . Argument maxima je  $[a, b] = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , takže to je opravdu čtverec. Intuice tentokrát nezklamala.

**h,i)** Řešení je ve skriptech.

j) Označme strany obdélníka  $a, b$ . Plocha je  $ab = 1$  a cena plotu (účelová nebo také cenová funkce) je  $1000(a + 2b) + 500a$ . Protože se neptáme na cenu (hodnotu účelové funkce), ale na argument minima, můžeme funkci vydělit například tisícem a máme optimalizační úlohu ve tvaru  $\min\{\frac{3}{2}a + 2b; ab = 1\}$ . Eliminujeme  $b = 1/a$  a účelová funkce má jen proměnnou  $a$ :  $f = \frac{3}{2}a + 2/a$  a vyšetřujeme ji na intervalu  $(0, \infty)$ . Je spojitá, má spojitou derivaci a limity v krajních bodech intervalu má  $\infty$ , takže má-li jediný stacionární bod, bude to minimum. Stacionární bod najdeme pomocí  $f' = 0$ , tedy  $\frac{3}{2} + \frac{-2}{a^2} = 0$ , tedy  $a^2 = \frac{4}{3}$ , tedy  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Po dosazení máme  $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$  a argument minima je  $[a, b] = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ . Zamysleme se, v jakých jednotkách máme rozměry uvedené ve výsledku. V popisu množiny přípustných řešení jsme psali  $ab = 1$ , tedy jeden *hektar*. Jedna

strana hektarového čtverce má 100 metrů. Naše jednotka je tedy 100 metrů, konkrétně strana  $a$  obdélníka má rozměr  $\frac{200}{\sqrt{3}}$  metrů a strana  $b$  je velká  $50\sqrt{3}$  metrů.

**k, l)** Má řešení ve skriptech.

**m)** Nakreslete si kružnici se středem  $O$  a poloměrem 1. Na ní na protilehlých stranách na kružnici vyznačte dva body  $A$  (start) a  $C$  (cíl). Mezi nimi kdekoli na kružnici nakreslete bod  $B$ . Potkan poplave nejkratší spojnici úsečkou  $AB$  a dále poběží po kružnici mezi  $BC$ . Úhel  $AOB$  označíme  $\alpha$ . Cesta potkana je dána polohou bodu  $B$ , neboli úhlem  $\alpha$ . Délka první části cesty  $AB$  je  $2 \sin(\alpha/2)$ . Zjistíte to tak, že rozdělíte úhel  $\alpha$  jeho osou na dva a máte dva pravoúhlé trojúhelníky, úhel  $\alpha/2$  je proti polovině úsečky  $AB$  v pravoúhlém trojúhelníku o přeponě délky 1. Dále délka běžecké části dráhy potkana je rovna délce oblouku na kružnici o poloměru 1 mezi body  $B$  a  $C$  a je tedy rovna  $\pi - \alpha$ . Označíme-li  $t$  čas a  $d$  délku dráhy, pak víme, že  $t = d/v$ , takže čas od startu k cíli je  $t = \frac{1}{v_1} 2 \sin(\alpha/2) + \frac{1}{v_2} (\pi - \alpha)$ . Je to funkce jediné proměnné  $\alpha$  s parametry  $v_1$  a  $v_2$  a máme ji minimalizovat na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ , neboli hledáme  $\min \{t(\alpha); 0 \leq \alpha \leq \pi\}$ . Funkce je spojitá se spojitou derivací. Najdeme její stacionární bod z  $t' = 0$ , tedy  $\frac{1}{v_1} \cos(\alpha/2) + \frac{-1}{v_2} = 0$ , tedy  $\cos(\alpha/2) = \frac{v_1}{v_2}$ , tedy  $\alpha = 2 \arccos \frac{v_1}{v_2}$ .

Kdybychom potkanovi poradili, že má nakreslit úhel  $2 \arccos \frac{v_1}{v_2}$  a tím najít bod  $B$  a pak bude vědět, jak má plavat a jak běžet, moc by nám nepoděkoval, naopak, začal by na nás nebezpečně prskat. Našli jsme totiž maximum účelové funkce  $t$ , nikoli její minimum, jak je zřejmé z druhé derivace funkce  $t$ . Funkce je na definičním intervalu konkávní. Je to takový malý chytáček.

Minimum konkávní účelové funkce  $t$  je tedy v jednom z jejích krajních bodů intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ . V nule má funkce  $t$  hodnotu  $\frac{\pi}{v_2}$  a v bodě  $\pi$  má hodnotu  $\frac{2}{v_1}$ . Globální minimum je v tam, kde je odpovídající hodnota menší. Potkanovi tedy poradíme takto: umí-li přeplavat jezero rychleji než jej oběhne, tak ať plave napříč a vůbec neběží. V opačném případě ať běží a vůbec neplave.

**n)** Je řešeno ve skriptech.

**1.2**  $z \in \operatorname{argmin}_X f(x) \Leftrightarrow f(z) \leq f(x) \forall x \in X \Leftrightarrow g(f(z)) \leq g(f(x)) \forall x \in X \Leftrightarrow z \in \operatorname{argmin}_X g(f(x))$ .

**1.3**  $\operatorname{argmin}_Y f(x) = Y \cap \operatorname{argmin}_X f(x)$  právě když hodnoty v argumentech minima na  $Y$  nejsou větší než hodnoty v argumentech minima na celé  $X$ , ale mohou být stejné. To platí právě když  $f(z) \geq \min_Y f(x)$  pro všechna  $z \in X \setminus Y$ .

## Kapitola 2

**2.1** To je jednoduché opakování, jak můžeme upravovat maticové výrazy:

a)  $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{A}^2\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{AX} - \mathbf{A}^2\mathbf{X} = -\mathbf{B}$ ,  $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^2)\mathbf{X} = -\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{X} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^2)^{-1}\mathbf{B}$

Za zmínku stojí snad jen to, že zde šlo vytknout  $\mathbf{X}$  *doprava* z obou sčítanců a tedy v posledním kroku šlo násobit inverzní maticí *zleva*. Násobení matic není komutativní. Taky lze konstantou  $-1$  roznásobit inverzní matici, protože  $-1^{-1} = -1$  a psát  $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ .

b)  $\mathbf{X} - \mathbf{A} = \mathbf{XB}$ ,  $\mathbf{XI} - \mathbf{XB} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$

c)  $2\mathbf{X} - \mathbf{AX} + 2\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ,  $2\mathbf{IX} - \mathbf{AX} = -2\mathbf{A}$ ,  $(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = -2\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X} = -2(2\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}$

Jednotkovou čtvercovou maticí značíme  $\mathbf{I}$ , dále v zadání c) je nulová matice značena  $\mathbf{O}$ . Konečně v posledním kroku úlohy c) je konstanta  $(-2)$  vytknutá zcela dopředu, jak bývá zvykem. Můžeme též krátit:  $\mathbf{X} = -2(2\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} = -2(2(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A}))^{-1}\mathbf{A} = -2 \cdot 2^{-1}(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} = (\frac{1}{2}\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}$ .

**2.2** Jedinou soustavu lze zapsat blokově  $[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_k] = \mathbf{X}[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k]$ , tedy  $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$  při značení  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k]$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_k]$ . Je-li  $\mathbf{A}$  čtvercová a regulární, máme jediné řešení  $\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}$ .

**2.3** Nejprve si uvědomíme vektor proměnných:  $\mathbf{u}^T = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{y}^T \ \alpha] \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ . Dále je třeba převést součiny s proměnnými na levou stranu rovností a konstanty na pravou:

$$\begin{array}{rcc} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & \alpha \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}^T\mathbf{y} - \alpha\mathbf{1} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{Ay} & = & -\mathbf{c} \end{array}$$

Nad soustavu jsem modře vyznačil řádek s proměnnými. Proměnné v tomto řádku musejí korespondovat s jednotlivými sloupci matice  $\mathbf{P}$ , takže

$$\mathbf{Pu} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T & -\mathbf{1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

Zde je  $\mathbf{O}$  nulová matice,  $\mathbf{0}$  nulový vektor,  $\mathbf{1}$  vektor (sloupec) obsahující samé jedničky. Uvědomíme si také, že  $\alpha\mathbf{1} = \mathbf{1}\alpha$ , přitom vlevo této rovnosti je  $\alpha$ -násobek jedičkového vektoru a vpravo je součin matic, první z nich má jeden sloupec s jedničkami a druhá je z  $\mathbb{R}^{1 \times 1}$  a obsahuje prvek  $\alpha$ . Rozměry jednotlivých bloků matice  $\mathbf{P}$  obecně jsou:  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $\mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{k \times m}$ ,  $-\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ ,  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times m}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ . Ejhle, matice  $\mathbf{A}$  je ve dvou blocích a tudíž musí být  $m = n$ .

**2.4 a)** provedeme stejně jako ve Cvičení 2.3, výsledek je ve skriptech.

b) Za předpokladu existence zmíněných inverzí  $\mathbf{D}$  musí být čtvercová a  $\mathbf{A}$  také je čtvercová (třebaže obecně jiného rozměru). Je možné provést blokově eliminaci vektoru  $\mathbf{y}$  z druhé maticové rovnice a dosadit do první, jako bychom pracovali s čísly a ne s maticemi:

$$\begin{aligned} \mathbf{Dy} &= \mathbf{b} - \mathbf{Cx}, & \mathbf{y} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Cx}) \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{a} - \mathbf{BD}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Cx}) & &= \mathbf{a} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{Cx} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x} &= \mathbf{a} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Výpočetní výhoda: počítáme s menšími maticemi. Předpokládejme, že na výpočet inverzí matice máme algoritmus složitosti  $n^3$ . Výpočet inverze matice řádově dvakrát větší má pak složitost zhruba  $(2n)^3 = 8n^3$ , zatímco při vyjádřeném  $\mathbf{x}$  stačí provést dvě inverze složitosti  $n^3$  a tři násobení se složitostí  $n^3$  a další operace sčítání a násobení sloupcovým vektorem se složitostí  $n^2$ . Takže máme složitost  $5n^3$ .

**2.5 a)**  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , je to nehomogenní lineární soustava  $m$  rovnic s  $n$  neznámými.

b)  $\mathbf{A}$  musí být čtvercová. Vlevo je kvadratická forma, jediná rovnice, není lineární.

c)  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Jediná lineární rovnice.

d) Všechny matice musejí být čtvercové. Je to lineární soustava s  $n^2$  rovnic i neznámými.

e)  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Nelineární soustava s  $2mn$  neznámými obsahující  $m^2 + n^2$  rovnic.

**2.6** Vzorec  $\text{vec}(\mathbf{AXC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec } \mathbf{X}$  nám umožní „vykostit“ z maticového součinu matici  $\mathbf{X}$  napsanou v jednom sloupci, zatímco před vykostěním byla matice  $\mathbf{X}$  uvnitř maticového součinu „krytá“ maticemi z obou stran.

a) Pro každé  $i \in \{1, \dots, k\}$  je  $\mathbf{b}_i^T \mathbf{X} \mathbf{a}_i = \text{vec}(\mathbf{b}_i^T \mathbf{X} \mathbf{a}_i) = 0$ , takže  $(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i) \text{vec } \mathbf{X} = 0$ . Sestavíme-li matici  $\mathbf{M}$  mající  $k$  řádků, jednotlivé řádky jsou  $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i$ , pak máme výslednou soustavu  $\mathbf{M} \text{vec } \mathbf{X} = \mathbf{0}$

b) Je  $\text{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T) = \text{vec } \mathbf{AX} + \text{vec } \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T$ . Dále, má-li být  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , pak jsou  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dále při označení  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jednotkové matice je  $\text{vec } \mathbf{AX} = \text{vec } \mathbf{AXI} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \text{vec } \mathbf{X}$  a  $\text{vec } \mathbf{X}^T \mathbf{B}^T = \text{vec } \mathbf{IX}^T \mathbf{B}^T = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}) \text{vec } \mathbf{X}^T = \mathbf{M} \text{vec } \mathbf{X}$ , kde matice  $\mathbf{M}$  vznikla permutováním sloupců matice  $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I})$  podle stejné permutace, jako se permutuje  $\text{vec } \mathbf{X}^T$  na  $\text{vec } \mathbf{X}$ . Hledaná soustava pak je  $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \text{vec } \mathbf{X} + \mathbf{M} \text{vec } \mathbf{X} = ((\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) + \mathbf{M}) \text{vec } \mathbf{X} = \text{vec } \mathbf{C}$ .

c) Úloha má neznámou matici  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , u níž jsou známy její řádkové součty  $a_i$  a sloupcové součty  $b_j$  (souvisí to s dopravní úlohou lineárního programování). Tvar matice uvedený v závěru příkladu se dá vydumat z požadavku na dané hodnoty řádkových a sloupcových součtů. My ale použijeme tvar  $\mathbf{X} \mathbf{1}_n = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{X}^T \mathbf{1}_m = \mathbf{b}$  (zde  $\mathbf{1}_n$  je sloupcový vektor z  $\mathbb{R}^n$  obsahující samé jedničky (to měli někteří šťastlivci na vysvědčení v první třídě) a analogicky  $\mathbf{1}_m \in \mathbb{R}^m$ ). Je  $\text{vec}(\mathbf{X} \mathbf{1}_n) = \text{vec}(\mathbf{I}_m \mathbf{X} \mathbf{1}_n) = (\mathbf{1}_n^T \otimes \mathbf{I}_m) \text{vec } \mathbf{X} = \text{vec } \mathbf{a} = \mathbf{a}$  a také  $\text{vec}(\mathbf{1}_m^T \mathbf{X}) = \text{vec}(\mathbf{1}_m^T \mathbf{X} \mathbf{I}_n) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_m) \text{vec } \mathbf{X} = \text{vec } \mathbf{b} = \mathbf{b}$ . Sestavíme-li tedy matici  $\mathbf{M}$  mající dva bloky nad sebou, v prvním je  $\mathbf{1}_n^T \otimes \mathbf{I}_m$  a ve druhém  $\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{1}_m$ , pak máme soustavu  $\mathbf{M} \text{vec } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$ .

**2.7 a)**  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^T = (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{BA} - \mathbf{AB} = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ .

b)  $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = \mathbf{A}(\mathbf{BC} - \mathbf{CB}) - (\mathbf{BC} - \mathbf{CB})\mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{CA} - \mathbf{AC}) - (\mathbf{CA} - \mathbf{AC})\mathbf{B} + \mathbf{C}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) - (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{ABC} - \mathbf{ACB} - \mathbf{BCA} + \mathbf{CBA} + \mathbf{BCA} - \mathbf{BAC} - \mathbf{CAB} + \mathbf{ACB} + \mathbf{CAB} - \mathbf{BCA} - \mathbf{ABC} + \mathbf{BAC} = \mathbf{O}$ .

c)  $\mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} - (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} + \mathbf{B}(\mathbf{AC} - \mathbf{CA}) = \mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} + \mathbf{BAC} - \mathbf{BCA}$

**2.8** Z  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$  plyne  $\mathbf{AA} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ . Obráceně, z  $\mathbf{AA} = \mathbf{I}$  plyne, že  $\mathbf{A}$  má plnou hodnotu, je tedy regulární a má tedy inverzi  $\mathbf{A}^{-1}$ . Vynásobením obou stran rovnosti touto inverzí zprava máme  $\mathbf{A} = \mathbf{IA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ .

**2.9** Ověříme, že  $(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$ . Platí  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ .

**2.10** Nechť je  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  a nechť k matici  $\mathbf{A}$  máme inverzi  $\mathbf{B}$ , tedy  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ . Transponujeme-li matice z poslední rovnosti, máme  $(\mathbf{BA})^T = \mathbf{I}^T$ , což znamená, že  $\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{AB}^T = \mathbf{I}$ , takže  $\mathbf{B}^T$  je inverze k  $\mathbf{A}$ .

**2.11 a)**  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) + (\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}$  rovnost invertujeme  
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1}$  vynásobíme zleva  $\mathbf{A}$ , zprava  $\mathbf{B}$   
 $\mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1}$ .

Druhou rovnost dokážeme obdobně.

b) Děláme ekvivalentní úpravy, takže až dostaneme zřejmou identitu, máme hotovo. Obě strany rovnosti vynásobíme  $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})$  zleva:  $\mathbf{I} = (\mathbf{I} + \mathbf{AB})(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{I} + \mathbf{AB} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{ABA}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B}$ . Odečteme z obou stran  $\mathbf{I}$  a máme  $\mathbf{O} = \mathbf{AB} - \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{ABA}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1} - \mathbf{BA}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{BA})(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{O}$ . Hotovo.

c) V zadání je zřejmě překlep, má se dokázat  $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}$ . Vynásobením zprava  $(\mathbf{I} + \mathbf{BA})$  a dostáváme ekvivalentní rovnost  $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA}) = \mathbf{A}$ . Levou stranu upravíme  $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA}) = (\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{ABA}) = (\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{AB})\mathbf{A} = \mathbf{A}$ .

- d) Pro názornější výpočet provedeme substituci  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , neboli  $\mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$ . Dokazujeme  $\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} = (\mathbf{C} - \mathbf{A}) - (\mathbf{C} - \mathbf{A})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{A}) = \mathbf{C} - \mathbf{A} - (\mathbf{C} - \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}) = \mathbf{C} - \mathbf{A} - \mathbf{C} + \mathbf{A} + (\mathbf{C} - \mathbf{A})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{O} + \mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ .

**2.12 a,b)** Dokážeme nejdříve b) a z toho pak vyplyne a).

Při značení  $\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{UCV}^T$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}$  je třeba dokázat  $\mathbf{XY} = \mathbf{I}$ . Tím dokážeme, že  $\mathbf{X}$  je levá inverze, ale ona je pak automaticky i pravá, protože matice jsou čtvercové a mají plnou hodnotu (viz vzorec (3.19) ve skriptech). Takže inverze k nim existuje (plyne z věty o výpočtu inverze pomocí determinantu). A když je  $\mathbf{Z}$  pravá inverze k  $\mathbf{Y}$ , pak  $\mathbf{XYZ} = \mathbf{IZ} = \mathbf{XI}$ , takže pravá a levá inverze je stejná a víme také z lineární algebry, že je jediná. Nyní se pustíme do ověření  $\mathbf{XY} = \mathbf{I}$ : Kvůli stručnosti výpočtu značíme  $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{UCV}^T)(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{UB}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{I} + \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{UB}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{UB}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{U}(\mathbf{I} + \mathbf{CV}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{UC}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{UCBB}^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{UCV}^T\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

Rozmyslíme si ještě rozměry matic. V rámci součinu píšou do indexu před maticí počet jejích řádků a za ní počet jejích sloupců:

$${}_n\mathbf{X}_n = {}_n\mathbf{A}_n + {}_n\mathbf{U}_m {}_m\mathbf{C}_m {}_m\mathbf{V}_n^T, \quad {}_n\mathbf{Y}_n = {}_n\mathbf{A}^{-1}_n - {}_n\mathbf{A}^{-1}_n {}_n\mathbf{U}_m ({}_m\mathbf{C}^{-1}_m + {}_m\mathbf{V}_n^T {}_n\mathbf{A}^{-1}_n {}_n\mathbf{U}_m)^{-1} {}_m\mathbf{V}_n^T {}_n\mathbf{A}^{-1}_n.$$

Vidíme, že vše sedí při rozměrech  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . a že ve výpočtu výše je v závorce ve druhém kroku matice  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , ale všude jinde máme matici  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Měli bychom ji tedy značit jinak, ale když si řekneme, že to jsou jiné matice, tak to snad stačí.

Případ b) přechází na případ a) při  $m = 1$  a při  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  obsahující jedničku. Místo jednosloupcových matic  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  píšeme  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  a vzorec dokázaný v b) pak přechází na

$$(\mathbf{A} + \mathbf{uv}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}(1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})^{-1}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}$$

Jednoprvkovou matici  $1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$  označíme  $\alpha$  a uvědomíme si, že  $\mathbf{u}\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{u}$ , kde vlevo je součin jednosloupcové matice  $\mathbf{u}$  s inverzí jednoprvkové matice  $\alpha$  a vpravo je  $\frac{1}{\alpha}$ -násobek vektoru  $\mathbf{u}$  a tento skalár můžeme vytknout před celé maticové násobení a zapsat ho nakonec jako podíl tohoto maticového násobení číslem  $\alpha$ . Lidově řečeno, skalár „vybublá“ z maticového násobení ven.

**2.13** Když má na diagonále nenulové prvky. Inverze má na odpovídajících místech převrácené hodnoty k těmto prvkům.

$$\mathbf{2.14} \quad \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n) = \text{diag}(b_1 a_1, \dots, b_n a_n) = \\ = \text{diag}(b_1, \dots, b_n) \text{diag}(a_1, \dots, a_n).$$

**2.15** Má-li matice  $\mathbf{A}$  levou inverzi, má lineárně nezávislé sloupce, ale může být úzká, tj. její sloupce negenerují celý prostor  $\mathbb{R}^m$ . Když například  $\mathbf{b} \notin \text{rng } \mathbf{A}$ , pak soustava nemá řešení, ale postup uvedený studentem řešení najde.

$$\mathbf{2.16 a)} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^{TT} = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T.$$

$$\mathbf{b)} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

c) Volíme  $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$  a  $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ . jejich součet je zřejmě roven  $\mathbf{A}$  a dále  $\mathbf{B}$  je symetrická (podle úlohy (a) a z faktu, že násobek symetrické matice je symetrický) a konečně  $\mathbf{C}$  je antisymetrická (podle úlohy (b) a z analogického faktu). Takže matice existují.

Ještě zdůvodníme jednoznačnost. Předpokládáme, že máme ještě matice  $\mathbf{B}'$  a  $\mathbf{C}'$  stejných vlastností, takže  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B}' + \mathbf{C}'$ ,  $\mathbf{A}^T = \mathbf{B} - \mathbf{C} = \mathbf{B}' - \mathbf{C}'$ . Po sečtení těchto rovností dostáváme  $2\mathbf{B} = 2\mathbf{B}'$  a po odečtení  $2\mathbf{C} = 2\mathbf{C}'$ . Musí tedy  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$  a  $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ .

$$\mathbf{2.17 a)} \quad \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{a} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a}^T\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2.$$

$$\mathbf{b)} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^T(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} - \mathbf{a}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{a} - \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2.$$

c,d) Jako (a), (b), nejprve matice převedeme po sloupcích na vektory prostřednictvím operace vec uvedené ve cvičení 2.6.

**2.18** Trik spočívá v tom, že si nějaký genius všimne, že podmínky k důkazu se dají formulovat blokově:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Skutečně, v levém horním bloku máme podmínku  $\mathbf{AD}^T - \mathbf{BC}^T = \mathbf{I}$ , v pravém dolním máme tutéž podmínku v transponované podobě (je totiž  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T$ ) a v ostatních dvou blocích je ukryto sdělení, že matice  $\mathbf{AB}^T$  a  $\mathbf{CD}^T$  jsou symetrické, tedy  $\mathbf{AB}^T = \mathbf{BA}^T$  a  $\mathbf{CD}^T = \mathbf{DC}^T$ . Podíváme-li se na blokovou rovnost z dálky, vidíme součin dvou matic  $\mathbf{XY} = \mathbf{I}$ . Takže matice  $\mathbf{Y}$  musí být inverzní k matici  $\mathbf{X}$ . A čtvercová inverzní matice s výchozí maticí komutuje (pravá a levá inverze je pro čtvercové matice stejná), takže platí i rovnost  $\mathbf{YX} = \mathbf{I}$ . Podíváme-li se v této rovnosti do pravého dolního bloku, najdeme tam dokazovanou rovnost  $\mathbf{A}^T\mathbf{D} - \mathbf{C}^T\mathbf{B} = \mathbf{I}$ .

