

# Optimalizace

Lokální extrémý vázané rovnostmi

---

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

21. 5. 2024

FEL ČVUT

# Úloha s omezeními ve tvaru rovností

Hledáme extrémy funkce  $f$  **vázané rovnostmi**

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

## Úloha

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{za podmíněk} & \mathbf{g(x) = 0} \end{array}$$

Předpokládáme  $f, \mathbf{g}$  **spojitě diferencovatelné**.

## Speciální případy

- **afinní** kritérium, **afinní** omezení - není co řešit,
- **obecné** kritérium, **afinní** omezení - to bude rozcvička a inspirace,
- **afinní** kritérium, **obecné** omezení - ponecháme jako speciální případ následujícího:
- **obecné** kritérium, **obecné** omezení - to je cíl.

## Speciální případ: **afinní** omezení

### Úloha

$$\min f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{za podmíněk } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$ .

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{C}, \text{ neboli } \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T.$$

### Tvrzení

Pro každý lokální extrém  $\mathbf{x}$  této úlohy existuje  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  tak, že

$$f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \text{tj.}$$

$$f'(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C} = -\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}), \quad \text{neboli } \nabla f(\mathbf{x}) = -\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}.$$

## Lagrangeovy multiplikátory

Vektor  $\lambda$  bude (i v obecnějším případě) vektor **Lagrangeových multiplikátorů**.

Na jejich znaménku nezáleží; můžeme si je vynásobit jakýmkoli nenulovým číslem (i každý jiným).

Mohli bychom je i vynásobit **regulární** maticí a použít  $R\lambda$  místo  $\lambda$ ; množina řešení takto upravených omezení se tím nezmění.

Jejich hodnoty poslouží jen během výpočtu, na jeho konci nás nezajímají.

## Ještě speciálnější případ:

### Úloha na nejmenší normu řešení nehomogenní soustavy

Hledáme řešení soustavy  $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$  s nejmenší normou. Řešíme úlohu

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \right\}.$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T.$$

**Podmínky optimality** (s využitím předchozího)

$$\mathbf{x} = f'(\mathbf{x})^T = -\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

Má-li  $\mathbf{C}$  lineárně nezávislé řádky, pak optimálním řešením je

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{d}.$$

## Méně speciální případ:

### Úloha nejmenších čtverců s lineárními omezeními

Hledáme řešení úlohy nejmenších čtverců pro soustavu  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  s lineárními omezeními  $\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{d}$ . Tedy řešíme úlohu

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 \mid \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{d} \right\}.$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}),$$
$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{b}^T \mathbf{A} = -\lambda^T \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{C}^T \lambda = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Podmínky optimality

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}.$$

## Obecně: Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Vyjdeme z lineární aproximace

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\approx \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)}_0 + \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} - \underbrace{\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0}_{\mathbf{d}} = \mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Jako dříve, zavedeme **Lagrangeovy multiplikátory**

$\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  a budeme řešit soustavu rovnic

$$f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{C} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{C} := \mathbf{g}'(\mathbf{x})$  tedy

$$f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

To lze interpretovat také jako hledání stacionárních bodů

**Lagrangeovy funkce**  $L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(\mathbf{x}, \lambda) := f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$



# Tečné vektory

Množina všech přípustných řešení úlohy s omezeními ve tvaru rovností:

$$X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

## Definice

Vektor  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$  je **tečný k množině**  $X$  v bodě  $\mathbf{x} \in X$ , pokud je v  $\mathbf{x}$  tečným vektorem nějaké hladké křivky ležící v  $X$ .

**Tečný prostor**  $T_{\mathbf{x}} :=$  prostor vektorů tečných k  $X$  v bodě  $\mathbf{x}$ .

Často je  $T_{\mathbf{x}}$  lineární (a obvykle  $\dim T_{\mathbf{x}} = n - m$ ), ale nemusí být.

$$\forall \mathbf{t} \in T_{\mathbf{x}} \forall i: \mathbf{t} \perp \mathbf{g}'_i(\mathbf{x})^T = \nabla g_i(\mathbf{x}),$$

jinak by  $\mathbf{t}$  nebyl tečný k vrstevnici funkce  $g_i$ . Stručněji

$$T_{\mathbf{x}} \subseteq \text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

## Prostor generovaný gradienty omezení

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{x}} &:= \text{span}\{g'_1(\mathbf{x})^T, \dots, g'_m(\mathbf{x})^T\} = \text{span}\{\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})\} = \\ &= \text{rng } \mathbf{g}'(\mathbf{x})^T = \text{rng } \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \\ &= \{\mathbf{g}'(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq T_{\mathbf{x}}^{\perp}. \end{aligned}$$

$G_{\mathbf{x}}$  je lineární prostor parametrizovaný Lagrangeovými multiplikátory.

$$\forall \mathbf{v} \in G_{\mathbf{x}} \exists \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{v} = \mathbf{g}'(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda}.$$

$\dim G_{\mathbf{x}} \leq m$ ,  $G_{\mathbf{x}} \perp T_{\mathbf{x}}$ , může být  $G_{\mathbf{x}} \subsetneq T_{\mathbf{x}}^{\perp}$  (a to bude problém).