**2.19** Provádíme blokové operace násobení.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{BA} & \mathbf{B} \\ 2\mathbf{A} - \mathbf{ABA} & \mathbf{AB} - \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{BA} & \mathbf{B} \\ 2\mathbf{A} - \mathbf{ABA} & \mathbf{AB} - \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{BA})(\mathbf{I} - \mathbf{BA}) + \mathbf{B}(2\mathbf{A} - \mathbf{ABA}) & (\mathbf{I} - \mathbf{BA})\mathbf{B} + \mathbf{B}(\mathbf{AB} - \mathbf{I}) \\ (2\mathbf{A} - \mathbf{ABA})(\mathbf{I} - \mathbf{BA}) + (\mathbf{AB} - \mathbf{I})(2\mathbf{A} - \mathbf{ABA}) & (2\mathbf{A} - \mathbf{ABA})\mathbf{B} + (\mathbf{AB} - \mathbf{I})(\mathbf{AB} - \mathbf{I}) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**2.20**  $\text{tr}(\mathbf{XY} - \mathbf{YX}) = \text{tr}(\mathbf{XY}) - \text{tr}(\mathbf{YX}) = \text{tr}(\mathbf{XY}) - \text{tr}(\mathbf{XY}) = 0$ , ale na pravé straně je  $\text{tr}(\mathbf{I}) = n$ . V úpravě levé strany jsme využili cykličnost stopy.

**2.21** Dokazujeme  $\langle \mathbf{AB}, \mathbf{C} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A}^T\mathbf{C} \rangle$ . Na levé straně máme  $\sum_i \sum_j (\sum_k a_{ik}b_{kj}) c_{ij}$ . Na pravé straně je  $\sum_j \sum_k b_{kj} (\sum_i a_{ik}c_{ij}) = \sum_i \sum_j \sum_k a_{ik}b_{kj}c_{ij}$ , takže máme tentýž výsledek. Aalogicky bychom ověřili další rovnost.

**2.22** Necht  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Je  $\det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det \mathbf{A}$ . Použili jsme linearitu determinatnu v každém řádku matice  $\mathbf{A}$ .

**2.23 a)** Vidíme to např. z eliminační metody počítání inverze, tedy  $[\mathbf{A} | \mathbf{I}] \sim [\mathbf{I} | \mathbf{A}^{-1}]$ . Je-li  $\mathbf{A}$  horní trojúhelníková, pak eliminace obsahuje jen zpětný chod, který nezruší nuly pod diagonálou výchozí matice  $\mathbf{I}$ .

b) Uvažujme součin  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ , kde  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  jsou horní trojúhelníkové matice. Je-li  $i > j$ , pak platí  $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} = 0$ , neboť v každém součinu  $a_{ik}b_{kj}$  je aspoň jeden činitel nulový.

**2.24** Tři typy elementárních matic zmíněných ve skriptech označíme  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  a  $\mathbf{E}_3$ .

a) Vidíme, že  $\mathbf{E}_1^T = \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2^T = \mathbf{E}_2$ . Pouze  $\mathbf{E}_3^T$  se liší od  $\mathbf{E}_3$ . Jestliže  $\mathbf{E}_3$  přičítá  $\alpha$  násobek  $i$ -tého řádku k  $j$ -tému, pak  $\mathbf{E}_3^T$  přičítá  $\alpha$  násobek  $j$ -tého řádku k  $i$ -tému.

b) Je  $\mathbf{E}_1^{-1} = \mathbf{E}_1$ . Dále pokud  $\mathbf{E}_2$  pronásobí  $i$ -tý řádek konstantou  $\alpha$ , pak  $\mathbf{E}_2^{-1}$  pronásobí  $i$ -tý řádek konstantou  $1/\alpha$  (a vrátí eliminovanou matici do původního stavu). Konečně, pokud  $\mathbf{E}_3$  pracuje s konstantou  $\alpha$ , pak  $\mathbf{E}_3^{-1}$  pracuje s konstantou  $-\alpha$  na stejné pozici, takže odečítá  $\alpha$  násobek řádku a vrací eliminovanou matici do původního stavu.

K nalezení inverze k  $\mathbf{E}_3$  použijeme vzorec Morrisonové. Označme  $\mathbf{M}(\alpha)$  nulovou matici s jedinou výjimkou, prvek  $m_{ij} = \alpha$  pro nějaké  $i \neq j$ . Pak  $\mathbf{E}_3 = \mathbf{I} + \mathbf{M}(\alpha)$ . Dále označme  $\mathbf{u}$  nulový vektor s výjimkou  $u_i = \alpha$ , a  $\mathbf{v}$  buď nulový vektor s výjimkou  $v_j = 1$ . Pak je  $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{M}(\alpha)$ . Morrisonové vzorec nám dává:  $\mathbf{E}_3^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{M}(\alpha))^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{I}^{-1} - (\mathbf{I}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{I}^{-1}) / (1 + \mathbf{v}^T\mathbf{I}^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T / (1 + 0) = \mathbf{I} - \mathbf{M}(\alpha)$ . Ve jmenovateli máme  $1 + \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 1 + 0$ , protože  $i \neq j$ .

## Kapitola 3

**3.1** Je vyřešeno ve skriptech. Přidáme jen geometrický pohled.

a) Při daném nenulovém vektoru  $\mathbf{a}$  jde o množinu vektorů na  $\mathbf{a}$  kolmých, což vyplní nadrovinu kolmou na  $\mathbf{a}$  procházející počátkem.

b) Je to nadrovina kolmá na daný nenulový vektor  $\mathbf{a}$  posunutá do partikulárního řešení nehomogenní soustavy s jedinou rovnicí  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ .

**3.2** Je to opakování klasické úlohy z lineární algebry. Je vyřešeno ve skriptech.

**3.7** Je částečně vyřešeno ve skriptech. Je tam ukázáno, že existuje matice  $\mathbf{A}$  a nenulový vektor  $\mathbf{b}$  tak, že  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ . Tak poznáme afinní zobrazení. Ale poslední dovětek v zadání říká, že to máme dokázat z *definice*, která ve skriptech zní: afinní zobrazení je takové, které zobrazí afinní kombinaci vektorů  $\mathbf{x}_i$  na afinní kombinaci obrazů  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$  se stejnými koeficienty. Jinak řečeno:

$$\mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \dots + \alpha_n \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad \text{kdykoli } \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$$

Ukážeme tedy, že toto je ekvivalentní s faktem, že lze obrazy  $\mathbf{f}$  psát ve tvaru  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

Jeden směr důkazu je snadný. Předpokládáme-li  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ , pak je při  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) &= \mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) + \mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{x}_n + (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \mathbf{b} = \\ &= \alpha_1 (\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}) + \dots + \alpha_n (\mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \dots + \alpha_n \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

Nyní předpokládáme pro  $\mathbf{f}$  platnost definice a najdeme matici  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$ . Volme  $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{0})$ . Ukážeme, že zobrazení  $\mathbf{g} = \mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{0})$  je lineární:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) &= \mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \\ &= \mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n + (1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_n) \mathbf{0}) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \\ &= \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \dots + \alpha_n \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + (1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_n) \mathbf{f}(\mathbf{0}) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \alpha_1 (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{0})) + \dots + \alpha_n (\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{0})) = \\ &= \alpha_1 \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) + \dots + \alpha_n \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

Protože je  $\mathbf{g}$  lineární, má svou matici  $\mathbf{A}$ . Konečně  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

**3.8** Je to další klasická úloha z lineární algebry. Řešení je ve skriptech.



## Kapitola 4

4.1 a)  $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 14$ ,  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{14}$ ,

b)  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(2, 2, 2)\| = \sqrt{12}$ ,

c)  $\cos \alpha = \mathbf{x}^T \mathbf{y} / (\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|) = 2 / \sqrt{2 \cdot 14} = 1 / \sqrt{7}$ ,  $\arccos 1 / \sqrt{7} \doteq 1,1071$ .

4.2 Vektory leží ve společné přímce (tj. jsou lineárně závislé) a jsou shodně orientované.

4.3 Vyřešíme soustavu  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , kde  $\mathbf{A}$  je matice obsahující v řádcích dané vektory. Báze řešení je např.  $(1, 1, -1)$ .

4.4 Označme  $A = X$ ,  $B = Y$ ,  $C = Z$ . (Takto to bylo značeno v původní verzi skript.)  $B$  je řešení soustavy  $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ , kde  $\mathbf{B} = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$ ,  $C$  je řešení  $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ , kde  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Jsou to tedy lineární podprostory,  $\dim B = 3$ ,  $\dim C = 2$ , je  $C \subseteq B$ . Všechny vektory kolmé na řešení libovolné soustavy  $\mathbf{Px} = \mathbf{0}$  leží v lineárním obalu řádků matice  $\mathbf{P}$ . Protože podprostor  $A = \text{span}\{(1, 0, 1, 0)\}$  leží v lineárním obalu řádků uvedených matic  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ , je kolmý na řešení odpovídajících soustav, tedy na  $B$  i  $C$ . Není pravda, že  $B \perp C$ , protože mají netriviální průnik. Je pravda, že  $A = B^\perp$ ,  $B = A^\perp$ , protože  $A \perp B$  a součet dimenzí prostorů  $A$  a  $B$  je 4, tedy dimenze celého prostoru, v němž máme dané vektory. Konečně není  $A = C^\perp$  (třebaže  $A \perp C$ ), protože součet dimenzí 1 + 2 není roven dimenzi celého prostoru.

4.5 a)  $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 0$ . Geometricky: úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé.

b)  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + 0 + \|\mathbf{y}\|^2$ . Pythagorova věta.

c) Je to stejné jako (b), přechod od  $\mathbf{y}$  k  $-\mathbf{y}$  nemění levou stranu dokazované rovnosti.

d) Analogicky jako (b), jen po roznásobení závorek je těch součinů v zápise poněkud více, ale všechny součiny s navzájem různými vektory jsou nulové.

4.6 \$ octave --no-gui spustí svobodnou alternativu k Matlabu.

```
octave:1> A = [1 1 1 -1; 2 -1 -1 1; -1 2 2 1]'
```

```
A =  
 1  2 -1  
 1 -1  2  
 1 -1  2  
-1  1  1
```

```
octave:2> [Q R] = qr(A,0)
```

```
Q =  
-5.0000e-01  8.6603e-01 -8.3267e-17  
-5.0000e-01 -2.8868e-01 -4.0825e-01  
-5.0000e-01 -2.8868e-01 -4.0825e-01  
 5.0000e-01  2.8868e-01 -8.1650e-01
```

```
R =  
-2.00000  0.50000 -1.00000  
 0.00000  2.59808 -1.73205  
 0.00000  0.00000 -2.44949
```

Báze je ve sloupcích matice  $\mathbf{Q}$ . První bázový vektor je jen normalizovaný první sloupec matice  $\mathbf{A}$ , tj. zde násobený polovinou (ve skutečnosti mínus polovinou, v tom má algoritmus svobodnou volbu a jeho chování neovlivníme). Další sloupec je lineární kombinací prvních dvou sloupců  $\mathbf{A}$ , navíc kolmý na první sloupec  $\mathbf{Q}$  a normalizovaný. Atd. Koeficienty lineárních kombinací sloupců matice  $\mathbf{Q}$ , které se rovnají sloupcům matice  $\mathbf{A}$ , vidíme v matici  $\mathbf{R}$ . Nepovinný parametr 0 ve volání funkce `qr()` vede na redukovaný QR rozklad. Bez něj bychom měli plný QR rozklad, tj.  $\mathbf{Q}$  by byla čtvercová: další sloupce jsou ortonormální bází z ortogonálního doplňku rng  $\mathbf{A}$ , tedy je tam řešení soustavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ . Matice  $\mathbf{R}$  je pak obdélníková doplněná nulami.

Pozorování: QR rozklad je numerické vyjádření Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace.

4.7 Jsou-li  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  ortogonální, tj. čtvercové s vlastností  $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , pak

$$(\mathbf{UV})^T(\mathbf{UV}) = \mathbf{V}^T\mathbf{U}^T\mathbf{UV} = \mathbf{V}^T\mathbf{I}\mathbf{V} = \mathbf{I}.$$

Doplňující otázka k ortogonálním maticím: Je-li  $\mathbf{U}$  ortogonální, pak  $\mathbf{U}^T$  je taky ortogonální. Jinými slovy, ortogonální matice má nejen ve sloupcích, ale i v řádcích ortonormální bázi. Důvod:  $\mathbf{U}$  má plnou hodnotu, tedy z LA víme, že má inverzní matici, tj. matici, která násobena zleva i zprava danou maticí dává  $\mathbf{I}$  (to se dokazuje pomocí determinantů). Sdělení  $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$  násobme zprava inverzní maticí  $\mathbf{U}^{-1}$  a dostáváme, že  $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$ . Tato matice umí násobit danou maticí  $\mathbf{U}$  zprava i zleva se stejným výsledkem  $\mathbf{I}$ .

4.10 Není to izometrie, protože velikost vektoru  $(1, -1, 2)$  není rovna velikosti obrazu  $(1, 2, -1, 1)$ . Kdybychom upravili zadání, že totiž  $\mathbf{f}(1, -1, 2) = (1, 2, -1, 0)$ , pořád bychom neměli izometrii, protože není skalární součin vektorů roven skalárnímu součinu obrazů.

Doplňující otázka: mějme lineární zobrazení  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kde  $m > n$ . Může být izometrií? Odpověď: Ne, protože  $f$  musí mít při  $m > n$  netriviální kernel a nenulové vektory z kernelu mají obraz nulové velikosti.

4.12 a) Ověříme, že skalární součiny vektorů každý s každým dávají nulu.

b) Vyřešíme soustavu  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , kde matice  $\mathbf{A}$  obsahuje v řádcích zadané tři vektory. Báze řešení je třeba  $\mathbf{y} = (-1, 1, 0, 1)$ .

c) (Tento podúkol v aktuální verzi skript chybí. Máme najít ortogonální projektory na podprostory  $\text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  a  $\text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^\perp$ .) Najdeme ortogonální projekce na podprostory  $\text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  a  $\text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^\perp$  (bylo v původní verzi skript). Normalizované vektory, tj.  $\mathbf{x}_1/\sqrt{6}$ ,  $\mathbf{x}_2/\sqrt{3}$ ,  $\mathbf{x}_3/\sqrt{3}$  zapíšeme do sloupců matice  $\mathbf{U}$ . Matice má ortonormální sloupce. Dále do jednosloupcové matice  $\mathbf{V}$  zapíšeme normalizovaný  $\mathbf{y}/\sqrt{3}$ . Projektor na  $\text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  je  $\mathbf{UU}^T$  a na  $\text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}^\perp = \text{span}\{\mathbf{y}\}$  je  $\mathbf{VV}^T$ . Ten druhý projektor se pohodlněji počítá (méně výpočtů při maticovém násobení) a vychází

$$\mathbf{P}_Y = \frac{1}{3}\mathbf{yy}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Projektor } \mathbf{P}_X \text{ můžeme pak spočítat z právě vypočteného:}$$

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{I} - \mathbf{P}_Y. \text{ Vyhne se tak maticovému násobení } \mathbf{UU}^T.$$

4.13 Můžeme volit jakékoli dva na sebe kolmé vektory ve  $\text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ . Například první vektor ponecháme a druhý upravíme na  $\mathbf{y}'$  tak, aby zůstal ve  $\text{span}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ , ale byl na  $\mathbf{x}$  kolmý. Zvolíme  $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{p}$ , kde  $\mathbf{p}$  je kolmá projekce  $\mathbf{y}$  na  $\text{span}\{\mathbf{x}\}$ , což je  $\mathbf{p} = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2 = \frac{5}{2}(0, 1, 1)$ . Takže  $\mathbf{y}' = (1, 2, 3) - \frac{5}{2}(0, 1, 1) = (1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ . Vektor  $\mathbf{y}$  můžeme vynásobit dvěma jen pro formu, abychom měli celočíselný výsledek. Dva kolmé vektory respektující původní span jsou  $(0, 1, 1)$ ,  $(2, -1, 1)$ .

Poznámka: vzoreček pro výpočet projekce  $\mathbf{p}$  můžeme odvodit dvěma způsoby. (1) číslo  $c = \mathbf{y}^T\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$  je první souřadnice vektoru  $\mathbf{y}$  vzhledem ortonormální bázi, kde prvním bázovým vektorem je  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ . To je vlastnost skalárního součinu. Projekce je pak  $\mathbf{p} = c\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$  (2) Projekce je  $\mathbf{p} = \mathbf{UU}^T\mathbf{y}$ , když  $\mathbf{U}$  je jednosloupcová matice obsahující  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ . Tedy  $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^T\mathbf{y})/\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^2$ .

Jiný způsob řešení: hledá se vektor  $\mathbf{y}' = (\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})$  takový, že  $\mathbf{y}' \perp \mathbf{x}$ , tedy  $(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})^T\mathbf{x} = 0$ . To vede na  $\alpha = \frac{-2}{5}$  a  $\mathbf{y}' = (\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{5}) \sim (-2, 1, -1)$ .

4.20 Máme  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$  s definičním oborem všech takových matic z  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , pro které má matice  $\mathbf{I} + \mathbf{X}$  inverzi.

a)  $(\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X}) = \mathbf{I} - \mathbf{X}^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{X})(\mathbf{I} - \mathbf{X})$ .

b) Vynásobíme výsledek z a) výrazem  $(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$  zprava i zleva.

c) Ověříme  $\mathbf{F}(\mathbf{X})^T\mathbf{F}(\mathbf{X}) \stackrel{?}{=} \mathbf{I}$ , tedy  $((\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X}^T - \mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I} + \mathbf{X} - \mathbf{X} - \mathbf{X}^2)(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1} = ((\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X}) \stackrel{?}{=} \mathbf{I}$ . Protože  $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$ , je možné vynásobit poslední rovnost výrazem  $(\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)$  zleva a ptát se tedy na  $(\mathbf{I} - \mathbf{X}) \stackrel{?}{=} (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)$  a to je pravda, protože  $\mathbf{X}$  je antisymetrická.

Korektní vedení důkazu nyní musí proběhnout obráceně: vyjdeme z faktu  $(\mathbf{I} - \mathbf{X}) = (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)$  a postupnými úpravami v protisměru slova „tedy“ dostaneme dokazované tvrzení  $\mathbf{F}(\mathbf{X})^T \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$ .

- d) Ověříme  $((\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T = ((\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X}^T) \stackrel{?}{=} -(\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$ , tedy ověříme po vynásobení  $(\mathbf{I} + \mathbf{X})$  zprava tvrzení  $((\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^T(\mathbf{I} - \mathbf{X}^T)(\mathbf{I} + \mathbf{X}) = (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{X}^T + \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \mathbf{X}) = (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)^{-1}(-\mathbf{X}^T + \mathbf{X}) \stackrel{?}{=} -(\mathbf{I} - \mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathbf{I}$ , tedy po vynásobení  $(\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)$  zleva ověříme  $-\mathbf{X}^T + \mathbf{X} \stackrel{?}{=} (\mathbf{I} + \mathbf{X}^T)(\mathbf{X} - \mathbf{I}) = \mathbf{X} - \mathbf{I} + \mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{X}^T = \mathbf{X} - \mathbf{I} + \mathbf{I} - \mathbf{X}^T = -\mathbf{X}^T + \mathbf{X}$ . To zřejmě platí. Korektní vedení důkazu začíná poslední zřejmou rovností a jde v protisměru slov „tedy“ až k závěru, že  $(\mathbf{F}(\mathbf{X}))^T = -\mathbf{F}(\mathbf{X})$ .
- e) Ověříme  $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X})) \stackrel{?}{=} \mathbf{X}$ , tedy  $(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})^{-1} \stackrel{?}{=} \mathbf{X}$ . Po vynásobení  $(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1})$  zprava tedy ověříme  $\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1} \stackrel{?}{=} \mathbf{X}(\mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}) = \mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{X})(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$  a po vynásobení  $(\mathbf{I} + \mathbf{X})$  zprava tedy ověříme  $(\mathbf{I} + \mathbf{X}) - (\mathbf{I} - \mathbf{X}) \stackrel{?}{=} \mathbf{X}(\mathbf{I} + \mathbf{X}) + \mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{X})$ . Na obou stranách rovnosti máme  $2\mathbf{X}$ , takže to platí. Důkaz dále vedeme obráceně, tj. vyjdeme z faktu  $2\mathbf{X} = 2\mathbf{X}$  a dojdeme k tvrzení, že  $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$ .

## Kapitola 5

**5.2** Toto je typický příklad přeúčtené soustavy bez řešení (zkuste eliminovat na papíře, zjistíte, že to nemá řešení). Vložte matici  $\mathbf{A}$  a vektor pravých stran  $\mathbf{b}$  do Matlabu a zkuste tři metody výpočtu řešení ve smyslu nejmenších čtverců. a) pomocí matlabské operace zpětné lomítka:  $\mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$ , b) přímým řešením normálních rovnic, vzorec (5.3) ve skriptech:  $(\mathbf{A}' * \mathbf{A})^{-1} * \mathbf{A}' * \mathbf{b}$  a konečně, c) QR rozkladem, tj. podle vzorce (5.8):  $[\mathbf{Q} \ \mathbf{R}] = \text{rq}(\mathbf{A}, 0)$ ;  $\mathbf{R}^{-1} * \mathbf{Q}' * \mathbf{b}$ . Ve všech případech dostaneme stejné řešení. Komická hodnota  $-0.0000$  ve výsledku naznačuje, že Matlab má smysl pro humor.

**5.3 a)** Minimalizujeme  $\sum \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2$  při daných  $\mathbf{a}_i$ . To odpovídá přeúčtené soustavě nehomogenních rovnic

$$\begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{x} = \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x} = \mathbf{a}_m \end{array} \quad \text{tedy} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

a  $\mathbf{x}$  je řešení dle metody nejmenších čtverců. Vynásobením zleva transponovanou maticí soustavy  $[\mathbf{I} \ \mathbf{I} \ \dots \ \mathbf{I}]$  (tj. převedením na normální rovnice) máme  $m \mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_m$  a odtud vidíme, že  $\mathbf{x}$  musí být těžiště zadaných bodů  $\mathbf{a}_i$ .

**b)** Hledáme  $t \in \mathbb{R}$  tak, že bod  $\mathbf{a} + t\mathbf{s}$  minimalizuje vzdálenost od  $\mathbf{y}$ , tedy

$$\min \|\mathbf{a} + t\mathbf{s} - \mathbf{y}\|^2 = \min (a_1 + ts_1 - y_1)^2 + (a_2 + ts_2 - y_2)^2 + \dots + (a_n + ts_n - y_n)^2.$$

To je úloha nejmenších čtverců pro přeúčtenou soustavu  $n$  rovnic s jednou proměnnou  $t$  ve tvaru  $\mathbf{s}t = (\mathbf{y} - \mathbf{a})$ . Matice soustavy je tedy jednosloupcová  $\mathbf{P} = \mathbf{s}$ , pravá strana je  $\mathbf{q} = \mathbf{y} - \mathbf{a}$ . Normální rovnice zní  $\mathbf{s}^T \mathbf{s} t = \mathbf{s}^T (\mathbf{y} - \mathbf{a})$  a řešení je  $t = \mathbf{s}^T (\mathbf{y} - \mathbf{a}) / \|\mathbf{s}\|^2$ . Po dosazení tohoto výsledku do hledané vzdálenosti máme hodnotu minima

$$\left\| \mathbf{a} + \frac{\mathbf{s}^T (\mathbf{y} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{s}\|^2} \mathbf{s} - \mathbf{y} \right\| = \left\| (\mathbf{a} - \mathbf{y}) - \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^T}{\|\mathbf{s}\|^2} (\mathbf{y} - \mathbf{a}) \right\| = \left\| \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^T}{\|\mathbf{s}\|^2} \right) (\mathbf{y} - \mathbf{a}) \right\|.$$

Vidíme tedy, že výsledek se schoduje s výsledkem, který získáme jako velikost rejekce bodu  $\mathbf{y} - \mathbf{a}$  vzhledem k přímce  $t\mathbf{s}$ , tedy  $\|(\mathbf{I} - \mathbf{U} \mathbf{U}^T)(\mathbf{y} - \mathbf{a})\|$ , kde  $\mathbf{U} = \mathbf{s} / \|\mathbf{s}\|$ , tedy matice s jedním ortonormálním sloupcem.

**c)** Hledání vzdálenosti dvou mimoběžek  $\mathbf{a}_1 + t\mathbf{s}_1$  a  $\mathbf{a}_2 + v\mathbf{s}_2$ ,  $t, v \in \mathbb{R}$ , vede na úlohu nejmenších čtverců pro přeúčtenou soustavu se dvěma neznámými  $t, v$  ve tvaru  $\mathbf{a}_1 + t\mathbf{s}_1 = \mathbf{a}_2 + v\mathbf{s}_2$ . Hledáme tedy  $\min \|\mathbf{a}_1 + t\mathbf{s}_1 - (\mathbf{a}_2 + v\mathbf{s}_2)\|^2$ . Argumentace je stejná, jako v předchozí úloze b). Soustavu zapíšeme ve tvaru  $\mathbf{P} \mathbf{u} = \mathbf{q}$ , tedy  $[\mathbf{s}_1 \ -\mathbf{s}_2] \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ . Matice soustavy má dva sloupce. Převod na normální rovnici vede na

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ -\mathbf{s}_2^T \end{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \ -\mathbf{s}_2] \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ -\mathbf{s}_2^T \end{bmatrix} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1), \quad \text{tedy} \quad \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1\|^2 & -\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_2 \\ -\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_2 & \|\mathbf{s}_2\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \\ \mathbf{s}_2^T (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \end{bmatrix}.$$

**g)** Všechny naměřené vzorky  $(G_i, S_i, P_i)$  pro  $i \in \{1, \dots, n\}$  mají vyhovovat rovnostem

$$P_i = G_i(a_1 + a_2 S_i + a_3 10^{G_i + S_i} + a_4 10^{-S_i})$$

což je pro  $n > 4$  přeúčtená nehomogenní soustava s neznámými  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , kterou chceme řešit ve smyslu nejmenších čtverců. Jednotlivé řádky matice soustavy včetně odpovídajícího údaje ze sloupce pravých stran jsou:

$$[ G_i \quad G_i S_i \quad G_i 10^{G_i + S_i} \quad G_i 10^{-S_i} \quad | \quad P_i ]$$

Matice soustavy (bez sloupce pravých stran) má  $n$  řádků a čtyři sloupce. Úkolem pak je z naměřených dat vytvořit tuto matici a sloupec pravých stran, vložit údaje do počítače a provést  $\mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$ . Tím dostaneme odhad hodnot  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

- h) Máme konečnou posloupnost známých údajů  $p_1, p_2, \dots, p_n$  a chceme predikovat údaj  $p_{n+1}$  pomocí vzorce  $p_{n+1} = \beta_1 + \beta_2 p_n + \beta_3 p_{n-1}$ . K tomu účelu musíme nejprve odhadnout  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  ze známých hodnot  $p_1, p_2, \dots, p_n$  jako řešení přeřčené soustavy s maticí a sloupcem pravých stran:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & p_2 & p_1 \\ 1 & p_3 & p_2 \\ 1 & p_4 & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_{n-1} & p_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

Vyřešením této přeřčené soustavy (pro  $n > 5$ ) ve smyslu nejmenších čtverců dostaneme odhady  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , které použijeme ve vzorci pro predikci.

- 5.4 Je potřeba si rozmyslet, že maticové násobení funguje takto:

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_j a_{1j}x_j - b_1 \\ \sum_j a_{2j}x_j - b_2 \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj}x_j - b_m \end{bmatrix}, \quad \text{takže} \quad \sqrt{\mathbf{W}}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1}(\sum_j a_{1j}x_j - b_1) \\ \sqrt{w_2}(\sum_j a_{2j}x_j - b_2) \\ \vdots \\ \sqrt{w_m}(\sum_j a_{mj}x_j - b_m) \end{bmatrix}$$

Promyslete si to, projděte si to podrobně nad rozepsanými maticemi. Symbolem  $\sqrt{\mathbf{W}}$  je označena matice  $\text{diag}(\sqrt{w_1}, \dots, \sqrt{w_n})$ , což je čtvercová matice rozměru  $n \times n$ , která obsahuje na diagonále uvedené prvky a mimo ní jsou nuly. Platí  $\sqrt{\mathbf{W}}\sqrt{\mathbf{W}} = \mathbf{W}$ .

Dále zjevně platí, že  $\|\sqrt{\mathbf{W}}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})\|^2 = f(\mathbf{x})$  ze zadání příkladu. Minimalizuje se tedy  $\|\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{Ax} - \sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{b}\|^2$ . Optimální řešení je řešení soustavy  $\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{Ax} = \sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{b}$  ve smyslu nejmenších čtverců. Soustava normálních rovnic (5.3) je v naší úloze  $\mathbf{A}^T\sqrt{\mathbf{W}}^T\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\sqrt{\mathbf{W}}^T\sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{b}$ , stručněji  $\mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{W}\mathbf{b}$ . Pseudoinverzi si zapíšte sami.

- 5.8 c,d) Na to se dá jít různými cestami, my využijeme vzoreček o projektoru. Kdyby matice  $\mathbf{A}$  měla ve sloupcích zadané vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , a vektor  $(2, 0, 1)$  označíme  $\mathbf{z}$ , pak projekce  $\mathbf{z}$  na  $\text{rng } \mathbf{A}$  (neboli odpověď na otázku c) je  $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{z}$  a projekce na kolmý doplněk (odpověď na otázku d) je  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T)\mathbf{z}$ . Jenže, to je zbytečně moc počítání.

Najdeme raději bázi podprostoru  $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}^\perp$  vyřešením soustavy  $\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Ta báze obsahuje jediný vektor, například  $\mathbf{b} = (2, 5, 3)$ . Nyní projekce na kolmý doplněk (odpověď d) je

$$\mathbf{d} = \mathbf{b}(\mathbf{b}^T\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}^T\mathbf{z} = \frac{1}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b}(\mathbf{b}^T\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{z}}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b} = \frac{7}{38}(2, 5, 3).$$

Projekci na  $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ , (tedy řešení d) spočítáme jako  $\mathbf{z} - \mathbf{d} = \frac{1}{38}(62, -35, 17)$ .

- 5.16 Nejdříve vyřešíme podúlohy (e)-(g), které jsou jednodušší díky ortonormalitě sloupců matice  $\mathbf{U}$ . Problémy (f)-(h) budeme navíc řešit od konce – nejprve (h) a z toho vše ostatní plyne.

- e) Je to vzdálenost bodu  $\mathbf{v}$  od jeho kolmé projekce na  $\text{rng } \mathbf{U}$ , tedy od bodu  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{v}$ . Vzdálenost je  $\|\mathbf{v} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{v}\| = \|(\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T)\mathbf{v}\|$ .

- h) Nechť  $\mathbf{p}$  je partikulární (tj. nějaké) řešení soustavy  $\mathbf{U}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , takže leží v zadaném afinním podprostoru. Kolmý doplněk k tomuto podprostoru je  $X = \text{rng } \mathbf{U}$ . Na  $X$  kolmo promítneme jednak  $\mathbf{p}$  (je to  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{p}$ ) a jednak zadaný bod  $\mathbf{v}$ . Dostaneme  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{v}$ . Vzdálenost  $\mathbf{v}$  od daného afinního podprostoru je stejná jako vzdálenost těch dvou projekcí, takže počítáme

$$\|\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{v} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{p}\| = \|\mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{v} - \mathbf{U}^T\mathbf{p})\| = \|\mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})\| = \|\mathbf{U}^T\mathbf{v} - \mathbf{b}\|.$$

Předposlední rovnost plyne z faktu, že  $\mathbf{p}$  je partikulární řešení soustavy  $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  a poslední rovnost plyne z toho, že zobrazení  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$  je izometrie.

- g) Vzorec z (h) přechází při  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  na  $\|\mathbf{U}^T\mathbf{v}\|$ .

- f) Vzorec z (h) přechází při  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  na  $\|\mathbf{b}\|$ .

Teď pojďme na podúlohy (a)-(d). Vyjdeme z řešení nejobecnější úlohy, označme ji jako (x). Ostatní úlohy pak vyřešíme tak, že obecné řešení upravíme na konkrétní případ. To matematici rádi dělají.

- x) Najdeme vzdálenost bodu  $\mathbf{v}$  od afinního prostoru  $\{\mathbf{x}; \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ . Budeme postupovat analogicky jako v řešení předchozího cvičení. V tomto cvičení jsme hledali vzdálenost vektoru  $\mathbf{v}$  od množiny  $\{\mathbf{x}; \mathbf{U}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ , použili jsme projekce partikulárního řešení  $\mathbf{p}$  a zadaného  $\mathbf{v}$  na  $\text{rng } \mathbf{U}$  a vzdálenost těch dvou projekcí jsme spočítali. Nyní máme místo  $\mathbf{U}^T$  ( $\mathbf{U}^T$  měla ortonormální řádky) matici  $\mathbf{A}$  (jen s lin. nezávislými řádky). Potřebujeme ty dva vektory kolmo promítnout do  $\text{rng } \mathbf{A}$ . Projektor na tento podprostor je  $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ , jak víme z teorie k této kapitole. Hledáme tedy vzdálenost projekce zadaného vektoru  $\mathbf{v}$  od projekce partikulárního řešení  $\mathbf{p}$  v  $\text{rng } \mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \|\text{proj.}\mathbf{v} - \text{proj.}\mathbf{p}\| &= \|\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{p}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})\| = \\ &= \sqrt{(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})} = \sqrt{(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{v} - \mathbf{b})} \end{aligned}$$

- b) V terminologii podúlohy x) je  $\mathbf{a} = \mathbf{A}$  a  $b = \mathbf{b}$ , takže druhá mocnina hledané vzdálenosti je  $\mathbf{b}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = b(\mathbf{a}^T\mathbf{a})^{-1}b = b^2/\|\mathbf{a}\|^2$  a vzdálenost je  $\sqrt{b^2/\|\mathbf{a}\|^2} = |b|/\|\mathbf{a}\|$ .
- c) Vzdálenost množiny  $\{\mathbf{x}; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$  od počátku získáme z obecného vzorce x) nahrazením  $\mathbf{v}$  nulovým vektorem a přeznačkováním  $\mathbf{A}^T \leftarrow \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A}^T$ . Protože  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , je také  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Dostáváme  $\sqrt{\mathbf{b}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}}$ .
- d) Vzdálenost bodu  $\mathbf{v}$  od nadroviny  $\{\mathbf{x}; \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$  získáme použitím obecného vzorce z úlohy x), kde  $\mathbf{A} = \mathbf{a}^T$ , tedy

$$\sqrt{(\mathbf{a}^T\mathbf{v} - b)^T(\mathbf{a}^T\mathbf{a})^{-1}(\mathbf{a}^T\mathbf{v} - b)} = \sqrt{\frac{(\mathbf{a}^T\mathbf{v} - b)^2}{\|\mathbf{a}\|^2}} = \frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{v} - b|}{\|\mathbf{a}\|}$$

**Poznámka.** Ještě připojím důležitou poznámku o projekcích na lineární podprostor daný jako  $\text{rng } \mathbf{A}$ , což je popsáno v §5.2. Na výpočet projekce/projektoru jsou ve skriptech dva vzorce: jednak obecný vzorec (5.9) který funguje pro libovolnou matici  $\mathbf{A}$  s lineárně nezávislými sloupci, a jednak (5.14) který funguje jen když matice  $\mathbf{A}$  má ortonormální sloupce, tedy  $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$  (v dřívějších verzích skript byla v tomto případě matice  $\mathbf{A}$  značena písmenem  $\mathbf{U}$ ). Další (ale poněkud nešikovná) možnost je použít vždy vzorec (5.14) s tím, že na matici  $\mathbf{A}$  nejprve použijeme QR rozklad a vezmeme místo  $\mathbf{A}$  matici  $\mathbf{Q}$ . Nepřehlédněte to, prosím, v písemce se to může s vysokou pravděpodobností vyskytnout.

$$5.17 \quad \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\|^2 = [\mathbf{a}^T \ \mathbf{b}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T\mathbf{a} + \mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

# Kapitola 6

**Poznámka** T.Wernera: Ve verzi skript z roku 2023 je popsán další způsob zjišťování definitnosti matice pomocí symetrické Gaussovy eliminace. Řešení v této kapitole (jakož i v některých dalších kapitolách, např. 8) byla napsána dříve a proto tento způsob nezohledňují.

## 6.1

	polynom	počet proměnných	stupeň	homogenní
a)	+	2	3	–
b)	+	$n$	1	+
c)	–	$n$		
d)	+	$n$	2	–
e)	+	$2n$	2	+
f)	+	$n^2$	1	+
g)	+	$n^2$	$n$	+

Toto je jednoduché cvičení na terminologii polynomů více proměnných. Sami si rozmyslete odpovědi na zadané otázky a pak to srovnajte se zde uvedenou tabulkou.

Případ c) není polynom, protože je to odmocnina z polynomu. Případ g) vás přinutí vzpomenout si na definici determinantu vzorcem, ve kterém je jistá suma součinů prvků  $x_{ij}$ , přičemž těch činitelů je v každém součinu stejný počet:  $n$ .

**6.2** Toto je opakování na počítání vlastních čísel a vlastních vektorů matic. Charakteristický polynom  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$  je pro první matici roven  $\lambda^2 + 2\lambda - 1$  a jeho kořeny (tedy vlastní čísla matice) jsou  $-1 \pm \sqrt{2}$ . Dosadíme-li do vzorce  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{0}$  první kořen, dostáváme homogenní soustavu s maticí  $[2 - \sqrt{2} \quad 2 \mid 0]$  a vlastní vektor příslušející prvnímu vlastnímu číslu tedy je například  $(2, \sqrt{2} - 2)$ . Vlastní vektor příslušející druhému vlastnímu číslu je  $(-2, 2 + \sqrt{2})$ .

Výsledky pro druhou matici:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$ .

Matlab má funkci `eig()`, která vrátí vlastní čísla. Celý spektrální rozklad matice  $\mathbf{A}$  získáme pomocí `[V D] = eig(A)`.

**6.4** Nulová matice má  $n$  vlastních čísel, všechny jsou nuly, vlastní vektory jsou jakékoli nenulové. Jednotková matice má vlastní čísla jedničky, vlastní vektory jsou libovolné nenulové. Obojí plyne přímo z definičního vzorce  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ .

Diagonální i trojúhelníková matice mají vlastní čísla uvedené na diagonále této matice jak plyne z charakteristického polynomu  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ . Má-li diagonální matice všechny diagonální prvky různé, pak  $i$ -tému vlastnímu číslu přísluší vlastní vektor  $\mathbf{e}_i$  (všude nuly, jen v  $i$ -té složce je jednička). U trojúhelníkové matice není pro vlastní vektor přímý výsledek, je nutno jej spočítat dosazením do vzorce  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{0}$ .

**6.5** Víme, že  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Vlastní čísla a vektory matice  $\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}$  označíme  $\tilde{\lambda}$  a  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Pro ně platí z definice  $(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{v}}$ . Po úpravě je  $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\lambda} - \alpha)\tilde{\mathbf{v}}$ , takže  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  a  $\tilde{\lambda} - \alpha = \lambda$ . Z poslední rovnosti máme  $\tilde{\lambda} = \lambda + \alpha$ . Vlastní číslo se zvětší o  $\alpha$  a vlastní vektor k němu je stejný.

**6.8** Připomeňme, že definitnost matic je definována jen pro symetrické matice. To všechny matice zadané v tomto cvičení splňují.

Definitnost určíme jen pomocí hlavních minorů (přesto, že je to skriptech označené hvězdou, tj. nepovinné) a vlastních čísel. Symetrickou Gaussovu eliminaci zde dělat nebudeme.

Matice (b) má vlastní čísla 1 a 3, obě jsou kladná, tj. je pozitivně definitní. Také všechny vůdčí hlavní minory, tj.  $D_1 = 2$  a  $D_2 = \det \mathbf{A} = 3$  jsou kladné.

Důležitá poznámka. Pro pozitivní definitnost stačí ověřit kladnost jen *vůdčích* hlavních minorů (*leading principal minors*) zatímco pro pozitivní semidefinitnost je třeba projít nezápornost *všech* hlavních minorů. Terminologie: *minor* je determinant libovolné čtvercové submatice, *hlavní minor* je determinant submatice, ve které je vybrána stejná podmnožina řádků i sloupců, *vůdčí hlavní minor* je determinant submatice umístěné v levém horním rohu původní matice.

Příklad: matice  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  má oba vůdčí hlavní minory nulové, tedy nezáporné, ale to nestačí k tomu, abychom mohli prohlásit, že je pozitivně semidefinitní. Hlavní minor z matice  $[a_{22}]$ , který není vůdčí, je totiž záporný.

Další důležitá poznámka: Negativní (semi)definitnost matice  $\mathbf{A}$  se nejspolehlivěji ověří jako pozitivní (semi)definitnost matice  $-\mathbf{A}$ . Kdybyste nechtěli přecházet k matici  $-\mathbf{A}$ , pak vezte, že

hlavní minory lichých řádů musejí být záporné (nekladné) a hlavní minory sudých řádů musejí být kladné (nezáporné). Rozmyslete si  $\det(-\mathbf{A})$  pro  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pro liché nebo sudé  $n$ .

Matice (g) v tomto cvičení má vůdčí hlavní minory  $D_1 = -2$  a  $D_2 = -6$ . Dále není třeba počítat. Protože hlavní minor sudého řádu je záporný, nemůže být tato matice ani pozitivně ani negativně semidefinitní, je tedy indefinitní.

**6.9** Kdybychom počítali minory či vlastní čísla přímo zadané matice, nedostali bychom žádný relevantní výsledek. Vlastní čísla by klidně mohla třeba vyjít komplexní. To sice v tomto příkladě nenastalo, vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou  $-1$  a  $-2$ , ale to nám nic neříká o negativní semidefinitnosti a tím ani o zápornosti příslušné kvadratické formy. Je třeba tutéž kvadratickou formu reprezentovat symetrickou maticí  $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & -4 \end{bmatrix}$  a ta je indefinitní, protože má záporný minor sudého řádu. To můžeme zjistit i z vlastních čísel této symetrické matice, která jsou přibližně  $-4,05$  a  $1,05$ . Žádně z tvrzení a), b), c) není tedy správně.

**6.10 a)**  $2xy$  rozdělíme na dvě stejné části a máme symetrickou matici  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

b) Spektrální rozklad je  $\mathbf{A} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$ , kde  $\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Ve sloupcích matice  $\mathbf{V}$  jsou příslušné vlastní vektory. Je  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{x}$ , takže po přechodu na nové souřadnice  $\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{V}^T \mathbf{x} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$  dostáváme  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{w} = 4u^2 + 2v^2$ . Je tedy  $\mathbf{U} = \mathbf{V}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

c) Je to elipsa se středem v počátku a procházející body  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  a  $(\frac{1}{2}, 0)$ . d) Přechod od souřadnic  $(x, y)$  k souřadnicím  $(u, v)$  je realizován otočením o  $45^\circ$ . Hledaná množina je otočená elipsa o úhel  $45^\circ$ .

**6.14 a)**  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + [3 \ -6] \mathbf{x} + 5$ . Údaj  $\mathbf{x}_0$  pro doplnění na čtverec získáme řešením soustavy  $-2\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , tedy  $-2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ . Ta má řešení  $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}, -1)$ . Takže

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) = [x - \frac{1}{2} \quad y + 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y + 1 \end{bmatrix} + \frac{35}{4}.$$

Protože  $\mathbf{A}$  je indefinitní (má záporný hlavní minor sudého řádu), má daná kvadratická funkce v bodě  $(\frac{1}{2}, -1)$  sedlo, tedy nemá tam extrém.

Možná znáte doplňování na čtverec kvadratické funkce v jedné proměnné:  $ax^2 + bx + c = a(x - (-b/2a))^2 + d$ . Všimněte si analogie:  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  v jedné proměnné a  $\mathbf{x}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  ve více proměnných.

**6.19 a)** Dokážeme to pomocí spektrálního rozkladu symetrické matice, což je speciální případ kongruence. Positivně definitní matice  $\mathbf{A}$  má spektrální rozklad  $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ , kde diagonální matice  $\mathbf{\Lambda}$  má na diagonále kladné prvky, ke kterým můžeme vytvořit převrácené hodnoty a dostaneme tak matici  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ . Pak je  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T$ , protože

$$(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T)(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T) = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{V}^T\mathbf{V})\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1})\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}.$$

b) Ukážeme nejprve regularitu matice  $\mathbf{A}$ , tedy že soustava  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  má jediné nulové řešení. Vynásobením zleva  $\mathbf{x}^T$  máme rovnost  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{0} = 0$ . Protože ale je  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  (z předpokladu, že  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní), musí být  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Ukážeme nyní, že  $\mathbf{y}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} > 0$ . Volme  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}$ , tedy  $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ . Dosadíme:  $(\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ .



# Kapitola 7

(pro novou verzi skript upravil Tomáš Werner)

Shrneme nejprve nejdůležitější poznatky. Předpokládáme  $\mathbf{C}$  symetrickou matici z  $\mathbb{R}^{n \times n}$  s vlastními čísly  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Úloha

$$\max\{\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}; \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1\} \quad (1)$$

má argument maxima  $\mathbf{v}_1$  (první vlastní vektor) a hodnotu  $\lambda_1$ . Důkaz plyne ze spektrálního rozkladu  $\mathbf{C} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T$  a z vyjádření kvadratické formy  $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$  v nové bázi. Vektor  $\mathbf{v}_1$  je první sloupec matice  $\mathbf{V}$ . Úloha (1) se dá zobecnit pro „vícesloupcové“  $\mathbf{x}$ , tedy matici  $\mathbf{X}$  s  $k$  sloupci,  $k < n$ :

$$\max\{\text{tr}(\mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X}); \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times k}, \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{I}\} \quad (2)$$

Rozdělíme-li  $\mathbf{V}$  ze spektrálního rozkladu  $\mathbf{C}$  do dvou bloků, z nichž první má  $k$  sloupců a druhý  $n - k$  sloupců, tedy  $\mathbf{V} = [\mathbf{X} \ \mathbf{Y}]$ , pak argumentem maxima je první blok a hodnotou maxima je  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ . Toto je *úloha na největší stopu*.

Když v úloze (1) nahradíme maximum minimem, situace bude zcela obdobná: úloha

$$\min\{\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}; \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1\} \quad (3)$$

má jako hodnotu minima *nejmenší* vlastní číslo  $\lambda_n$  a nabývá se v jemu příslušném vlastním vektoru  $\mathbf{v}_n$ . Podobně pro minimalizační verzi úlohy (2). Aby nám tam však značení hezky souhlasilo s výše uvedeným rozkladem  $\mathbf{V} = [\mathbf{X} \ \mathbf{Y}]$ , budeme místo přes matice  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  optimalizovat přes matice  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ , tedy úlohu (2) změníme na

$$\min\{\text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{C} \mathbf{Y}); \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}, \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \mathbf{I}\} \quad (4)$$

kteřá se tentokrát nazývá *úloha na nejmenší stopu*. Ta má hodnotu minima součet  $k$  nejmenších vlastních čísel (tj.  $\lambda_{n-k+1} + \dots + \lambda_n$ ) a nabývá se v bloku  $\mathbf{Y}$ .

Další úlohou je proložení  $m$  bodů  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$  podprostorem  $X$  stanovené dimenze  $k$  tak, aby součet čtverců vzdáleností těch bodů od podprostoru  $X$  byl nejmenší. Tedy:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^m (\text{dist}(\mathbf{a}_i, X))^2; \dim X = k\right\} \quad (5)$$

Naplníme-li matici  $\mathbf{A}$  ve sloupcích souřadnicemi daných bodů  $\mathbf{a}_i$ , pak tuto úlohu lze převést na úlohu (4) pro  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$ . Úloha (4) pak vrátí ve sloupcích  $\mathbf{X}$  ortonormální bázi hledaného prostoru  $X$  a ve sloupcích  $\mathbf{Y}$  ortonormální bázi jeho kolmého doplňku  $Y = X^\perp$ . Argument, proč tomu tak je, se opírá o představu projekce daných bodů  $\mathbf{a}_i$  do prostoru  $Y$ . Hledá se tedy  $Y$ , aby součet čtverců velikostí těchto projekcí byl co nejmenší. Ten součet vede (po chvíli výpočtu) na výraz  $\text{tr}(\mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{Y})$ , kde ve sloupcích  $\mathbf{Y}$  je ortonormální báze prostoru  $Y$ . Což je úloha (4). Můžeme tedy matici  $\mathbf{V}$  ze spektrálního rozkladu matice  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$  rozdělit do dvou bloků  $\mathbf{V} = [\mathbf{X} \ \mathbf{Y}]$ , v prvním s  $k$  sloupci (tj. s  $k$  vlastními vektory příslušujícími největším vlastním číslům matice  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ ) je báze  $X$  a ve druhém bloku (s  $n - k$  sloupci) je báze  $Y$ . Úloha se jmenuje PCA (principal component analysis), protože umožňuje analýzu nikoli daných  $m$  bodů, ale jen jejich projekcí do podprostoru  $X$ , což je sice *ztrátová komprese*, ale podprostor  $X$  stanovené dimenze  $d$  je volen tak, aby ztráta byla co nejmenší. Projekce výchozích bodů do  $X$  pak můžeme popsat jen souřadnicemi v bázi podprostoru  $X$ , což je typicky daleko méně čísel než původní souřadnice bodů v  $\mathbb{R}^n$ . Zabýváme se tedy jen těmi podstatnými (principal) souřadnicemi v nové bázi.

Poslední příbuznou úlohou je hledání matice, která má hodnost nejvýše  $k$  (kde  $k$  je zadané číslo) a od zadané matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  se liší co nejméně, tedy

$$\min\{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|; \text{rank } \mathbf{B} \leq d\} \quad (6)$$

Předpokládáme  $d < \text{rank } \mathbf{A}$ , protože jinak lze volit  $\mathbf{B} = \mathbf{A}$  a úloha je o ničem. Názorné řešení této úlohy plyne ze SVD rozkladu matice  $\mathbf{A}$ , tedy  $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$ , kde nyní v matici  $\mathbf{S}$  odstraníme (pronulujeme) nejmenší singulární čísla, aby tam zbylo jen  $d$  největších čísel. Vzniklou matici  $\mathbf{S}_1$  použijeme na sestavení hledané  $\mathbf{B} = \mathbf{US}_1\mathbf{V}^T$ . Je pak jisté  $\text{rank } \mathbf{B} = d$  a dá se ukázat, že kvadrát Frobeniovy vzdálenosti  $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2$  je opravdu nejmenší možný a je roven sumě kvadrátů odstraněných singulárních čísel.

Úlohu (6) lze řešit i převodem na úlohu (5): ve sloupcích dané matice  $\mathbf{A}$  máme body  $\mathbf{a}_i$  a provedeme jejich projekci na podprostor  $X$ , který je řešením úlohy (5). Souřadnice těchto projekcí zapíšeme do sloupců matice  $\mathbf{B}$ . Udělali jsme tedy nejmenší možné změny sloupců ve smyslu součtu čtverců velikostí těch změn. A protože sloupce  $\mathbf{B}$  leží v prostoru dimenze  $d$ , je  $\text{rank } \mathbf{B} \leq d$ . Máme-li  $\mathbf{X}$  první blok matice  $\mathbf{V}$  ze spektrálního rozkladu matice  $\mathbf{AA}^T$  (při řazení vlastních čísel setupně), pak  $\mathbf{B} = \mathbf{XX}^T\mathbf{A}$ , protože  $\mathbf{XX}^T$  je matice kolmého projektoru na podprostor  $X$ .

**7.1** To je úloha  $\min\{\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}; \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\}$  zakuklená do jiného značení. Úloha najde minimum ve vlastním vektoru příslušejícímu nejmenšímu vlastnímu číslu.

**7.2** Matice  $\mathbf{C}$  na vstupu do spektrálního rozkladu musí být symetrická. Ovšem každá kvadratická forma má symetrickou matici, kterou lze získat tak, že původní matici  $\mathbf{C}$  nahradíte její symetrickou částí  $\frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T)$ . Pokud to neuděláte, dostanete chybný výsledek nebo dokonce vlastní čísla a vektory budou komplexní a matice ani nemusí mít diagonální rozklad.

**7.3** Hledá se maximum  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$  za podmínky  $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1$ . Eliminujeme  $y_1^2$  z podmínky, tedy  $y_1^2 = 1 - y_2^2 - \dots - y_n^2$  a dosadíme do účelové funkce:

$$\lambda_1(1 - y_2^2 - \dots - y_n^2) + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) y_2^2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1) y_n^2$$

Největší hodnota tohoto výrazu je  $\lambda_1$  (tj. největší vlastní číslo), protože dále je ve výrazu nezáporný součet: kvadráty jsou vždy nezáporné a jsou násobeny závorkami, které jsou taky nezáporné, protože  $\lambda_1$  je největší. Největší hodnotu zajistíme při volbě  $y_2 = y_3 = \dots = y_n = 0$ , pak tedy musí být  $y_1 = \pm 1$ .

**7.4** Dokážeme, že množiny  $P = \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}; \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1\}$  a  $Q = \{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x}; \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$  se rovnají. Tím pádem se rovnají i jejich maxima a minima. Vezmeme nějaké  $u \in P$ , tj. existuje  $\mathbf{x}$  tak, že  $u = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$  a navíc  $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1$ . Ovšem pak  $u = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ , protože jmenovatel v tomto výrazu je roven jedné. Takže  $u \in Q$ . Vezmeme nyní  $v \in Q$ , tedy  $v = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}/\mathbf{x}^T\mathbf{x}$  pro nějaký nenulový vektor  $\mathbf{x}$ . Označme  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ , tj.  $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}$ . Je zřejmé, že  $\mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1$ . A dosazením za  $\mathbf{x}$  do vzorce vyjadřující  $v$  máme  $v = \|\mathbf{x}\|\mathbf{y}^T\mathbf{A}\|\mathbf{x}\|\mathbf{y}/\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ . Reálné číslo  $v$  tedy leží v množině  $P$ . Rovnost  $P = Q$  je dokázána. Tudíž také  $\max P = \max Q$  a  $\min P = \min Q$ .

**7.5** Máme úlohu  $\max\{\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}; \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1, \mathbf{v}_i^T\mathbf{x} = 0 \text{ pro } i = 1, \dots, k\}$ . Provedeme  $\mathbf{C} = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^T$  a úloha po změně souřadnic  $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T\mathbf{x}$  přechází na  $\max\{\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y}; \mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1, y_i = 0 \text{ pro } i = 1, \dots, k\}$ , protože požadavek  $\mathbf{v}_i^T\mathbf{x} = 0$  pro  $i = 1, \dots, k$  je požadavek na nulový výsledek prvních  $k$  levých stran soustavy rovností  $\mathbf{V}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , takže  $y_i = 0$  pro  $i = 1, \dots, k$ .

**7.6** Připomínáme definici,  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_i \sum_j a_{ij}b_{ij}$ . Platí  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$ , protože pro  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\mathbf{B}$  je  $c_{ij} = \sum_k a_{ki}b_{kj}$  a dále  $\text{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{C}) = \sum_j c_{jj} = \sum_j \sum_k a_{kj}b_{kj}$ . Zřejmě také  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle$ .

Takže pro čtvercovou  $\mathbf{A}$  je  $\langle \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X} \rangle = \text{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X})$ .

Rovněž  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{X}\mathbf{X}^T \rangle = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^T, \mathbf{A} \rangle = \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{A})$ . Zde jsme využili faktu, že  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  je symetrická.

K ověření poslední rovnosti je třeba si uvědomit, že při značení  $\mathbf{C} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$  je  $c_{ij} = \mathbf{x}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x}_j$  a pro tuto matici počítáme stopu, tedy  $\sum_j c_{jj}$ .

**7.8** Je to úloha (5). Je třeba provést spektrální rozklad matice  $\mathbf{AA}^T$ , kde souřadnice zadaných bodů jsou ve sloupcích matice  $\mathbf{A}$ :

```

octave:1> A = [3 -3 4; -2 -3 -2; 1 0 -1; 3 1 0]'
A =
    3  -2  1  3
   -3  -3  0  1
    4  -2  -1  0

octave:2> [V D] = eig(A*A')
V =
   -0.616418  0.377131  0.691232
   0.319558  0.922118  -0.218130
   0.719661  -0.086429  0.688925
D =
Diagonal Matrix
    5.4877    0    0
    0  19.5624    0
    0    0  37.9500

```

báze přímky  
báze roviny  
největší vlastní číslo

```

octave:3> █

```

Matlab srovná vlastní čísla od nejmenšího (na rozdíl od skript, kde jsou řazena od největšího), výsledek tedy čteme ve sloupcích matice  $V$  zprava. Potřebujeme totiž vlastní vektory příslušející  $k$  největším vlastním číslům ( $k$  je dimenze hledaného podprostoru).

Bázi přímky vložíme do matice  $X=V(:,3)$ . Pak projekce daných bodů na přímku jsou  $X*X'*A$  a souřadnice těchto projekcí vzhledem k bázi přímky jsou  $X'*A$ . Nyní vložíme do matice  $X$  bázi roviny, tedy  $X=V(:,2:3)$ . Pak projekce daných bodů na rovinu jsou  $X*X'*A$  a souřadnice těchto projekcí vzhledem k bázi roviny jsou  $X'*A$ .

Hledáme-li přímku neprocházející počátkem, je třeba od všech sloupců matice  $A$  odečíst těžiště  $T$  všech zadaných bodů, tedy sumu sloupců matice  $A$  dělenou počtem sloupců:

```

octave:3> T = A*[1 1 1 1]'/4
T =
    1.25000
   -1.25000
    0.25000

octave:4> B = A - T*[1 1 1 1]
B =
    1.75000  -3.25000  -0.25000  1.75000
   -1.75000  -1.75000  1.25000  2.25000
    3.75000  -2.25000  -1.25000  -0.25000

octave:5> [V D] = eig(B*B')
V =
    0.649075  0.378395  -0.659939
   -0.524571  0.850905  -0.028045
   -0.550933  -0.364388  -0.750796
D =
Diagonal Matrix
    0.027894    0    0
    0  17.563479    0
    0    0  32.658627

```

Báze přímky rovnoběžné s hledanou přímkou

```

octave:6> █

```

Hledanou přímku parametricky zapíšeme jako  $T + \text{Span}(\text{výše vyznačená báze})$ .

V zadání byl ještě úkol dospět ke stejným výsledkům pomocí SVD. V tomto případě počítáme přímo SVD rozklad matice  $A$  resp.  $B$ . (Nikoli  $AA^T$  ani  $BB^T$ .) Použijeme  $[U S V] = \text{svd}(A)$ . Výsledná matice  $U$  má ve sloupcích levé singulární vektory a to jsou vlastní vektory matice  $AA^T$ . Kvadráty singulárních čísel matice  $A$  jsou vlastní čísla matice  $AA^T$ , kde je funkce `svd` seřadila od největšího singulárního čísla k nejmenšímu (tedy jako ve skriptech), takže výsledek pro přímku čteme v levém sloupci matice  $U$ .

**7.9** Protože je matice  $\mathbf{A}$  symetrická, vlastní čísla jsou reálná. Jsou-li nezáporná, pak SVD rozklad  $\mathbf{USV}^T$  je shodný se spektrálním rozkladem  $\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T$ , kde volíme  $\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$  a  $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ . Vyjdeme z této volby obecně. Je-li nějaké vlastní číslo  $\lambda$  záporné, pak na jeho místo do  $\mathbf{S}$  napíšeme  $-\lambda$  a odpovídající řádek matice  $\mathbf{V}^T$  vynásobíme  $-1$ . Tím se celkový součin nezmění. Toto provedeme se všemi zápornými vlastními čísly. Získali jsme  $\mathbf{S} \geq \mathbf{O}$  a máme SVD rozklad  $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^T$ .

Pozor: tento příklad nemá nic společného se známým vztahem  $\sigma_i^2 = \lambda_i$ , protože tento vztah platí pro singulární čísla matice  $\mathbf{A}$  a vlastní čísla matice  $\mathbf{AA}^T$ , což jsou různé matice.

```
>> A
A =
    -0.8667    0.1333   -1.4667
    -1.0667    0.9333   -0.2667

>> [U S V] = svd(A);
>> S
S =
    2.0000    0    0
    0    1.0000    0

>> S1 = [2 0 0; 0 0 0];
>> U*S1*V'

ans =
    -1.0667    0.5333   -1.0667
    -0.8000    0.4000   -0.8000

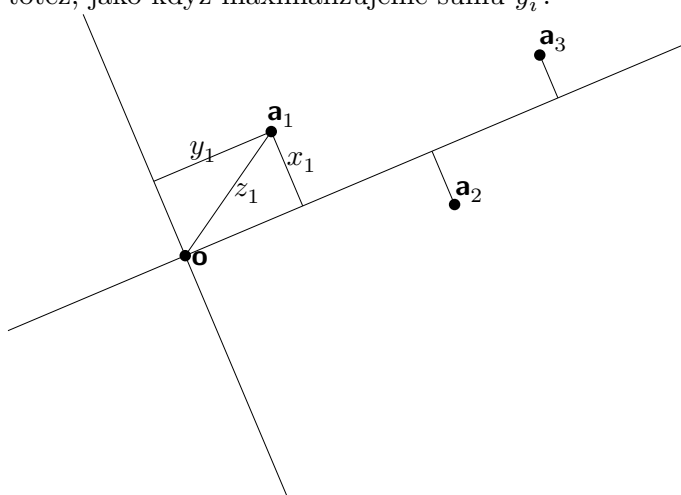
>> ans*15
ans =
   -16.0000    8.0000  -16.0000
   -12.0000    6.0000  -12.0000

>>
```

**7.10** Je to úloha (7). Je třeba najít SVD rozklad, pronulovat nejmenší diagonální prvek matice  $S$  (v tomto případě to je jednička) a najít novou matici s nejbližší hodnotou jako součin  $\mathbf{US}_1\mathbf{V}^T$ . Výpočet vidíme při pravém okraji.

**7.12** Problém je, že  $\mathbf{AA}^T$  má rozměr  $10^6 \times 10^6$ , takže raději spočítáme  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , což je rozměru  $100 \times 100$  a do počítače se nám vejde. Obě matice mají stejná nenulová vlastní čísla. Je-li  $\mathbf{v}$  vlastní vektor matice  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , pak  $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v}$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{AA}^T$ . Ta se nám sice nevejde do počítače, ale její vlastní vektory příslušející nenulovým vlastním číslům umíme tedy spočítat z vlastních vektorů matice  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ . Vzorec pro  $\mathbf{u}$  lze odvodit z definice vlastních čísel a vektorů: Je-li  $\mathbf{v}$  vlastní vektor  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , pak je  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Vynásobením zleva maticí  $\mathbf{A}$  a přezávkováním máme  $(\mathbf{AA}^T)(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{v})$ . Z toho jednak vidíme, že  $\lambda$  je také vlastní číslo matice  $\mathbf{AA}^T$ , a dále ve druhé a třetí závorce vidíme její vlastní vektor.

**7.13** Klíčové heslo v odpovědi na toto cvičení zní: „Pythagorova věta“. Vlastně jsme to zde již zmínili, když jsme odvodili úlohu (6). Body v prostoru i jeho nulový vektor (počátek) jsou pevně dány, tj. velikosti  $z_i$  jsou dány. Hledáme  $x_i$  (vzdálenosti od podprostoru) aby součet jejich kvadrátů byl minimální, nebo hledáme  $y_i$  (délky jejich ortogonálních projekcí) aby součet těchto kvadrátů byl maximální. Přitom je  $x_i^2 + y_i^2 = z_i^2 = \text{const.}$ , takže když minimalizujeme sumu  $x_i^2$ , je to totéž, jako když maximalizujeme sumu  $y_i^2$ .



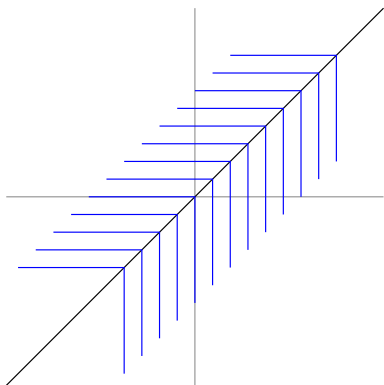
**7.13** Zahrňme souřadnice všech  $m$  bodů do sloupců matice  $\mathbf{A}$ . Jejich projekce  $P(\mathbf{A})$  získáme maticovým násobením  $\mathbf{PA}$ . Jejich těžiště najdeme maticovým násobením  $\frac{1}{m}\mathbf{A}\mathbf{1}$ . Tyto dvě operace skutečně komutují:  $\mathbf{P}(\frac{1}{m}\mathbf{A}\mathbf{1}) = \frac{1}{m}(\mathbf{PA})\mathbf{1}$ .

**7.15 a)** Vzdálenost bodu  $\mathbf{z}$  od přímky (nadroviny v  $\mathbb{R}^2$ ) zadané vzorcem  $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \beta$  jsme spočítali v Cvičení 5.16(d), tato vzdálenost je  $|\mathbf{a}^T\mathbf{z} - \beta|/\|\mathbf{a}\|$ . V terminologii našeho příkladu je  $\mathbf{a} = (a, b)$ ,  $\beta = -c$ , takže vzdálenost bodu  $(x_i, y_i)$  od naší přímky je  $|ax_i + by_i + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$ . Suma čtverců těchto vzdáleností tedy je  $1/(a^2 + b^2) \sum_i (ax_i + by_i + c)^2$ , což je něco jiného než  $\sum_i (ax_i + by_i + c)^2$ . Takže úloha neminimalizuje součet čtverců vzdáleností.

- b) Platí-li  $a^2 + b^2 = 1$ , je suma čtverců vzdáleností přímo rovna  $\sum_i (ax_i + bx_i + c)^2$ , což je účelová funkce naší úlohy. Prokládáme tedy zadanými body přímkou, abychom minimalizovali sumu čtverců vzdáleností, což je úloha (5) při volbě  $k = 1$ . Není to ale přímo úloha (5): nehledá se lineární podprostor ale afinní, je tedy třeba zadané body nejprve posunout proti těžišti, najít podprostor a nakonec posunout podprostor zpět o těžiště, viz třeba Cvičení 7.8 c.
- c) Vzdálenost bodu  $(x_i, y_i)$  od kuželosečky se rozhodně ne vždy rovná vzorci  $|Q(x_i, y_i)|$ , takže úloha s účelovou funkcí  $\sum_i Q^2(x_i, y_i)$  neminimalizuje součet čtverců vzdáleností. Například parabola  $x^2 - y = 0$  (tedy  $a = 1, e = -1$ , ostatní jsou nuly) vyhovuje podmínce  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  a ze Cvičení 1.1 (i) o ni víme, že je od bodu  $(3, 0)$  vzdálená  $\sqrt{5}$ , zatímco  $Q(3, 0) = 9$ .

## Kapitola 8

- 8.4** Funkce  $\max(x, y)$  se chová jako  $x$  při  $x > y$ , chová se jako  $y$  při  $x < y$ . V těchto případech je možné najít okolí bodu  $(x, y)$  ve kterém se funkce chová pořád jako  $x$  (v prvním případě)



nebo jako  $y$  ve druhém. Takže v těchto případech je funkce diferencovatelná, protože  $f(x, y) = x$  je diferencovatelná a stejně tak  $f(x, y) = y$ . Ovšem v případě, když  $x = y$ , pak tímto bodem  $(x_0, x_0)$  můžeme proložit třeba přímkou rovnoběžnou s osou  $x$  a sledovat funkční hodnoty na této přímce, tedy hodnoty  $\max(x, x_0)$ . Ty jsou konstantní a rovny  $x_0$  pro  $x \leq x_0$ , ale pro  $x > x_0$  je  $\max(x, x_0) = x$ . Takže parciální derivace v bodě  $(x_0, x_0)$  zleva je nula a zprava je rovna jedné, tedy celkově  $\frac{\partial f}{\partial x}$  neexistuje. V bodech  $y = x$  tedy funkce není diferencovatelná. V náčrtku jsou vyznačeny vrstevnice grafu této funkce. Na hraně  $y = x$  je „údolí“, například (je-li to mapa něčeho), tak tam může téct potůček směrem jihozápadním.

Kdybychom vyšetřovali naopak  $\min(x, y)$ , pak v místech  $y = x$  máme „ostrý horský hřeben“. Zkuste si načrtnout vrstevnice této funkce.

- 8.5** Obecně Jacobiho matice  $f'$  pro funkci  $f$  je rovna jednořádkové matici  $[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]$ . Je-li  $\mathbf{f}$  zobrazení, pak je  $\mathbf{f}'$  rovna matici obsahující v řádcích Jacobiho matice jednotlivých složek zobrazení. Při výpočtech derivací se zbytečně nenoríte do jednotlivých parciálních derivací a využijte pravidla shrnutá v tabulkách v §8.5.2 ve skriptech. Výsledné Jacobiho matice:

1.  $2x$ , 2.  $[2x, -2y]$ , 3.  $[0 \ 0 \ \dots \ 0]$ , 4.  $[1 \ 0 \ \dots \ 0]$ , 5,6.  $\mathbf{a}^T$ , 7.  $-2e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \mathbf{x}^T$ , 8.  $\mathbf{e}_i^T$ , kde  $i$  je složka s největší hodnotou. Je-li takových složek více, derivace není definovaná, viz též Cvičení 8.4, 9.  $[-\sin t \ \cos t]^T$ , 10.  $[-\sin t \ \cos t \ a]^T$ , 11.  $\mathbf{v}$ , 12.  $\mathbf{l}$ , 13.  $\mathbf{O}$ , 14,15.  $\mathbf{A}$ , 16.

$$\begin{bmatrix} -(R + r \cos v) \sin u & -r \sin v \cos u \\ (R + r \cos v) \cos u & -r \sin v \sin u \\ 0 & r \cos v \end{bmatrix}$$

17,18,19. Jde o matici parciálních derivací funkce  $f$  nebo zobrazení  $\mathbf{f}$  daných rozměrů.

- 8.6 a)** Hledaná derivace je

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right] = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \varphi, \quad -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r \cos \varphi \right]$$

Ve vzorci není uvedeno, ve kterém bodě se parciální derivace funkce  $f$  vyhodnocuje. Měli bychom to uvést za každým výrazem typu  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ještě před tím, než následuje násobení. Vyhodnocovaným bodem je bod  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ , takže například první sčítanec výsledku kompletně zapsaný v nových proměnných zní  $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot \cos \varphi$ . Protože se to stává docela nepřehledným, vyhodnocovaný bod se ve výpočtech často vynechává (ale musíme vždy vědět, že tam je).

Když označíme  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  takové zobrazení, že  $\mathbf{g}(r, \varphi) = [r \cos \varphi \ r \sin \varphi]^T$ , pak  $f' \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ,  $\mathbf{g}' \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  a derivace složené funkce v proměnných  $r, \varphi$  je součinem těchto matic  $f' \mathbf{g}'$ .

- 8.8** Nejprve odvodíme třetí vzorec z první tabulky a poslední vzorec druhé tabulky v §8.5.2 ve skriptech. Můžete těm vzorcům věřit a ušetřit si dost značné intelektuální úsilí, tj. přeskočit následující text až po symbol ► při levém okraji. Nebo naopak se můžete ponořit do jednotlivých parciálních derivací při odvozování těch vzorců, ale to bývá dost namáhavé.

Třetí vzorec z první tabulky skript si odvodíme tak, že si jej nejprve zjednodušíme. Necht' má v tom vzorci zobrazení  $\mathbf{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$  jedinou proměnou  $t$ . Chceme dokázat, že  $(\mathbf{A} \mathbf{g}(t))' = \mathbf{A} \mathbf{g}'(t)$ . Matici  $\mathbf{A}$  rozepíšeme do sloupců  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_l]$ . Pak

$$(\mathbf{A} \mathbf{g}(t))' = (\mathbf{a}_1 g_1(t) + \mathbf{a}_2 g_2(t) + \dots + \mathbf{a}_l g_l(t))' = \mathbf{a}_1 g_1'(t) + \mathbf{a}_2 g_2'(t) + \dots + \mathbf{a}_l g_l'(t) = (\mathbf{A} \mathbf{g}'(t))$$

V případě, že má funkce  $\mathbf{g}$  více proměnných, pak místo výrazů  $g'_i(t)$  (což jsou čísla) je třeba psát  $g'_i(\mathbf{x})$  (což jsou jednořádkové matice délky  $n$ ) a součin  $\mathbf{a}_i g'_i(\mathbf{x})$  je nyní součin jednosloupkové matice s jednořádkovou maticí. Tento součin je matice z  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Jinak vše z předchozího výpočtu funguje stejně. Tím je ten vzorec dokázán.

Poslední vzorec druhé tabulky je ve skriptech dokázán. Nechávám zde svůj starší důkaz. Pro  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dokážeme, že platí

$$((\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{h}(\mathbf{x}))' = (\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{h}'(\mathbf{x}) + (\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{g}'(\mathbf{x})$$

Z analýzy jedné proměnné víme, že vzorec pro derivaci součinu se odvodí tak, že nejprve se celý součin derivuje, jakoby byl první činitel konstantní. To se sečte s derivací výrazu, ve kterém je jakoby druhý činitel konstantní. To provedeme i zde, tedy nejprve  $\mathbf{h}$  derivujeme a na  $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T$  se díváme jako na konstantní matici  $\mathbf{A}$  a použijeme třetí vzorec z první tabulky. Dostaneme  $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T (\mathbf{h}(\mathbf{x}))'$ . Nyní si všimneme, že  $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$  a ponechme  $(\mathbf{h}(\mathbf{x}))^T$  konstantní. Po zderivování (znovu s využitím třetího vzorce první tabulky) dostáváme druhý sčítanec výsledku v posledním vzorci tabulky.

► Podúkoly (a) a (d) můžeme počítat takto:

a)  $(\mathbf{x}^T \mathbf{x})' = \mathbf{x}^T \mathbf{1} + \mathbf{x}^T \mathbf{1} = 2 \mathbf{x}^T$

d)  $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|' = \frac{1}{2\sqrt{(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{g}(\mathbf{x})}} ((\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{g}(\mathbf{x}))' = \frac{(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{g}'(\mathbf{x})}{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}$

V obou případech je využito posledního vzorce ze zmíněné druhé tabulky skript a v případě (a) také faktu, že  $\mathbf{x}' = \mathbf{1}$ . V případě (d) je pak použit ještě vzorec na derivaci složené funkce: odmocniny jako funkce jedné proměnné a součinu  $(\mathbf{g}(\mathbf{x}))^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$ .

**8.10** Je  $h'(d, s) = [-2d + 3s, 3d + 4s]$ , takže konkrétně v bodě  $(-1, 1)$  je  $h'(-1, 1) = [5, 1]$ . Gradient v tomto bodě je tedy  $[5, 1]^T$  (derivace a gradient je totéž, jen derivace je zapsaná v řádku, gradient ve sloupci). a) směr největšího růstu je  $[5, 1]^T / \sqrt{26}$ . Normujeme, protože nás zajímá jen směr, ne velikost. Pro doplnění: vrstevnice je kolmá na směr největšího růstu, tedy má tečnu ve směru  $[1, -5] / \sqrt{26}$ .

Strmost terénu (jak moc stoupá) v daném směru je rovna směrové derivaci. Ta se spočítá jako  $h'(d, s) \mathbf{v}$ , kde  $\mathbf{v}$  je normovaný vektor směru. V našem případě  $[5, 1] [1, -1]^T / \sqrt{2} = 4/\sqrt{2}$ .

**8.12** Hessián je matice druhých parciálních derivací. Je symetrická, takže si můžete ušetřit námahu a spočítat jen derivace na diagonále a nad diagonálou.

a) Spočítejte si sami, ve skriptech je řešení.

c)  $(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})' = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ ,  $(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})'' = ((\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x})' = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ .

Použili jsme třetí vzoreček druhé tabulky a pak druhý vzoreček z první tabulky z §8.5.2 ve skriptech. Dále jsme před druhým derivováním řádek převedli do sloupce, protože derivování se aplikuje na sloupcové vektory. Platí  $f'' = ((f')^T)'$ .

Třetí vzoreček ze zmíněné druhé tabulky skript odvodíme pomocí posledního vzorečku téže tabulky, kde volíme  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  a  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x}$ :

$$(\mathbf{x}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}))' = \mathbf{x}^T \mathbf{A} + (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{1} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T).$$

**8.13** Toto byste měli zkusit sami a zkontrolovat si jen výsledek s výsledkem ve skriptech. Kdyby Vám to nevycházelo, tady jsou mezivýpočty:

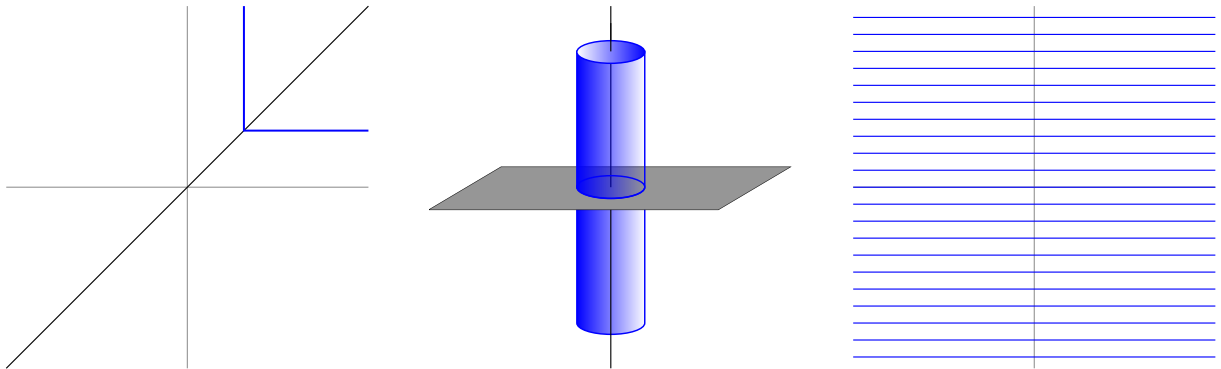
$$\begin{aligned} T_{2,f(1,-2)}(x, y) &= f(1, -2) + \frac{f'(1, -2)}{1!} \begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} + [x-1 \quad y+2] \frac{f''(1, -2)}{2!} \begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} \\ f(1, -2) &= 46 \\ f'(x, y) &= [6y^2 - 6x^2 \quad 12xy - 9y^2], \quad f'(1, -2) = [18 \quad -60] \\ f''(x, y) &= \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 18y \end{bmatrix}, \quad f''(1, -2) = \begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix} \\ T_{2,f(1,-2)}(x, y) &= 46 + [18 \quad -60] \begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} + [x-1 \quad y+2] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -12 & -24 \\ -24 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix} = \\ &= -6x^2 - 24xy + 24y^2 - 18x + 60y + 46 \end{aligned}$$

Všechny členy polynomu ve výsledku se počítají z předposledního řádku výpočtu relativně pohodlně, jen ta závěrečná konstanta 46 dá zabrat. Můžete na ni jít taky tak, že dosadíte do výsledného polynomu bez konstanty hodnoty  $(1, -2)$  a vyjde nula. Víme, že  $f(1, -2) = 46$ , takže ta konstanta musí být rovna 46.



## Kapitola 9

**9.2** Toto je poměrně snadné cvičení, takové množiny byste měli umět si představit bez větší námahy. Některé z nich jsem zde uvedl, ale zahrajeme si takovou hru. Neprozradím, které náčrtky souvisí s kterou podotázkou tohoto cvičení a dále jsem nenakreslil obrázky ke všem podotázkám.

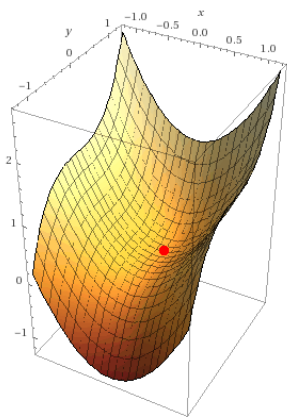


- 9.3 a)** Všechny body jsou uvnitř  $\mathbb{R}$  vnitřní, je to celý prostor.
- b)** Body  $a, b$  jsou hraniční, ostatní prvky množiny jsou vnitřní.
- c)** Všechny prvky množiny jsou hraniční, žádný vnitřní (do množiny se nevejde žádné okolí žádného bodu množiny).
- d)** Všechny prvky množiny jsou vnitřní, hranice je sféra  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \varepsilon$ .
- e)** Je to „půlkružnice“ v  $\mathbb{R}^2$ , všechny její prvky jsou hraniční.
- f)** Je to část paraboly v  $\mathbb{R}^2$ , všechny prvky jsou hraniční (jako v e).
- g)** Množina je v prvním kvadrantu vymezena osami a hyperbolou. Ani osy ani hyperbola v ní neleží (to je její hranice). Všechny její prvky jsou vnitřní.
- h)** Je to množina v  $\mathbb{R}^n$ , pro kterou  $x_i \leq 1$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Body, pro které je aspoň jedna rovnost nabývána, jsou hraniční, ostatní jsou vnitřní. V  $\mathbb{R}^2$  si množinu asi dovedete představit, je to průnik dvou polorovin, jejich hranice se protínají v bodě  $(1, 1)$ . V  $\mathbb{R}^3$  je to průnik tří poloprostorů, jejich hranice se protínají se v bodě  $(1, 1, 1)$ .
- i)** Pro nenulové  $\mathbf{a}$  jsou všechny body hraniční.
- j)** Hranice (dva rovnoběžné afinní prostory) odpovídají místu, kde nastává jedna nebo druhá rovnost. Mezi těmito afinními prostory jsou vnitřní body množiny.
- k)** Pro nenulovou matici  $\mathbf{A}$  jsou všechny body hraniční. Množina ovšem může být i prázdná. Pro nulovou matici je množina buď prázdná (při nenulovém  $\mathbf{b}$ ) nebo je to celý prostor (při nulovém  $\mathbf{b}$ ). Jen poslední případ odpovídá množině rovné celému prostoru, tj. všechny její body jsou vnitřní.

# Kapitola 10

**10.1 c)** Hessián má kladná vlastní čísla, je tedy pozitivně definitní a funkce má v daném bodě minimum.

**a)** Hessián je indefinitní, tj. v daném bodě je sedlo. Ve směrech prvních dvou vlastních vektorů se funkce v daném bodě chová řádově jako  $x^2$  v nule a ve směru posledního vlastního vektoru jako  $-x^2$  v nule.

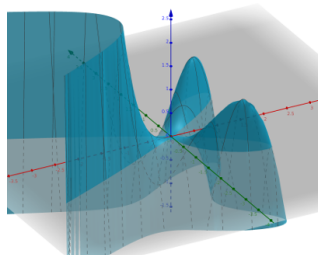


**b)** Nelze o extrému nic říci, protože je jedno vlastní číslo nula. Ve směru vlastního vektoru příslušného tomuto nulovému vlastnímu číslu se funkce může chovat jako  $x^3$  v nule, pak tam je „skluzavka“, ale ne minimum ani maximum. Nebo se tam může chovat řádově jako  $x^4$ , pak v daném bodě je minimum, nebo se tam může chovat jako  $-x^4$  a pak je v daném bodě sedlo. To by se dalo vyšetřit tak, že bychom redukovali vyšetřování funkce jen v daném směru, měli bychom tím pádem funkci jedné proměnné, která má první i druhou derivaci v daném bodě nulovou. Při nenulové třetí derivaci máme „skluzavku“, při nulové třetí derivaci a nenulové čtvrté máme minimum nebo sedlo. Je-li i tato derivace nulová, pak záleží na tom, který řád derivace je poprvé nenulový (lichý nebo sudý). Jak vypadá skluzavka zjistíte prohlídkou dětských hřišť nebo pohledem na obrázek vlevo. Bod, ve kterém jsou první derivace ve všech směrech nulové (tj. tečny tam jsou vodorovné), je vyznačen červeným puntíkem.

**10.2 e)**  $f' = [6y^2 - 6x^2, 12xy - 12y^3]$ . Stacionární body jsou body, kde  $f' = [0 \ 0]$ , takže je třeba řešit soustavu  $6y^2 - 6x^2 = 0$ ,  $12xy - 12y^3 = 0$ . Jedno řešení je  $(0, 0)$ . Dále z první rovnice vidíme, že  $x = \pm y$ . Dosadíme-li  $x = y$  do druhé rovnice, máme řešení  $(1, 1)$ . Dosadíme-li  $x = -y$ , máme řešení  $(1, -1)$ . Jiná řešení soustava nemá. Máme tedy tři stacionární body. Hessián:

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{bmatrix},$$

$$f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(1, 1) = 12 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad f''(1, -1) = 12 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$



Pro oba případy  $f''(1, 1)$  i  $f''(1, -1)$  je příslušný Hessián negativně definitní (má záporná vlastní čísla, spočtěte si je), takže v bodech  $(1, 1)$  a  $(1, -1)$  má funkce lokální maximum. V bodě  $(0, 0)$  a ve směru osy  $x$  se zadaná funkce  $f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$  chová jako  $-2x^3$  (dosadte  $y = 0$ ) a ve směru osy  $y$  se chová jako  $-3y^4$  (dosadte  $x = 0$ ). Takže v tomto bodě to je „skluzavka“ (ve směry osy  $x$ ) navíc orientovaná „vzhůru dnem“, protože ve směru osy  $y$  se chová jako  $-3y^4$  (podstatné je, že ten koeficient u sudé mocniny je záporný).

**Poznámka.** Protože jen v ojedinělých případech se daří najít analyticky řešení příslušné nelineární soustavy rovnic sestavené z požadavku na stacionární body  $f' = \mathbf{0}$ , máme za úkol se v tomto týdnu zabývat numerickými metodami, které umožní najít řešení takové soustavy rovnic aspoň přibližně a za předpokladu, že metodě nabídneme „dostatečně rozumnou“ výchozí aproximaci. Metody pak vezmou tuto hodnotu, udělají jeden *iterační krok* a vytvoří další aproximaci. Tu pak mohou vzít znovu a vytvořit (obvykle stejným) iteračním krokem další aproximaci. Za ideálního stavu věci se tyto jednotlivé aproximace stále zlepšují a výsledek se (rozumnou rychlostí) zpřesňuje.

V tomto textu značím výchozí aproximaci (i postupnou další) jako  $\mathbf{a}$  (ve skriptech značeno obvykle  $\mathbf{x}_k$ ) a nově počítanou aproximaci značím jako  $\mathbf{x}$  (ve skriptech značeno  $\mathbf{x}_{k+1}$ ).

Přehled numerických metod zmíněných v tomto kurzu je v následující tabulce

## Tabulka shrnující numerické metody tohoto týdne

Název metody	co počítá	iterační vzorec	poznámka
Gradientní	$\min f(\mathbf{x})$ pro $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - f'(\mathbf{a})^T$	směr největšího spádu
Newtonova	$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ pro $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - (\mathbf{g}'(\mathbf{a}))^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{a})$	$\mathbf{g}'(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regul.
Newtonova	$\min f(\mathbf{x})$ pro $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - (f''(\mathbf{a}))^{-1} (f'(\mathbf{a}))^T$	$(f')^T = \mathbf{g}$
Gauss-Newtonova	$\min \ \mathbf{g}(\mathbf{x})\ ^2$ pro $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - (\mathbf{g}'(\mathbf{a}))^+ \mathbf{g}(\mathbf{a})$	$(\mathbf{g}')^+ = ((\mathbf{g}')^T \mathbf{g}')^{-1} (\mathbf{g}')^T$
Levenberg-Marq.	$\min \ \mathbf{g}(\mathbf{x})\ ^2$ pro $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	$\mathbf{x} = \mathbf{a} - (\mathbf{g}'(\mathbf{a}))^* \mathbf{g}(\mathbf{a})$	$(\mathbf{g}')^* = ((\mathbf{g}')^T \mathbf{g}' + \mu_k \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{g}')^T$

Newtonova metoda najde obecně stacionární bod, ne nutně minimum.

Všechny metody mají iterační vzorec ve tvaru  $\mathbf{a} -$  „směr“. Je-li ten „směr“ použit bez další multiplikační konstanty, mluví se o *čisté* metodě. Někdy se „směr“ nejprve násobí nějakým koeficientem  $\alpha_k$ , pak mluvíme o zobecněné metodě.

Doporučuji se neučit vzorečky metod nazpaměť, ale spíše je umět odvodit. Např. Newtonovu metodu odvodíme z obrázku v §10.4.1 ve skriptech s nakreslenou tečnou, Gauss-Newtonovu metodu odvodíme z normální rovnice přeúřčené soustavy  $\mathbf{g}^T \mathbf{g} = 0$  (kde  $\mathbf{g}$  lokálně aproximujeme jako  $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ , takže  $\mathbf{A} = \mathbf{g}'$ ) atd. Toto vše bylo jistě podrobně ukázáno na přednášce.

**10.5** V úloze máme  $g(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ , tedy  $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  a hledáme  $x$  tak, že  $g(x) = 0$ . Iterační předpis Newtonovy metody je  $x = a - (g'(a))^{-1}g(a) = a - \frac{1}{\cos a - 1/2}(\sin a - \frac{1}{2}a)$ . V zadání úlohy byl požadavek použít kalkulačku a zkusit na ni najít výsledné  $x$  s největší přesností, jakou dokážeme. Moje oblíbená kalkulačka se jmenuje bc (pradávný unixový program „big calculator“). Ta umožňuje výpočty s libovolnou přesností. Z toho plyne, že nemohu výsledek napsat s největší přesností, jakou dokážu, protože tato přesnost není omezena (až na můj čas a strojovou paměť, což nejsou jednoznačně dané veličiny). Modře jsem podtrhl, kolik cifer už je v dané iteraci vyhodnoceno přesně. Pro Newtonovu metodu jedné proměnné platí, že když se funkce chová „normálně“ a je nalezena dobrá výchozí iterace, pak každou další iterací se zhruba zdvojnásobí počet cifer s přesným výsledkem. To je ve výpočtu (který byl původně počítán na 20 míst) krásně vidět. Při přechodu na vyšší přesnost výpočtu stačila jedna další iterace, a měl jsem přesnost na 39 míst.

```

olsak@fibro:~$ bc -l
bc 1.07.1
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000, 2004, 2006, 2008, 2012-2017 Free Software
Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type `warranty'.
a=2
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.90899559420390903615
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89551164537959469688
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89549426720871319796
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89549426703398094716
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89549426703398094714
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.89549426703398094714
scale=40
a
1.89549426703398094714
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.8954942670339809471440357380936016917512
a=a - (s(a)-a/2) / (c(a)-0.5)
a
1.8954942670339809471440357380936016917513
olsak@fibro:~$

```

**10.6**  $f'(x, y) = [2x - 2 \cos(y^2 - 2x), 2y \cos(y^2 - 2x) - 1]$ , Hessián:

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - 4 \sin(y^2 - 2x) & 4y \sin(y^2 - 2x) \\ 4y \sin(y^2 - 2x) & -4y^2 \sin(y^2 - 2x) + 2 \cos(y^2 - 2x) \end{bmatrix}$$

Iterační krok:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 - 4 \sin(b^2 - 2a) & 4b \sin(b^2 - 2a) \\ 4b \sin(b^2 - 2a) & -4b^2 \sin(b^2 - 2a) + 2 \cos(b^2 - 2a) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2a - 2 \cos(b^2 - 2a) \\ 2b \cos(b^2 - 2a) - 1 \end{bmatrix}$$

Výchozí iterační krok pro  $(a, b) = (1, 1)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 - 4 \sin(-1) & 4 \sin(-1) \\ 4 \sin(-1) & -4 \sin(-1) + 2 \cos(-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 - 2 \cos(-1) \\ 2 \cos(-1) - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6521 \\ 0.7185 \end{bmatrix}$$

Nyní bychom dosadili  $(a, b) = (0.6521, 0.7185)$  a iterační krok opakovali. Stroj typicky necháme opakovaně počítat inverzní matici (pokaždé s jinými konstantami). Druhá možnost je nechat stroj vypočítat inverzní matici symbolicky a pak jen v iteračních krocích dosazovat konkrétní  $(a, b)$ . V tomto příkladě jednotlivé iterace vypadají takto:  $(1, 1) \rightarrow (0.6521, 0.7185) \rightarrow (0.6778, 0.7272) \rightarrow (0.6794, 0.7313) \rightarrow (0.6802, 0.7331) \rightarrow 15 \times \rightarrow (0.68074537, 0.73448902)$ . Po 20 iteracích máme výsledek s přesností na 8 desetinných míst.

**10.9** Soustava není pochopitelně lineární (jsou tam monomy druhého stupně). Proč soustava nemá řešení je vysvětleno ve skriptech. Dále počítáme iterační vzorce, což bude *dřina*. Hledáme minimum funkce  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x, y) = (x + y - 2xy - 1)^2 + (-x + y + xy + 3)^2 + (x - y + xy - 1)^2.$$

$$(f'(x, y))^T = \begin{bmatrix} 2(x + y - 2xy - 1)(1 - 2y) + 2(-x + y + xy + 3)(-1 + y) + 2(x - y + xy - 1)(1 + y) \\ 2(x + y - 2xy - 1)(1 - 2x) + 2(-x + y + xy + 3)(1 + x) + 2(x - y + xy - 1)(-1 + x) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12xy^2 - 8xy + 6x - 4y^2 + 6y - 10 \\ 12x^2y - 4x^2 + 6x - 8xy + 6y + 6 \end{bmatrix}.$$

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} 12y^2 - 8y + 6 & 24xy - 8x - 8y + 6 \\ 24xy - 8x - 8y + 6 & 12x^2 - 8x + 6 \end{bmatrix}.$$

Gradientní metoda:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12ab^2 - 8ab + 6a - 4b^2 + 6b - 10 \\ 12a^2b - 4a^2 + 6a - 8ab + 6b + 6 \end{bmatrix}.$$

Newtonova metoda:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12b^2 - 8b + 6 & 24ab - 8a - 8b + 6 \\ 24ab - 8a - 8b + 6 & 12a^2 - 8a + 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 12ab^2 - 8ab + 6a - 4b^2 + 6b - 10 \\ 12a^2b - 4a^2 + 6a - 8ab + 6b + 6 \end{bmatrix}.$$

Gauss-Newtonova metoda:

$$\mathbf{g}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y - 2xy - 1 \\ -x + y + xy + 3 \\ x - y + xy - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2y & 1 - 2x \\ -1 + y & 1 + x \\ 1 + y & -1 + x \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 1 - 2b & -1 + b & 1 + b \\ 1 - 2a & 1 + a & -1 + a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 2b & 1 - 2a \\ -1 + b & 1 + a \\ 1 + b & -1 + a \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 2b & -1 + b & 1 + b \\ 1 - 2a & 1 + a & -1 + a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + b - 2ab - 1 \\ -a + b + ab + 3 \\ a - b + ab - 1 \end{bmatrix}.$$

Levenberg-Marquardtova metoda:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} 1 - 2b & -1 + b & 1 + b \\ 1 - 2a & 1 + a & -1 + a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 2b & 1 - 2a \\ -1 + b & 1 + a \\ 1 + b & -1 + a \end{bmatrix} + \mu_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 2b & -1 + b & 1 + b \\ 1 - 2a & 1 + a & -1 + a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + b - 2ab - 1 \\ -a + b + ab + 3 \\ a - b + ab - 1 \end{bmatrix}.$$

**10.10** Obecně minimální vzdálenost dvou křivek řeší optimalizační úloha

$$\min\{\|(x, y) - (u, v)\|^2; (x, y) \text{ leží na první křivce a } (u, v) \text{ leží na druhé křivce}\} =$$

$$= \min\{(x - u)^2 - (y - v)^2; x^2 = y, (u - 2)^2 + v^2 = 1\},$$

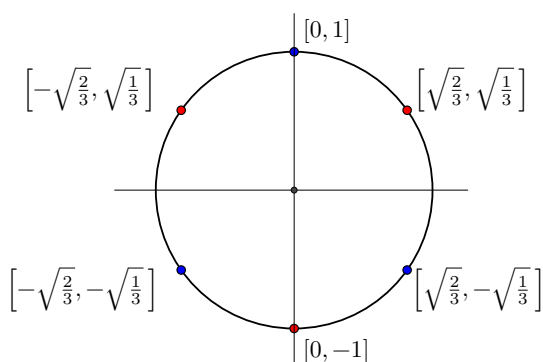
což s metodou nejmenších čtverců  $\min\{(x^2 - y)^2 + ((x - 2)^2 + y - 1)^2\}$  (viz úlohu zmíněnou v zadání) nemá nic společného. Protože poloha bodu na parabole minimalizující vzdálenost od kružnice je stejná, jako poloha bodu na parabole minimalizující vzdálenost od středu této kružnice, stačí řešit úlohu  $\min\{(x - 2)^2 + (y - 0)^2, y = x^2\}$ , což po převedení na jednu proměnou vyřešíme jako  $\min\{(x - 2)^2 + (x^2)^2\}$ . To se dá zderivovat a najít minimum. Řešení kubické rovnice  $4x^3 + 2x - 4 = 0$  je třeba spočítat strojem (třeba Newtonovou metodou), výsledek je přibližně 0.83512. Přímý vzorec pro kořeny této kubické rovnice dává *obludný* výsledek se čtyřmi do sebe vzájemně vnořenými druhými a třetími odmocninami a konstantami 330, 18 atd.

**10.11** Máme odvodit vzorec Newtonovy metody  $\mathbf{x} = \mathbf{a} - (f''(\mathbf{a}))^{-1}(f'(\mathbf{a}))^T$ . Taylorův polynom druhého řádu funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{a}$  je  $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T(f''(\mathbf{a})/2)(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ . Minimum polynomu druhého řádu je v bodě, kde má polynom první derivaci nulovou, tedy v bodě  $\mathbf{x}$ , pro který je  $T'(\mathbf{x}) = 0$ . Funkci  $T$  derivujeme podle  $\mathbf{x}$ , tj. na objekty  $f'(\mathbf{a})$  a  $f''(\mathbf{a})$  se díváme jako na konstantní matice. Při derivování nám pomohou první a třetí vzorec v tabulce v §8.5.2 ve skriptech.  $T'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T(f''(\mathbf{a})/2 + (f''(\mathbf{a}))^T/2) = f'(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T f''(\mathbf{a}) = 0$ . Přejdeme k transponované rovnici:  $f''(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = -(f'(\mathbf{a}))^T$ . Vynásobíme zleva maticí inverzní:  $\mathbf{x} - \mathbf{a} = -(f''(\mathbf{a}))^{-1}(f'(\mathbf{a}))^T$ . a požadovaný vzorec je odvozen.

# Kapitola 11

11.1 d) Úlohu můžeme vyřešit třemi způsoby a porovnat efektivitu práce.

1. Převedením do polárních souřadnic máme  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ , takže hledáme extrémy funkce  $\cos^2 t \sin t$ , derivace rovná nule:  $-2 \cos t \sin^2 t + \cos^2 t \cos t = \cos t (\cos^2 t - 2 \sin^2 t) = 0$ . Takže  $\cos t = 0$ , tj.  $t = \pm \frac{\pi}{2}$  nebo  $\cos^2 t - 2 \sin^2 t = 0$ , tj.  $1 - 3 \sin^2 t = 0$ . Z první části řešení máme



$x = 0, y = \pm 1$ . Z druhé části řešení sice nevyjádříme přesně  $t$ , ale víme, že  $\sin^2 t = \frac{1}{3}$ , takže  $y^2 = \frac{1}{3}$  a tedy  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Na kružnici tedy máme šest bodů  $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $(0, -1)$ ,  $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ . Jak plyne z funkčních hodnot, v těchto bodech je po řadě max (kladná hodnota), min (nula) max (kladná hodnota) min (záporná hodnota) max (nula) min (záporná hodnota). Na obrázku jsou maxima vyznačena červeně a minima modře, přirozeně se na kružnici střídají.

2. Vyjádříme-li z podmínky  $x^2 = 1 - y^2$  funkci  $f$ , máme  $f = (1 - y^2)y$ , na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ , což po zderivování a položení rovno nule dává  $y^2 = \frac{1}{3}$ , a to dává čtyři z šesti bodů. Dále musíme nezapomenout, že lokálními extrémy této funkce jedné proměnné jsou i krajní body intervalu, tedy  $y = \pm 1$ , což dává zbylé dva body.

3. Lagrangeova funkce  $L(x, y, \lambda) = x^2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ . Po jejím zderivování postupně podle všech třech proměnných a položením rovno nule máme  $2xy + 2x\lambda = 0$ ,  $x^2 + 2y\lambda = 0$  a třetí rovnice je okrajová podmínka  $x^2 + y^2 = 1$ . Z první rovnice po vytknutí  $x$  máme  $x = 0$  nebo  $y = -\lambda$ . První možnost dává dva body  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$  a druhou možnost dosadíme do druhé rovnice a s využitím třetí opět máme  $y^2 = \frac{1}{3}$  což dává zbylé čtyři body s extrémy.

11.4 c) 1. Z okrajové podmínky plyne  $x^2 = \frac{1}{y}$ , takže funkci  $x^2 + y^2$ , kterou minimalizujeme, máme převedenu do jedné proměnné  $f(y) = \frac{1}{y} + y^2$ . Zderivování a položení rovno nule dává  $-\frac{1}{y^2} + 2y = 0$ , tedy  $y^3 = \frac{1}{2}$ ,  $y = 1/\sqrt[3]{2}$  a zpětné dosazení pro  $x$  dává  $x^2 = \sqrt[3]{2}$ , tedy  $x = \pm \sqrt[6]{2}$ .

2. Ještě jednou jinak.  $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 y - 1)$ . Zderivování této funkce postupně podle všech tří proměnných a položení rovno nule dává  $2x + 2\lambda xy = 0$ ,  $x(1 + \lambda y) = 0$  a třetí rovnice je okrajová podmínka. Z první rovnice je  $x = 0$  nebo  $\lambda y = -1$ . První možnost nepřipadá v úvahu, protože z ní a z druhé rovnice plyne, že také  $y = 0$ , ale dvojice  $(0, 0)$  nevyhovuje okrajové podmínce. Druhá možnost dává  $\lambda = -\frac{1}{y}$  a když k tomu přidáme fakt z okrajové podmínky  $x^2 = \frac{1}{y}$  a oba mezivýsledky dosadíme do druhé rovnice, máme  $2y + \frac{-1}{y} \frac{1}{y} = 0$ , což vede na  $y = \frac{1}{2y^2}$  a to vede na stejný výsledek, jako v případě 1.

11.5 d) Pokud mě paměť neklame, tak půllitr jsem na cvičení dělal v době, kdy jsme se mohli fyzicky vídat. Budu komentovat tedy něco jiného, třeba podúkol (b).

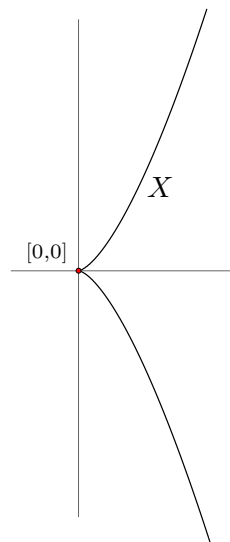
b) Hledá se minimum  $ab + 2ac + 2bc$  za podmínky  $abc = 1$ . Strany  $a, b$  značí základnu a  $c$  výšku krabice bez víka. Okrajovou podmínku  $c = 1/(ab)$  zaneseme do účelové funkce a máme z ní funkci bez podmínky se dvěma proměnnými  $f(a, b) = ab + 2/b + 2/a$ . Hledáme stacionární body zderivováním v obou proměnných a položením nule:  $b = 2/a^2 = 0$ ,  $a - 2/b^2 = 0$ , tedy  $a^2 b = 2$  a taky  $ab^2 = 2$ , tj.  $a^2 b - ab^2 = 0$ . Po vytknutí  $a$  máme  $a = 0$  což zamítneme, neboť se to neslučuje s okrajovou podmínkou. Druhá možnost vede na nepřekvapivý výsledek  $ab = b^2$  a tedy  $a = b$ . Takže z  $a^2 b = 2$  plyne  $a^3 = 2$ , což vede na výsledek  $a = b = \sqrt[3]{2}$  a z okrajové podmínky pak  $c = 1/\sqrt[3]{4}$ . Protože ale nás nezajímá konkrétně objem=1, výsledek určuje pouze poměry stran, tedy  $a = b$ ,  $c = 1/(ab)$  a  $a/c = \sqrt[3]{8} = 2$ . Všechny strany je třeba pronásobit takovým koeficientem, aby  $abc$  bylo rovno požadovanému objemu.

2. Metoda Lagrangeových multiplikátorů dá po menší námaze stejný objevný výsledek, že totiž  $a = b$ . Zkuste si to spočítat sami.

3. Asi nejrychleji jsme hotovi při použití „selského rozumu“. Ta krabice nemůže být „asymetrická“ ve směru stran  $a$  a  $b$ , protože žádná z těch stran není v účelové funkci nijak preferovaná.

Takže  $a = b$  a z okrajové podmínky  $c = 1/(ab)$ . Nyní po využití okrajové podmínky je účelová funkce jen v jedné proměnné a její minimum najedeme v bodě  $a = \sqrt[3]{2}$ .

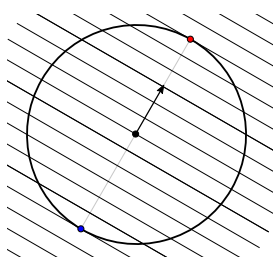
**11.8** Metoda Lagrangeových multiplikátorů kolabuje obdobně jako státní rozpočet po koronavirové pandemii kvůli tomu, že množina  $X$  z okrajové podmínky nemá v bodě minima  $(0,0)$  tečný prostor. Je tam hrot. Množina  $X = \{(x,y); x^3 = y^2\}$  se skládá z grafů funkcí  $y = \pm\sqrt{x^3}$ . Zkusíme si v tomto příkladě zahájit metodu Lagrangeových multiplikátorů a uvidíme, co to udělá...



$L = x + \lambda(x^3 - y^2)$ . Zderivováním a položením rovno nule dostáváme  $1 + 3\lambda x^2 = 0$  a  $-2\lambda y = 0$  a okrajová podmínka. Z druhé rovnice plyne, že musí být  $y = 0$  nebo  $\lambda = 0$ . První případ společně s okrajovou podmínkou  $x^3 = y^2$  vede na  $x = 0$ , ale to nevyhovuje první rovnici. Druhý případ přímo nevyhovuje první rovnici. Takže soustava sestavená metodou Lagrangeových multiplikátorů nemá řešení.

**11.12 a)** Bez té pohádky o entropii hledáme maximum funkce  $f(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$  za podmínky  $\sum p_i = 1$ . Lagrangeova funkce je  $L(\mathbf{p}, \lambda) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i + \lambda(\sum_{i=1}^n p_i - 1)$  a její derivace podle každé proměnné  $p_i$  položíme rovno nule:  $\frac{\partial L}{\partial p_i} = L'_i = -(\log p_i + p_i \frac{1}{p_i}) + \lambda = 0$ , tedy  $\lambda = \log p_i + 1$ . Protože pravá strana naposledy zapsané rovnosti je prostá v  $p_i$  a máme zde  $n$  takových rovností rovných stále stejnému  $\lambda$ , musí se všechny  $p_i$  vzájemně rovnat. Nebo jinak: aplikujeme prostou exp na obě strany rovnosti (po přesunutí jedničky nalevo) a máme  $e^{\lambda-1} = p_i$ . Podstatné tedy je, že  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ . Ta poslední rovnost plyne z okrajové podmínky. (Pozn: metoda „selského rozumu“ nám taky říká, že se proměnné musejí rovnat, když žádná není ve vzorcích preferovaná.) To je stacionární bod. Hodnota je v tomto bodě kladná, protože logaritmy jsou záporné a před vzorečkem pro  $f$  je jedno mínus. Jdeme-li limitně ke kraji definičního oboru (který už není součástí definičního oboru), tj. jedno z  $p_i = 1$  a ostatní jsou nulové, pak  $\lim f(\mathbf{p}) = 0$ , protože  $1 \log 1 = 0$  a  $\lim_{t \rightarrow 0} t \log t = 0$  z L'Hospitalova pravidla. Takže v bodě  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  jsme našli maximum funkce  $f$ .

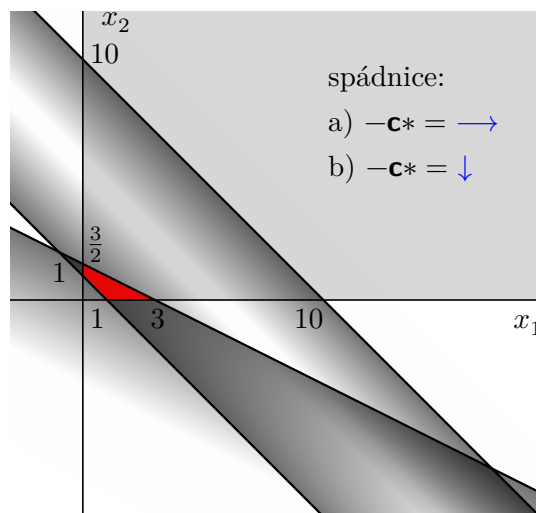
**11.7** Toto cvičení bylo v aktuální verzi skript změněno na řešený příklad 11.16, ve kterém maximalizujeme  $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$  za podmínky  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ . Dáváme sem přesto řešení.  $L = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{x} - 1)$ . Nyní naráz zderivujeme dle všech  $n$  proměnných a příslušných  $n$  rovnic položíme rovno nule:  $L' = \mathbf{a}^T + \lambda(2\mathbf{x}^T) = \mathbf{0}^T$ . K tomu ještě přidáme okrajovou podmínku  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$ . Systém rovnic transponuji a spočítám z něj  $\mathbf{a} = -2\lambda \mathbf{x}$ , takže  $\mathbf{x} = \mathbf{a}/(-2\lambda)$ . Tento výsledek dosadím do okrajové podmínky  $(\mathbf{a}/(-2\lambda))^T (\mathbf{a}/(-2\lambda)) = \|\mathbf{a}\|^2 / (4\lambda^2) = 1$ , takže  $\|\mathbf{a}\|^2 = 4\lambda^2$  a máme spočítáno  $\lambda = \pm \|\mathbf{a}\|/2$ . Když tento poznatek uplatníme v systému rovnic  $(L')^T = \mathbf{0}$ , dostáváme  $\mathbf{a} \pm (\|\mathbf{a}\|/2)(2\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  a z toho plyne  $\mathbf{x} = \mp \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ , což je normalizovaný gradient funkce  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ . Protože funkce roste ve směru gradientu, je maximum v bodě  $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$  a minimum v bodě  $-\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ . Geometricky: hledáme na sféře místo, které maximalizuje lineární funkci plynule rostoucí ve směru gradientu. Na obrázku pro případ 2D jsou nakresleny její vrstevnice a její gradient. Maximum je přirozeně v místě normovaného gradientu.



**11.18**  $L = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})$ . Tentokrát (poprvé v tomto cvičení) máme více než jednu proměnnou  $\lambda$ . Je jich obecně  $m$  a jsou sdruženy do vektoru  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ , kde  $m$  je počet řádků matice  $\mathbf{A}$ . Okrajová podmínka má totiž  $m$  lineárních rovnic, každá je reprezentovaná jedním řádkem matice  $\mathbf{A}$  a jedním prvkem z vektoru  $\mathbf{b}$ . Maticovým derivováním podle  $\mathbf{x}$  a položením nulovému vektoru dostáváme  $L' = 2\mathbf{x}^T \mathbf{C} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ . Tento systém rovnic zapíšeme transponovaně  $-2\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$  a přihodíme okrajovou podmínku  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Máme systém  $m + n$  rovnic s  $n$  neznámými  $x_i$  a  $m$  neznámými  $\lambda_j$ . První podsystém násobíme zleva maticí  $\mathbf{C}^{-1}$  ( $\mathbf{C}$  je regulární, protože je pozitivně definitní) a máme  $-\mathbf{2} \mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$ . Dále zleva přihodíme  $\mathbf{A}$  a vzpomeneme si na systém okrajových podmínek  $-\mathbf{2} \mathbf{b} = -\mathbf{2} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$ . Z tohoto zápisu lze vyjádřit  $\boldsymbol{\lambda}$  jako  $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{2} (\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}$  což zpětně uplatníme v prvním podsystému rovnic  $-\mathbf{2} \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T (-\mathbf{2} (\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b})$ . Po vykrácení konstantou  $-\mathbf{2}$  a vynásobením maticí  $\mathbf{C}^{-1}$  zleva máme konečný výsledek  $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}$ .

## Kapitola 12

**12.1** Máme tři proměnné, první dvě jsou použity v nerovnostech, jejich vymezení lze nakreslit do 2D obrázku. Průnik všech pěti polorovin vymezených nerovnostmi (tři zapsané zvlášť a dále první kvadrant  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ) je na obrázku vyznačen červeně. Pokud by někoho zajímalo, jak pohodlně přijít na polohu těch přímek: v každé nerovnosti nejprve položíme  $x_1 = 0$  a spočítáme  $x_2$  jakoby to byla rovnost. Dostaneme průsečík s osou  $x_2$ . Pak položíme  $x_2 = 0$  a spočítáme  $x_1$  a dostaneme průsečík s osou  $x_1$ . Mám dva body, proložím je přímkou. Příslušná polorovina (nahoru nebo dolů od přímky) vyplyne z orientace menšíčka v nerovnosti.



Nyní si do obrázku nakreslíme  $-\mathbf{c}^*$ , kde  $\mathbf{c}^*$  přebírá jen první dvě souřadnice vektoru  $\mathbf{c}$ . Vektor  $-\mathbf{c}^*$  je směr největšího klesání účelové funkce v prvních dvou souřadnicích, neboť to je mínus gradient. Vydáme-li se v červené oblasti tímto směrem největšího klesání, narazíme v případě a) na bod  $[3, 0]$ . Dobrá je představa sánkaře na oplocené sjezdovce, který má dány mantinely sjezdovky a její spádnicí. Kam dosáhne? Protože třetí souřadnice vektoru  $-\mathbf{c}$  je v případě a) záporná, v rámci 3D obrázku je minimum pro případ  $x_3 = 0$ . V případě b) sánkař dosáhne do nějakého bodu k mantineli  $x_1 \in \langle 1, 3 \rangle$  a  $x_2 = 0$ . Protože třetí souřadnice vektoru  $-\mathbf{c}$  je v případě b) nulová, minimum je stejné pro všechny body  $x_1 \in \langle 1, 3 \rangle, x_2 = 0, x_3 \in \langle 0, \infty \rangle$ . V případě c) na poloze bodu (sáněk) v červené oblasti nezáleží a ve směru  $x_3$  se celkové minimum vylepšuje, kdykoli zvětšíme  $x_3$ , takže úloha je neomezená.

**12.2 a)** Pro odstranění nerovností přidáme slackové proměnné  $u \geq 0, v \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_3 + x_4 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - u = 0 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + v = 5 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, u, v \geq 0 \end{aligned}$$

a tuto soustavu podmínek zapíšeme maticově:

$$\min [2 \ 0 \ -3 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ v \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**b)** Lineární program (12.11) je dopravní úloha. Proměnné jsou soustředěny do matice s  $m$  řádky a  $n$  sloupci, jejich součet se má minimalizovat, ale ne přímo: každá proměnná je v tomto součtu pronásobena vahou  $c_{ij}$ . Ve formulaci úlohy indexy  $i$  značí řádky uvedené matice a indexy  $j$  sloupce. Podmínka (12.11b) říká, že přímý součet (bez váhy) proměnných  $x_{ij}$  v každém řádku matice proměnných se má rovnat číslu  $a_i$ . Podmínka (12.11c) říká, že přímý součet proměnných v každém sloupci se má rovnat  $b_j$ . Pro přepsání úlohy do maticového vyjádření zahrneme všechny proměnné do jednoho vektoru  $\mathbf{u}$  tak, že je postupně všechny přečteme po řádcích a výsledný vektor napíšeme do sloupce:  $\mathbf{u} = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}]^T$ . Nyní se zamysleme nad tím, co přesně dělá první podmínka: součet proměnných v prvním řádku se má rovnat  $a_1$ . Tj. je třeba nashromáždit jedničky k proměnným prvního řádku a k

ostatním nuly. To zařídí první řádek matice uvedené v rovnici (A). Druhý řádek zařídí splnění druhé z podmínek z (12.11b), atd., až (vizuálně) předposlední řádek zařídí splnění poslední podmínky z (12.11b). Ovšem (vizuálně) poslední řádek matice v rovnici (A) se fakticky skládá z dalších  $n$  řádků a když si pořádně rozmyslíte, co dělají jednotlivé řádky (rozepište si aspoň myšlenkově ty jednotkové matice do sady jedniček na diagonálách), tak zjistíte, že tyto řádky přesně korespondují s  $n$  podmínkami z (12.11c).

$$m \left\{ \begin{array}{cccc} \overbrace{\mathbf{1}^T}^n & \overbrace{\mathbf{0}^T}^n & \dots & \overbrace{\mathbf{0}^T}^n \\ \overbrace{\mathbf{0}^T}^n & \overbrace{\mathbf{1}^T}^n & \dots & \overbrace{\mathbf{0}^T}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overbrace{\mathbf{0}^T}^n & \overbrace{\mathbf{0}^T}^n & \dots & \overbrace{\mathbf{1}^T}^n \end{array} \right\} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

Řešení úlohy tedy zní:  $\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{u}; \text{za podmínky (A)}\}$ .

**12.3 c)** Představme si, že máme hmotu o celkové hmotnosti 1 rozdělit do  $n$  proměnných  $x_i$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , tak, abychom navázili co nejvíce. Přitom každá proměnná má svůj koeficient váhy  $c_i$ , který tu hmotu násobí. Z představy vyplývá, že stačí nashromáždit veškerou hmotu do takové proměnné, která má největší koeficient váhy, a ostatní proměnné utrou nos, tj. zůstanou nulové. Nebo nabídnou představu ještě více ze života: máte  $n$  obchodníků, kteří vám nabízejí za jednotku Vaši hmoty  $c_i$  peněz. Co říká zákon trhu, ke kterému obchodníkovi půjdte svou hmotu prodat? Kdyby existovalo více indexů s největším  $c_i$ , pak odpovídajícím proměnným s těmito indexy můžeme rozdělit celkovou hmotu libovolně, celkový výsledek účelové funkce se v takovém případě nemění. Podmínka na sumu  $x_i$  v této úloze obsahuje nerovnost, tedy hmotu nemusíme spotřebovat celou. To uděláme právě tehdy, když všechna  $c_i$  jsou záporná, pak volíme všechna  $x_i$  nulová a hmotu nespotřebujeme vůbec. Pokud ale aspoň jedno  $c_i$  je kladné, veškerou hmotu soustředíme k největšímu  $c_i$ .

e) Jsou-li si vzájemně všechna  $c_i$  rovna, pak účelová funkce je rovna  $c_1 \sum_{i=1}^n x_i$  a tu sumu máme v podmínce omezenou rozsahem  $\langle -1, 1 \rangle$ . Tj. při  $c_1 > 0$  je maximum v libovolném bodě  $\mathbf{x}$ , pro který je ta suma rovna jedné a hodnota maxima je  $c_1$ . Při  $c_1 < 0$  je maximum v libovolném bodě, pro který je ta suma rovna  $-1$  a hodnota maxima je rovna  $|c_1|$ . Zamysleme se nad posledním případem. Nechť se  $c_i$  vzájemně nerovnajší, tj. aspoň ve dvou indexech se liší. BÚNO (bez újmy na obecnosti) předpokládejme  $c_1 > c_2$ . Volme  $x_1 = t, x_2 = -t$  pro  $t \in \mathbb{R}, x_j = 0$  pro  $j > 2$ . To vyhovuje podmínkám úlohy. V těchto bodech má účelová funkce hodnotu  $c_1 t + c_2(-t) = (c_1 - c_2)t$ . Vidíme, že pro  $t \rightarrow \infty$  je hodnota účelové funkce neomezená. Úloha je tedy neomezená.

f) Jako (c) jen s tím rozdílem, že vždy spotřebujeme hmotu o celkové hmotnosti  $k$ .

**12.4 a)** V souladu s §12.1.1 skript zavedeme proměnou  $z$  (kterou tam nazývají  $y$ ) s vlastností, že  $z \geq f$ , kde  $f$  je konvexní po částech lineární účelová funkce původní úlohy, která se má minimalizovat. Místo účelové funkce pak minimalizujeme  $z$ . Požadavek minima zajistí, že nebude v bodě minima  $z > f$ , protože by se očividně dalo zmenšit. Nastane tedy rovnost  $z = f$ . Pointa tohoto triku je v tom, že nová účelová funkce je lineární (v proměnné  $z$ ), zatímco původní účelová funkce lineární nebyla a nedala se přímo použít v algoritmech na řešení úloh lineárního programování. Jednotlivé „body zlomu“ původní účelové funkce jsme přestěhovali do okrajových podmínek úlohy. V naší konkrétní úloze máme součet dvou konvexních funkcí  $|x_1|$  a  $|x_2|$ , použijeme tedy součet dvou proměnných  $z_1 \geq |x_1|$  a  $z_2 \geq |x_2|$ . Dostáváme

$$\min\{z_1 + z_2; x_1, x_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}; z_1 \geq x_1; z_1 \geq -x_1; z_2 \geq x_2; z_2 \geq -x_2; 2x_1 - x_2 \geq 1; -x_1 + 2x_2 \geq 1\}$$

Je třeba si uvědomit, že když  $z_1 \geq |x_1|$ , pak je to to ekvivalentní s  $z_1 \geq \max\{x_1, -x_1\}$  a to je ekvivalentní s  $z_1 \geq x_1, z_1 \geq -x_1$ . Analogicky to platí i pro  $z_2$ .

c) Tady jde jen o to rozepsat absolutní hodnotu do dvou sad nerovností:

$$\max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; -1 \leq \mathbf{d}^T \mathbf{x} \leq 1; \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

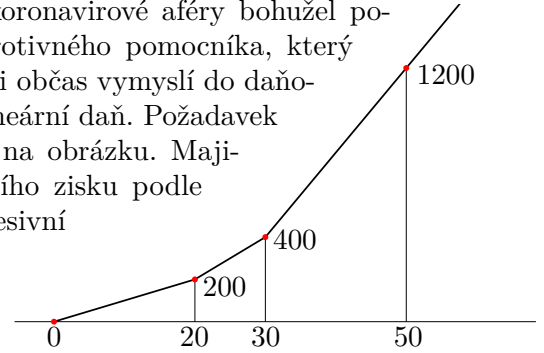
f) Protože je  $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_i |u_i|$ , je  $\|\mathbf{u}\|_\infty \leq 1$  ekvivalentní s  $|u_i| \leq 1$  pro všechna  $i$ , tj.  $-1 \leq u_i \leq 1$  pro všechna  $i$ , neboli  $-\mathbf{1} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{1}$ . Zadanou úlohu tedy přepíšeme snadno:

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; -\mathbf{1} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{1} \}.$$



**12.8** Podíváme se na kioskáře, který má nyní v období koronavirové aféry bohužel poněkud omezený svůj byznys. Přesto má v kiosku protivného pomocníka, který žádá progresivní mzdu, podobně jako naši zákonodárci občas vymyslí do daňového zákona č. 586/1992 Sb. progresivní po částech lineární daň. Požadavek pomocníka je vyjádřen po částech lineární funkcí  $f$  na obrázku. Majitel kiosku chce maximalizovat zisk ve tvaru původního zisku podle řešeného příkladu 1.10 minus ztráty způsobené progresivní mzdou pomocníkovi. Takže jeho úloha zní:

$$\max \{ 120l + 76h - f \}$$



kde  $f$  je na obrázku vyjádřena v proměnné  $x = l + h$ , tedy

$$f(l + h) = \max\{10(l + h), 20(l + h) - 200, 40(l + h) - 800\}$$

Je třeba zavést pomocnou proměnou  $z$  jako v Cvičení 12.4(a), abychom měli účelovou funkci lineární a po částech lineární požadavky pomocníka převedli do okrajových podmínek. Je

$$z \geq f, \quad \text{tj.} \quad z \geq 10(l + h); \quad z \geq 20(l + h) - 200; \quad z \geq 40(l + h) - 800.$$

Úloha lineárního programování i s přidáním podmínek  $z$  řešené části tedy zní:

$$\begin{aligned} \max \{ & 120l + 76h - z; \quad z \geq 10(l + h); \quad z \geq 20(l + h) - 200; \quad z \geq 40(l + h) - 800; \\ & 2l + 1,5h \leq 100; \quad 0,4l + 0,2h \leq 16; \quad l, h \geq 0 \} \end{aligned}$$

Je třeba si uvědomit, že **maximalizujeme** účelovou funkci, ve které se vyskytuje  $-z$ , takže v rámci toho se  $z$  **minimalizuje**. To znamená, že při  $z > f$  ještě není dosaženo minima  $z$  a tedy v optimálním řešení bude  $z = f$ .

**12.10** Armáda má svá množství střeliva a požadavky střelnic zanesené do tabulky, ve které  $x_i$  značí jednotlivý převoz od příslušného skladu k příslušné střelnici.

střelnice:	1	2	3
(6) sklad A	$x_1$	$x_2$	$x_3$
(5) sklad B	$x_4$	$x_5$	$x_6$
požadavek:	(3)	(2)	(2)

Mentálně trošičku náročnější může být reformulace úlohy ze slovního vyjádření „je nutné minimalizovat maximální množství převáženého střeliva“ do optimalizační úlohy, která tedy zní:

$$\min \{ \max x_i; \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 6; \quad x_4 + x_5 + x_6 \leq 5; \quad x_1 + x_4 = 3; \quad x_2 + x_5 = 2; \quad x_3 + x_6 = 2 \}$$

Toto převedeme trikem popsaným v řešení Cvičení 12.4(a) na úlohu LP:

$$\min \{ z; \quad z \geq x_i \quad \forall i; \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 6; \quad x_4 + x_5 + x_6 \leq 5; \quad x_1 + x_4 = 3; \quad x_2 + x_5 = 2; \quad x_3 + x_6 = 2 \}$$

$$= \min \left\{ z; \quad z \mathbf{1} \geq \mathbf{x}; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6; \quad z \in \mathbb{R}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

## Kapitola 13

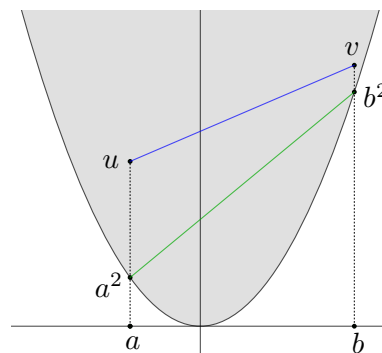
- 13.1 a)** Množina  $M$  je konvexní, když  $\forall u, v \in M, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle$  leží  $tu + (1-t)v$  také v množině  $M$ . V případě  $M = \langle a, b \rangle$  máme v předpokladech definice  $a \leq u \leq b, a \leq v \leq b$ . Platí:

$$a = ta + (1-t)a \leq tu + (1-t)v \leq tb + (1-t)b = b$$

takže prvek  $tu + (1-t)v$  je vždy mezi  $a$  a  $b$ , tedy leží v  $M$ . Množina je konvexní.

- b)** Množina není konvexní, Načrtněte si parabolu a na ní nějaké dva body, které spojíte úsečkou. V případě konvexní množiny musí celá úsečka v množině ležet, v tomto případě v té parabole úsečka neleží. Nyní to formalizujeme podle definice. Stačí najít dva prvky v  $M$  a jeden prvek na spojnici těch dvou, který v  $M$  neleží. Takže třeba  $[1, 1], [-1, 1] \in M, t = \frac{1}{2} \in \langle 0, 1 \rangle$ . Bod  $\frac{1}{2}[1, 1] + \frac{1}{2}[-1, 1] = [0, 1] \notin M$ .

- c)** Množina je konvexní, jak plyne z náčrtku. Vezměte si libovolné dva body nad parabolou a shledáte, že jejich spojnice (modrá úsečka mezi nimi) leží také celá nad parabolou. Dokázat to exaktně z definice bez využití derivací dá bohužel hodně zabrat, takže je otázka, zda má smysl se tím vůbec zabývat, protože při použití derivací máme výsledek rovnou. Ale v zadání je požadavek na přímé odvození z definice, tak tedy do toho. Začneme se dvěma body ležícími přímo na parabole  $[a, a^2]$  a  $[b, b^2]$ . Jakýkoli bod na zelené spojnici  $t[a, a^2] + (1-t)[b, b^2]$  má mít svou  $y$  souřadnici větší než kvadrát jeho  $x$ -ové souřadnice. Má-li se dokázat, že je první číslo větší než druhé, stačí ověřit, že rozdíl „první číslo mínus druhé“ je větší než nula:



$$\begin{aligned} t a^2 + (1-t) b^2 - (t a + (1-t) b)^2 &= t a^2 + b^2 - t b^2 - t^2 a^2 - 2t(1-t) ab - (1-2t+t^2) b^2 = \\ &= \text{uff, je to dřina} = \dots = (t-t^2)(a^2 - 2ab + b^2) = (t-t^2)(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dále je třeba dokázat, že obecná úsečka (modrá) s koncovými body v  $M$  vždy leží „nad“ případně jinou úsečkou s koncovými body přímo na parabole (zelenou) a tudíž i modrá úsečka leží celá v  $M$ . Z obrázku to je zase vidět rovnou, matematická argumentace vypadá následovně: Je-li  $u \geq a^2$  a  $v \geq b^2$  pak pro každé  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  je  $tu + (1-t)v \geq t a^2 + (1-t) b^2$ .

- e)** Vezmeme  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$ , tedy  $\mathbf{A}\mathbf{u} \leq \mathbf{b}, \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{d}, \mathbf{A}\mathbf{v} \leq \mathbf{b}, \mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{d}$ . O vektoru  $\mathbf{w} = t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}$  pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  máme dokázat, že leží v  $M$ , tedy splňuje sledované dvě podmínky:

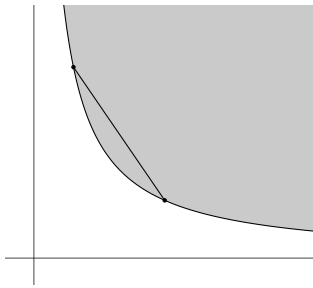
$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{w} &= \mathbf{A}(t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}) = t\mathbf{A}\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{A}\mathbf{v} \leq t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{b} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{C}\mathbf{w} &= \mathbf{C}(t\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{v}) = t\mathbf{C}\mathbf{u} + (1-t)\mathbf{C}\mathbf{v} = t\mathbf{d} + (1-t)\mathbf{d} = \mathbf{d}. \end{aligned}$$

- g)** Množina  $\mathbb{Z}$  není konvexní. Protipříklad je v řešení ve skriptech a jistě každý vymyslí další. Připomínám při té příležitosti známý fakt, že pokud chceme definici použít k ověření konvexity, pak kvůli třem obecným kvantifikátorům v ní použitých ( $\forall \mathbf{u}, \forall \mathbf{v}, \forall t$ ) je třeba v argumentaci zůstat u neurčených těchto třech proměnných, lidově řečeno „postupovat obecně“. Když naopak chceme dle definice konvexitu vyvrátit, tak díky logické negaci těch tří kvantifikátorů ( $\exists \mathbf{u}, \exists \mathbf{v}, \exists t$ ) stačí najít jeden konkrétní příklad, pro který tvrzení z definice neplatí.

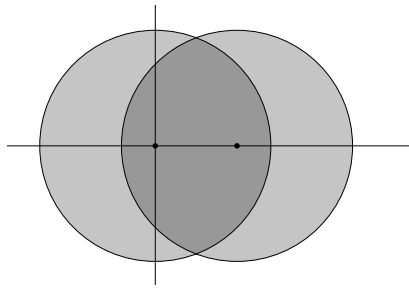
- 13.2 a)** Je to konvexní množina. Je to totiž dokonce konvexní mnohostěn: proměnné se vyskytují v lineárních (neostrých) nerovnostech. Každou rovnost můžeme nahradit dvěma nerovnostmi, takže i tady je  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  ekvivalentní s  $\sum_{i=1}^n x_i \geq 1$  a  $\sum_{i=1}^n x_i \leq 1$ .

- b)** Povrch  $n$ -rozměrné koule (sféra) není konvexní, dva protilehlé body ležící na sféře mají spojnicí procházející počátkem, přitom počátek není na sféře. Dokonce žádná spojnice dvou různých bodů uvnitř sféry neleží. Konvexním obalem je jednotková koule, tj. množina  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ .

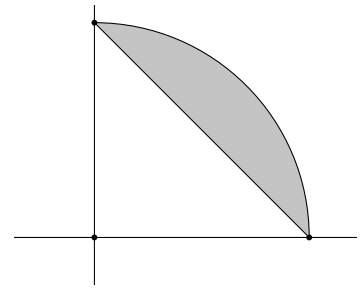
- e) Zkoumaná množina je hyperbola (graf funkce  $y = 1/x$ ) v prvním kvadrantu, protože  $xy = 1$  je totéž jako  $y = 1/x$ . Tento graf není konvexní, např. střed spojnice bodů  $[2, \frac{1}{2}]$  a  $[\frac{1}{2}, 2]$  je  $[\frac{5}{4}, \frac{5}{4}]$  a ten neleží na zadané hyperbole. Obrázek je asi názornější než počítání čtvrtin. Konvexním obalem je množina  $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq 1/x, x > 0\}$ .



12.2 e)



12.2 f)



12.2 g)

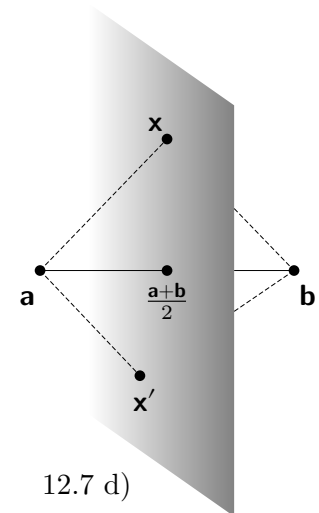
- f) Množina je zadaná jako průnik dvou kruhů o poloměru  $\sqrt{2}$  s různými středy. Kruhy samotné jsou konvexní množiny a obecně platí, že průnik konvexních množin je konvexní.
- g) Množina je čtvrtkružnicí v prvním kvadrantu. Není konvexní, protože např. střed spojnice bodů  $[1, 0]$  a  $[0, 1]$  je  $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  a ten neleží v zadané množině. Pozor, konvexní obal není „čtvrtkruh“, jak by možná mohlo někoho bez většího přemýšlení napadnout, ale množina uvedená v řešení skript.

**h,i,j)** Řešení ve skriptech je dostatečně podrobné.

- 13.7 a)** Protože je  $\mathbf{C}$  pozitivně definitní, je zkoumaná množina elipsoid, tedy něco jako ragbyový míč, takže je konvexní. Není to ale konvexní mnohostěn, protože její hranice se neskládá z „rovných ploch“, jež by se daly vymežit pomocí konečně mnoha lineárních nerovnic. Výjimkou je případ dimenze 1, kdy množina  $\{x; cx^2 \leq 1\} = \langle -1/\sqrt{c}, 1/\sqrt{c} \rangle$  se dá zapsat dvěma lineárními nerovnostmi  $-1/\sqrt{c} \leq x \leq 1/\sqrt{c}$ .

- b) Přímka procházející počátkem ve směru vektoru  $\mathbf{v}$  je konvexní mnohostěn. Její (ne)rovnice vyjádření získáme tak, že najdeme všech  $n-1$  lineárně nezávislých kolmic  $\mathbf{k}_i$  na tuto přímku (tedy bázi řešení homogenní soustavy s jednou rovnicí  $\mathbf{v}^T \mathbf{x} = 0$ ) a přímku vyjádříme jako průnik  $n-1$  nadrovin procházejících přímkou s normálovým vektorem  $\mathbf{k}_i$ . První nad rovina má rovnici  $\mathbf{k}_1^T \mathbf{x} = 0$  což se dá dále rozepsat na dvě nerovnosti  $\mathbf{k}_1^T \mathbf{x} \leq 0, \mathbf{k}_1^T \mathbf{x} \geq 0$ . Podobně pro ostatní nadroviny. Přímka je tedy vyjádřitelná pomocí  $2(n-1)$  nerovností.

- d) Zkusme se nejprve zamyslet, jak vypadá hranice zkoumané množiny, tedy množina  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|\}$ . Je to množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu  $\mathbf{a}$  jako od bodu  $\mathbf{b}$ , je to tedy nad rovina procházející středem spojnice bodů  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  a je na tuto spojnici kolmá. Dá se vyjádřit rovnicí  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{x} = c$ , protože je kolmá na  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ . Konstantu  $c$  je nutno dopočítat z faktu, že nad rovina prochází bodem  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ , takže  $c = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2 = (\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2)/2$ . Zkoumanou množinu (s nerovnostmi) lze tedy vyjádřit jako  $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{x} \geq (\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2)/2$  a je to tedy konvexní mnohostěn.



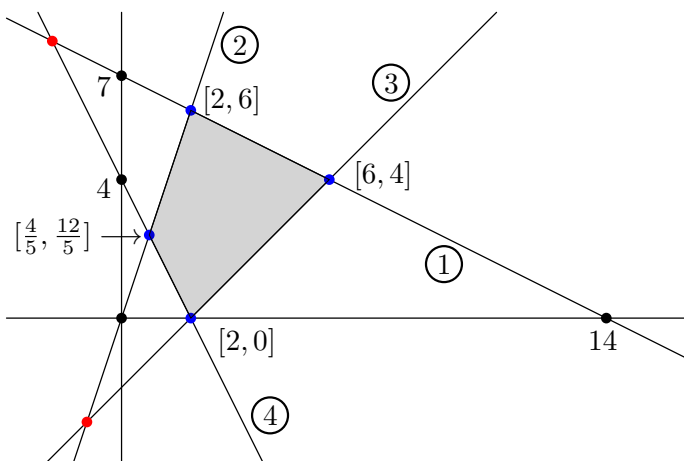
12.7 d)

- 13.9** Vzdálenost středu koule  $\mathbf{c}$  od  $i$ -té nad roviny dané rovnicí  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$  je rovna  $|\mathbf{a}_i^T \mathbf{c} - b_i|/\|\mathbf{a}_i\|$ , jak plyne z výsledku Cvičení 5.16(c). Přitom  $\mathbf{a}_i^T$  je  $i$ -tý řádek matice  $\mathbf{A}$  v zadání úlohy. Nechť  $\mathbf{c}$  vyhovuje všem nerovnicím  $\mathbf{A} \mathbf{c} > \mathbf{b}$ . Když je  $r$  dostatečně malé, aby koule neprotla žádnou nad rovinnou, pak máme vzdálenost koule od  $i$ -té nad roviny danou vzorcem  $|\mathbf{a}_i^T \mathbf{c} - b_i|/\|\mathbf{a}_i\| - r$ . Platí  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{c} - b_i > 0$ , takže není třeba psát absolutní hodnotu a máme pro kouli s poloměrem  $r > 0$  uvnitř průniku poloprostorů podmínku

$$\forall i (\mathbf{a}_i^T \mathbf{c} - b_i)/\|\mathbf{a}_i\| - r \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \forall i \mathbf{a}_i^T \mathbf{c} - b_i \geq \|\mathbf{a}_i\| r.$$

Proměnné optimalizační úlohy jsou  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  a  $r \in \mathbb{R}$ . Maximalizujeme poloměr  $r$  za podmínky, že koule leží uvnitř průniku poloprostorů, tedy  $\max\{r; r \geq 0; \mathbf{a}_i^T \mathbf{c} - b_i \geq \|\mathbf{a}_i\| r\}$ . Maticový zápis vyžaduje nejprve sestavit vektor  $\mathbf{z}$  tak, aby  $\mathbf{z}_i = \|\mathbf{a}_i\|$ . Pak hledáme  $\max\{r; r \geq 0; \mathbf{A} \mathbf{c} \geq r \mathbf{z}\}$ .

13.10 a) V úloze máme 4 nerovnosti, které vymezují 4 poloroviny podle obrázku. V kroužku u hranice poloroviny je uvedeno číslo nerovnosti, které polorovinu vymezuje a kroužek je umístěn ve směru „do“ poloroviny. Všechny průsečíky těchto přímek jsou potenciálními extrémálními body. Takže je třeba hledat průsečík přímek odpovídající každé rovnici s každou. Pro případ první rovnice ① s druhou ② máme:



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -2 & | & -14 \\ 3 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -7 & | & -42 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Toto provedeme s každou dvojicí rovnic. Máme tedy 6 průsečíků. Z obrázku je vidět, že z těch 6 průsečíků dva (červené) nejsou vůbec ve zkoumané množině, tj. máme 4 extrémální body (modré).

b) Je-li dáno  $m$  nerovnic s  $n$  proměnnými,  $m \geq n$ , pak je potřeba najít kandidáty všech extrémálních bodů, tj. vybrat všechny  $n$ -tice odpovídajících rovnic ze zadané množiny  $m$  rovnic. Těch je dohromady  $\binom{m}{n}$ . Pro každou takovou  $n$ -tici rovnic je třeba nalézt řešení jako potenciální extrémální bod. Když řešení neexistuje, pak daná  $n$ -tice negeneruje potenciální extrémální bod. Ze všech potenciálních bodů je pak třeba vybrat jen ty, které navíc leží v zadané množině, tj. splňují soustavu  $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ . Omlouvám se, ale program realizující tento algoritmus jsem nesesmolil.

Doplním k tomuto příkladu ještě jedno pozorování. Člověk, má-li málo rovnic a úloha je v  $\mathbb{R}^2$  (jako v podúloze (a)), může po vytvoření náčrtku rovnou vyloučit body, které jsou „očividně“ mimo množinu (červené body) a nemusí ani počítat hodnoty takových průsečíků. Stroj tuto „očividnou“ intuici obvykle nemá naprogramovánu a musí tedy vypočítat opravdu všechny potenciální extrémální body a pak z nich vyloučit ty, které nevyhovují zadané soustavě rovnic. Na druhé straně je stroj poněkud rychlejší než člověk a zvládne i větší dimenze než jen  $\mathbb{R}^2$ .

- 13.11 a)
1. nemá přímku ani extrémální bod (dále jen „e. bod“)
  2. jakákoli přímka v množině leží, tj. bez e. bodu
  3. e. bod je  $a$  nebo  $a$  a  $b$
  4. při  $\dim > 0$  (tj. afinní podprostor není jen samotný bod) obsahuje přímku, tj. nemá e. body
  5. e. bod je  $\mathbf{x}$
  6. obsahuje přímky, je bez e. bodu
  7. je to vícedimenzionální „první kvadrant“, e. bod je  $\mathbf{0}$
  8. neprázdný panel obsahuje přímku (např. na hranici  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b_2$ ) a je bez e. bodů
  9. vrcholy hyperkrychle jsou e. body
  10. vrcholy hyperkvádrů jsou e. body
  11. vrcholy simplexu jsou e. body
  12. e. bod je např.  $[1, 0, 0, \dots, 0]$
  13. např.  $[1, 0, 0, \dots, 0]$  nebo  $[-1, 0, 0, \dots, 0]$  jsou e. body.
- b) Množina je nekonečný hranol (ve směru osy  $z$ ) s průřezem tvaru trojúhelníka. Například přímka  $\mathbf{0} + t[0, 0, 1]^T$  v něm celá leží, tedy množina nemá e. bod.
- c) Je to panel, který obsahuje přímku (např.  $y = -x$ ), tj. neobsahuje e. bod, jak jsme o tom už v obecnějším případě **hovořili** u podúlohu (a), puntík osmý. Následuje citát z klasické divadelní hry. Král: „Vy jste spolu **nehovořili**?“ Pseudo-princezna: „**Hovořili**.“ Princ Jasoň: „**Nehovořili**, za současné výjimečné situace a vládních opatřeních se nám spolu obtížně **hovoří**.“ Do řešení, které budete zasílat, můžete připojit název citované hry, ale není to nutné.

# Kapitola 15

**15.1** Přechod na duální úlohu je docela názorný, pokud úlohu zapíšeme v maticovém tvaru. Řádky matice  $\mathbf{A}$  rozdělíme na tři skupiny (každá může být prázdná) v závislosti na znaménku rovnosti či nerovnosti v daném řádku použitém. Podmínky (korespondující s řádky matice  $\mathbf{A}$ ), musíme tedy seskupit do tří skupin podle typu (ne)rovnítka, třebaže jsou v zadání úlohy jinak zamíchány. Indexy těchto skupin řádků jsou ve skriptech označeny  $I_0, I_+,$  a  $I_-$ . Dále rozdělíme všechny proměnné do tří skupin podle toho, jaké na ně klademe další podmínky. Indexy těchto skupin jsou označeny  $J_0, J_+, J_-$ . Věc vypadá schematicky takto:

$$\begin{array}{l}
 \text{Primární úloha} \\
 \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \begin{array}{l}
 I_0: \\
 I_+: \\
 I_-:
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \end{array} \right]
 \left[ \begin{array}{c} \\ \mathbf{x} \\ \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 = \\
 \geq \\
 \leq
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c} \\ \mathbf{b} \\ \end{array} \right] \\
 \\
 J_0: \\
 J_+: \\
 J_-:
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c} \\ \mathbf{x} \\ \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \in \mathbb{R} \\
 \geq \mathbf{0} \\
 \leq \mathbf{0}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c} \\ \mathbf{A}^T \\ \end{array} \right]
 \left[ \begin{array}{c} \\ \mathbf{y} \\ \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 = \\
 \geq \\
 \leq
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c} \\ \mathbf{c} \\ \end{array} \right]
 \end{array}
 \tag{1}$$

Modře je zakroužkovaná jistá komplikace při přechodu k duální úloze: při tomto přechodu od  $\mathbf{x}$  k  $\mathbf{A}^T \mathbf{y}$  se překlápějí nerovnítká, ale při přechodu od  $\mathbf{A} \mathbf{x}$  k  $\mathbf{y}$  nikoli. Dále zelenými čarami je vyznačen „přesun dat“ mezi pravými stranami podmínek a vektory účelové funkce jednotlivých úloh. Povšimněte si, že matice  $\mathbf{A}$  je rozdělena na tři „sektory“ podél řádků  $I_0, I_+, I_-$  a taky na tři „sektory“ podél jejích sloupců  $J_0, J_+, J_-$ . Každý z těchto sektorů může být prázdný, ale v obecném případě tedy je matice rozdělena do devíti bloků. Schéma (1) budu dále zapisovat poněkud stručněji:

$$\text{úloha: } \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \mathbf{0} \quad \text{přechází na duální } \max \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \begin{array}{c} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \mathbf{c}.$$

V zadání po nás chtějí aplikovat přechod k duální úloze ještě jednou a ukázat, že se tím vrátíme k původní úloze. Zatím máme ale zaveden jen přechod od min k max a ne obráceně. Musíme tedy nejprve duální úlohu vyjádřit pomocí min a dvojího mínus. Pak můžeme aplikovat přechod:

$$\text{duální úloha: } -\min -\mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{y} \begin{array}{c} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \mathbf{0} \quad \text{přechází na dvojí duální: } -\max \mathbf{c}^T \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} \mathbf{z} \begin{array}{c} = \\ \leq \\ \geq \end{array} -\mathbf{b}.$$

Nyní si stačí všimnout, že naposledy zapsaná úloha je při  $-\mathbf{z} = \mathbf{x}$  shodná s úlohou původní, protože:

$$-\max \mathbf{c}^T \mathbf{z} \Leftrightarrow \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{z} \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \mathbf{0}, \Leftrightarrow -\mathbf{z} = \mathbf{x} \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} \mathbf{z} = -\mathbf{A} \mathbf{x} \begin{array}{c} = \\ \leq \\ \geq \end{array} -\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{x} \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \leq \end{array} \mathbf{b}.$$

Tím jsme dokázali tvrzení o „duálu k duálu“ zcela obecně, takže podúkony (a) a (b) z toho přímo plynou jako speciální případy.

Po tomto důkazu je zřejmé, že proces dualizace můžeme v úvodním schématu (1) dělat i „zprava doleva“, tedy od max k min. Jen je třeba si uvědomit, že pravidlo překlápění nebo nepřeklápění nerovnítek je v tomto případě přesně obrácené. Kdo na to vymyslí nějakou snadno zapamatovatelnou mnemotechnickou pomůcku, co se kdy překlápí či nepřeklápí při přechodu od min k max nebo obráceně, dostane pochvalu před nastoupenou jednotkou. Já si většinou pamatuji jen schéma (1) a dále si uvědomím, zda chci dualizovat zleva doprava (min  $\rightarrow$  max) nebo zprava doleva (max  $\rightarrow$  min).

- 15.2 a)** Hledáme maximum  $\sum c_i x_i$  pro  $\mathbf{x}$  ležící v hyperkrychli  $\langle -1, 1 \rangle^n$ . Maxima dosáhneme tak, že pro  $c_i < 0$  volíme  $x_i = -1$  a pro  $c_i > 0$  volíme  $x_i = 1$ . Když je náhodou  $c_i = 0$ , je možné volit  $x_i$  libovolně v intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Stručně:  $x_i = \text{sgn } c_i$ , maximální hodnota je  $\sum c_i \text{sgn } c_i = \sum |c_i|$ .
- b)** Převédeme úlohu na maticové vyjádření a provedeme dualizaci dle schématu (1) zprava doleva. (2)

Abychom se zbavili znaménka „mínus“ v účelové funkci duální úlohy a dvěma různým nerovnostem v podmínkách, přejmenujeme v duální úloze  $\mathbf{v} = \mathbf{y}$  a  $\mathbf{u} = -\mathbf{z}$  [Pozn.: pokud někoho zajímá, proč jsem zrovna teď prohodil pořadí písmen v abecedě, nechtě se podívat na řešení této úlohy do skript; chci zachovat stejné značení.]. Lidsky zapsáno, máme tedy duální úlohu ve tvaru

$$\min \left\{ \sum v_i + \sum u_i; v_i \geq 0, u_i \geq 0, v_i - u_i = c_i \right\}. \quad (3)$$

Nyní provedeme požadovanou úvahu pro řešení duální úlohy (3). Ta se rozpadá na  $n$  samostatných úloh (4), protože jednotlivé proměnné s různými indexy spolu nejsou provázány.

$$\min \{v_i + u_i; v_i \geq 0, u_i \geq 0, v_i - u_i = c_i\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (4)$$

Pro každé  $i$  je minimum nabýváno ve  $v_i = c_i, u_i = 0$  (hodnota je  $c_i$ ) nebo v  $u_i = -c_i, v_i = 0$ , (hodnota je  $-c_i$ ), tedy souhrnně hodnota minima je vždy  $|c_i|$  a a tuto hodnotu dosáhne buď  $u_i$  nebo  $v_i$  (v závislosti na znaménku  $c_i$  a druhá z uvedených proměnných je pak nulová. Zbývá dodat, že duální úloha (3) má optimální hodnotu rovnu  $\sum |c_i|$ .

- c)** Podmínky komplementarity přečteme z jednotlivých řádků schématu (2) s vědomím toho, že máme jiné značení  $\mathbf{v} = \mathbf{y}$  a  $\mathbf{u} = -\mathbf{z}$ . Dostáváme: ( $x_i = 1$  nebo  $v_i = 0$ ); ( $x_i = -1$  nebo  $u_i = 0$ ). Řádky v druhém bloku schématu (2) žádné další podmínky nepřinášejí.
- d)** Pro  $\mathbf{c} = (-2, 3, 4)$  je primární úloha vyřešena v bodě  $\mathbf{x} = (-1, 1, 1)$  a duální úloha v bodě  $\mathbf{v} = (0, 3, 4), \mathbf{u} = (2, 0, 0)$ , jak plyne z předchozích úvah o řešení primární úlohy (a) a duální úlohy (b). Můžeme ověřit, že podmínky komplementarity jsou splněny: ( $x_1 \neq 1$ , takže musí  $v_1 = 0$ ); ( $x_2 \neq -1$ , takže musí  $u_2 = 0$ ) a ( $x_3 \neq -1$ , takže musí  $u_3 = 0$ ). Nebo obrácený pohled: ( $v_2 \neq 0$ , takže musí  $x_2 = 1$ ); ( $v_3 \neq 0$ , takže musí  $x_3 = 1$ ) a ( $u_1 \neq 0$ , takže musí  $x_1 = -1$ ). Je tedy zřejmé, že ze znalosti řešení duální úlohy dostáváme přímo z podmínek komplementarity řešení primární úlohy. Obráceně: z řešení primární úlohy dostáváme v duální úloze částečný výsledek ve formě tří nul. Zbylé hodnoty lze dopočítat z podmínek duální úlohy  $v_i - u_i = c_i$ .

15.3 a)	Primární úloha:	Duální úloha:	Podmínky komplementarity:
	$\min 2x_1 - 3x_3 + x_4$	$\max 0y_1 + 5y_2 + 6y_3$	
	$x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$	$y_1 \geq 0$	$y_1(x_1 - x_2 - x_3) = 0$
	$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5$	$y_2 \leq 0$	$y_2(-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5) = 0$
	$2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$	$y_3 \in \mathbb{R}$	----
	$x_1 \geq 0$	$y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 2$	$x_1(y_1 - y_2 + 2y_3 - 2) = 0$
	$x_2 \geq 0$	$-y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 0$	$x_2(-y_1 + 2y_2 - y_3) = 0$
	$x_3 \geq 0$	$-y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -3$	$x_3(-y_1 - 3y_2 - y_3 + 3) = 0$
	$x_4 \geq 0$	$2y_3 \leq 1$	$x_4(2y_3 - 1) = 0$

- b)** Úlohu  $\min_x \{\max_i |a_i - x|\}$  převedeme známým trikem s proměnnou  $z$  na úlohu LP:

$$\min \{z; z \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, z \geq a_i - x, z \geq x - a_i\}.$$

V posledních dvou nerovnostech převedeme proměnné na levou stranu:  $z + x \geq a_i, z - x \geq -a_i$ . Přeformulujeme úlohu do maticového vyjádření a najdeme úlohu duální.

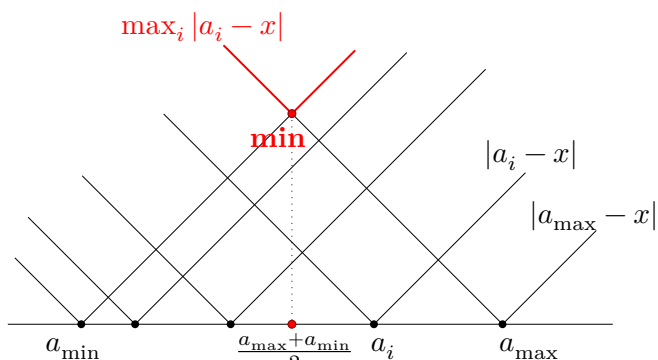
primární úloha	duální úloha
$\min 0x + 1z$	$\max \mathbf{a}^T \mathbf{u} - \mathbf{a}^T \mathbf{v}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} \mathbf{u} \geq 0 \\ \mathbf{v} \geq 0 \end{matrix}$
$\begin{matrix} z \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Lidsky řečeno, duální úloha zní:  $\max\{\mathbf{a}^T \mathbf{u} - \mathbf{a}^T \mathbf{v}; \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \sum u_i + \sum v_i = 1, \sum u_i = \sum v_i\}$ . Pověšměte si, že z posledních dvou podmínek plyne také rovnou, že  $\sum u_i = \sum v_i = \frac{1}{2}$ .

Podmínky komplementarity jsou: ( $z = a_i - x$  nebo  $u_i = 0$ ); ( $z = x - a_i$  nebo  $v_i = 0$ ).

Duální úloha nám připomíná úlohu ze Cvičení 12.3(k). Je-li  $I$  index, pro který je  $a_I$  maximální a  $J$  index, pro který je  $a_J$  minimální, pak volme  $u_I = \frac{1}{2}$  a ostatní nulové, dále  $v_J = \frac{1}{2}$  a ostatní nulové. To maximalizuje účelovou funkci duální úlohy za splnění všech podmínek. Účelová funkce má hodnotu  $(a_I - a_J)/2$ . Ilustrovat to můžeme situací, že potřebujeme nakoupit a prodat zboží o celkovém množství 1 (nákup v množství  $\frac{1}{2}$ , prodej také v množství  $\frac{1}{2}$ ). Jednotliví obchodníci nabízejí své výkupní/prodejní ceny  $a_i$ . Prodáme u obchodníka s cenou  $a_I$  celou povolenou polovinu a nakoupíme taktéž polovinu u obchodníka s cenou  $a_J$ . To maximalizuje náš zisk. Z podmínek komplementarity pak plyne, že  $z = a_I - x$  a současně  $z = x - a_J$ , sečtením těchto dvou rovností znovu dostáváme optimální hodnotu účelové funkce  $z = (a_I - a_J)/2$ . Optimální hodnota proměnné  $x$  je v této úloze  $(a_I + a_J)/2$ , tedy střed nejmenšího intervalu v  $\mathbb{R}$ , který obsahuje všechny  $a_i$ .

Toto cvičení ukazuje, že vzájemně duální úlohy popisují zcela jiný charakter problému, u každé z nich je třeba vést naprosto odlišnou úvahu (v případě řešení úvahou). V prvním případě hledáme střed intervalu na reálné ose (viz obrázek) a v druhém maximální zisk při prodeji a zároveň koupi stejného množství zboží. Obrázek ukazuje, jakou úvahou lze k výsledku primární úlohy přijít bez přechodu k duální. Na obrázku máme reálnou osu a na ní jednotlivé body  $a_i$ . Dále tam jsou grafy jednotlivých funkcí  $|a_i - x|$  a červeně je vyznačen graf funkce  $\max |a_i - x|$ . Této funkce se hledá minimum, jehož  $x$ -ová souřadnice je skutečně ve středu intervalu  $\langle a_{\min}, a_{\max} \rangle$ .



- e) Ukážu jen Cvičení 12.3(c), (d) a (e). Nebudu už vykreslovat schémátka přechodu na duální úlohu, protože je to v  $\text{\TeX}$ u přeci jen poněkud náročné a vy už přechody k duální úloze jistě umíte (z předchozích cvičení). Všimněte si, že se ve Cvičení 12.3 přechází od maxima k minimu, takže je třeba použít arabský způsob čtení schématu (1), tj. zprava doleva.

Duální úloha k 12.3(c) zní  $\min\{y; y \in \mathbb{R}, \mathbf{y}\mathbf{1} \geq \mathbf{c}\}$ , tedy  $y \geq c_i \forall i$ . Z toho je okamžitě vidět, že nejlepší řešení je  $y = \max c_i$ . Podmínky komplementarity:  $x_i = 0$  nebo  $y = c_i$ . Je to  $n$  podmínek, pro každé  $i$  je vyslovena jedna podmínka komplementarity.

Duální úloha k 12.3(d) zní  $\min\{y; y \geq 0, \mathbf{y}\mathbf{1} \geq \mathbf{c}\}$ , tedy k úloze z předchozího cvičení je přidáno  $y \geq 0$ . Vidíme, že jsou-li všechna  $c_i$  záporná, je nejlepší řešení  $y = 0$ , jinak je nejlepší řešení  $y = \max c_i$ . Podmínky komplementarity:  $x_i = 0$  nebo  $y = c_i$  a dále  $\sum x_i = 1$  nebo  $y = 0$ .

Duální úloha k 12.3(e) zní  $\min\{y - z; y \geq 0, z \leq 0, \mathbf{y}\mathbf{1} + \mathbf{z}\mathbf{1} = \mathbf{c}\}$ . Poslední podmínka rozepsána do složek říká  $y + z = c_i \forall i$ . Takovou soustavu je možné splnit jen když se všechny  $c_i$  rovnají. Nerovnají-li se, pak máme prázdnou množinu přípustných řešení, což odpovídá neomezenému řešení primární úlohy. Podmínky komplementarity: ( $\sum x_i = 1$  nebo  $y = 0$ ); ( $\sum x_i = -1$  nebo  $z = 0$ ).

#### 15.4 Zapišu primární a sestavím duální úlohu:

$$\min [47 \quad 93 \quad 17 \quad -93] \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$$

$$\max [-3 \quad 5 \quad -8 \quad -7 \quad 4] \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -6 & 1 \\ -6 & -2 & 3 & -11 & 6 \\ 1 & 7 & -10 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 12 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 47 \\ 93 \\ 17 \\ -93 \end{bmatrix}$$

Podmínky komplementarity napíšu a rovnou ověřím, která z nich platí pro  $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$ . Ty, které jsou splněny, obarvím zeleně. K ověření mi stačí počítání na prstech (součet čísel).

$$\begin{aligned} [-1 \quad -6 \quad 1 \quad 3] \mathbf{x} &= -3 && \text{nebo } y_1 = 0, \\ [-1 \quad -2 \quad 7 \quad 1] \mathbf{x} &= 5 && \text{nebo } y_2 = 0, \\ [0 \quad 3 \quad -10 \quad -1] \mathbf{x} &= -8 && \text{nebo } y_3 = 0, \\ [-6 \quad -11 \quad -2 \quad 12] \mathbf{x} &= -7 && \text{nebo } y_4 = 0, \\ [1 \quad 6 \quad -1 \quad -3] \mathbf{x} &= 4 && \text{nebo } y_5 = 0. \end{aligned}$$

Je vidět, že pro  $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$  není splněna jen levá část poslední podmínky, takže musí nutně být  $y_5 = 0$ . Po dosazení této skutečnosti do soustavy rovnic s proměnnými  $y_i$  v duální úloze máme soustavu se čtvercovou maticí a s proměnnými  $y_1, y_2, y_3, y_4$ . Řešení této soustavy se na prstech počítá už poněkud hůře, osobně jsem použil komp:  $\mathbf{y} = (-3, -2, -2, -7, 0)$ .

Jak vypadají hodnoty účelové funkce v těchto bodech?

$$[47 \quad 93 \quad 17 \quad -93] \mathbf{x} = 64, \quad [-3 \quad 5 \quad -8 \quad -7 \quad 4] \mathbf{y} = 64.$$

Jsou stejné, tj. oba vektory  $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$  a  $\mathbf{y} = (-3, -2, -2, -7, 0)$  jsou argumenty optima své úlohy a optimální hodnota obou úloh je  $2^6$ . „Certifikát optimality“ je ověřen.



## Kapitola 16

16.3 e)

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} - 2\mathbf{b}^T \mathbf{Ax} + \mathbf{b}^T \mathbf{b},$$

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (2\mathbf{A}^T \mathbf{A}) - 2\mathbf{b}^T \mathbf{A},$$

$$f''(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}.$$

Hessova matice  $2\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  je pozitivně definitní, podle podmínky 2. řádu je  $f$  konvexní funkce.

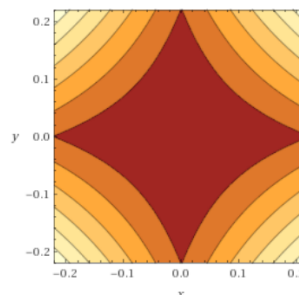
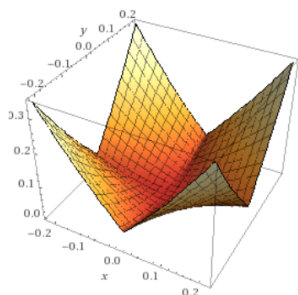
16.11 a) Funkce  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \max_{i=1}^m \min_{j=1}^n \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_j\|$  s proměnnými  $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^k$  pro danou  $m$ -tici vektorů  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^k$  není obecně konvexní. Je určitě konvexní pro  $n = 1$ , protože pak to je maximum norm posunutých do bodu  $\mathbf{a}_i$ , přitom norma je konvexní a maximum konvexní funkce je konvexní. Pro protipříklad tedy volme  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$  a dimenzi prostoru  $k = 1$ . Funkce  $f$  pro tento případ je ve tvaru  $f(x_1, x_2) = \min\{|x_1|, |x_2|\}$ . Podle dovětku ke komentáři k Cvičení 8.4 víme, že tato funkce není konvexní.

# Kapitola 17

17.4 a) Např. funkce  $f(x) = \sqrt{|x|}$  má jediné (tj. globální) minimum v bodě 0, ale není konvexní.

b) V jedné proměnné se příklad nepodaří najít, protože spojitá funkce má v okolí svého globálního minima subkontury ve tvaru intervalu.

Ve dvou proměnných už taková funkce existuje, například  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5|xy|$ . Ta má globální minimum v nule a všechny své subkontury má ve tvaru znaku čokoládoven Orion. Tento znak pochopitelně není konvexní, protože se dají spojit úsečkou jeho dva sousední vrcholy a zjevně tato úsečka celá leží mimo tento znak.



Když matematik prezentuje svůj výsledek (typicky v článku ve formátu DVD<sup>1</sup>), tak potřebuje prokázat, že důkazy neobsahují chyby a skutečně dokazují vyslovená tvrzení. V našem případě by tedy bylo potřebné sestavit vzorec pro obecnou subkonturu této funkce ve výšce  $a > 0$ , dále spojit dva vrcholy této subkontury (třeba v prvním kvadrantu) úsečkou, dále zvolit jeden bod na této úsečce (například střed) a ukázat, že leží mimo subkonturu, tedy nad hranicí subkontury, vyjádřené v prvním kvadrantu konkrétním vzorcem  $y = (-5x + \sqrt{25x^2 - 4x^2 + 4a})/2$ .

Jenže zvědavého člověka spíše zajímá, jak ten matematik na vzorec přišel, protože ověřování skutečností nad daným vzorcem je už docela nuda a někdy (jako v tomto případě) i dřina, přestože vše je rovnou patrné z obrázku. Matematik si svůj nápad ale často nechává pro sebe, protože to do publikovaného článku není potřeba. Já se s vámi ale o ten nápad podělím.

Subkontury funkce  $x^2 + y^2$  jsou kružnice. Subkontury funkce  $|x| + |y|$  jsou čtverce otočené o 45° z „normální“ polohy (manhattanská norma, viz skripta). Přitom tento vzorec se dá napsat taky ve tvaru  $\sqrt{(|x| + |y|)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2|xy|}$ . Takže i subkontury funkce  $x^2 + y^2 + 2|xy|$  jsou čtverce otočené o 45°. Podařilo se mi přejít od kružnice k vepsanému čtverci přidáním členu  $2|xy|$  k původnímu vzorci  $x^2 + y^2$  pro kružnice. Když přidám „více“ než jen  $2|xy|$ , dostanu znak čokoládoven Orion.

<sup>1</sup> Definice-věta-důkaz