## Dvě interpretace Lagrangeových multiplikátorů

Lagrangeovy multiplikátory můžeme chápat jako

- argumenty Lagrangeovy funkce  $L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \mapsto L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$ ,
- parametry funkce  $\lambda L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \lambda L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ .

$$L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})^T),$$

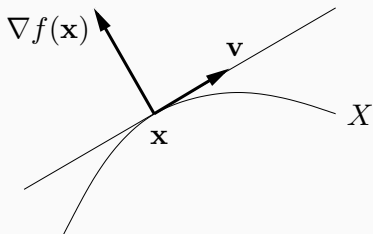
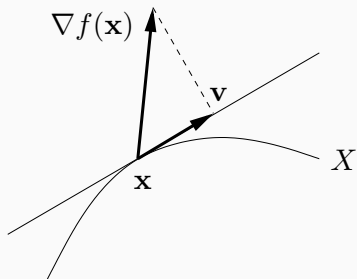
$$\lambda L'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

## Lagrangeova funkce na **tečném prostoru**

Nechť funkce  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  má v  $\mathbf{x}$  **vázaný extrém** na  $X$ .

$$\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} : \mathbf{v} \perp f'(\mathbf{x})^T = \nabla f(\mathbf{x}),$$

jinak by ze směrů  $\pm \mathbf{v}$  byl jeden vzestupný a jeden sestupný.



## Lagrangeova funkce na **tečném prostoru**

Nechť funkce  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  má v  $\mathbf{x}$  **vázaný extrém** na  $X$ .

$$\forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} : \mathbf{v} \perp f'(\mathbf{x})^T = \nabla f(\mathbf{x}),$$

jinak by ze směrů  $\pm \mathbf{v}$  byl jeden vzestupný a jeden sestupný.

Stručněji  $T_{\mathbf{x}} \perp f'(\mathbf{x})^T$ , též

$$T_{\mathbf{x}} \subseteq \text{null } f'(\mathbf{x}),$$

což spolu s předchozím

$$T_{\mathbf{x}} \subseteq \text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x}),$$

dává

$$T_{\mathbf{x}} \subseteq \text{null}(f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x})) = \text{null } \boldsymbol{\lambda}^T L'(\mathbf{x})$$

pro všechna  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ .

## Lagrangeova funkce na prostoru generovaném gradienty omezení

$$G_{\mathbf{x}} := \text{span}\{\mathbf{g}'_1(\mathbf{x})^T, \dots, \mathbf{g}'_m(\mathbf{x})^T\} = \{\mathbf{g}'(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq T_{\mathbf{x}}^{\perp},$$
$$\forall \mathbf{v} \in G_{\mathbf{x}} \exists \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

Jestliže  $f'(\mathbf{x})^T \in G_{\mathbf{x}}$ , pak pro  $\mathbf{v} := -f'(\mathbf{x})^T \in G_{\mathbf{x}}$

$$\lambda_L'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

pro nějaké  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ ;  $\lambda_L$  má nulovou derivaci ve všech směrech

$$\mathbf{t} \in T_{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{v} \in G_{\mathbf{x}}, \quad \text{a tedy i}$$

$$\uparrow \quad c_1 \mathbf{t} + c_2 \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}} + G_{\mathbf{x}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Jestliže  $T_{\mathbf{x}} + G_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}^n$ , pak řešení  $\mathbf{x}$  můžeme najít jako stacionární bod funkce  $\lambda_L$ .

# Regulární body

Odvodili jsme postup pro hledání vázaných extrémů v bodech  $\mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ , splňujících  $T_{\mathbf{x}} + G_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}^n$ , kde

$T_{\mathbf{x}}$  = prostor vektorů tečných k  $X$  v bodě  $\mathbf{x}$ ,

$G_{\mathbf{x}} = \text{span}\{g'_1(\mathbf{x})^T, \dots, g'_m(\mathbf{x})^T\}$ .

Potřebnou podmínku zformulujeme pro obecné body:

## Definice

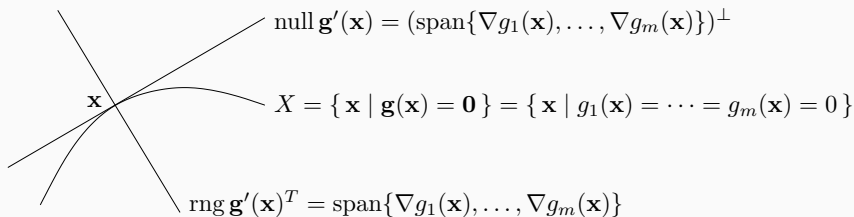
Bod  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  je **regulární bod zobrazení  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$** , jestliže zobrazení  $\mathbf{g}$  je v bodě  $\mathbf{x}$  spojitě diferencovatelné a Jacobiho matice  $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$  má lineárně nezávislé řádky.

- Stačí pouze  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{g}$ .
- Nepotřebujeme  $f$ .
- Nestačí  $\mathbf{x}$ ,  $X$ .

## Tečný a ortogonální prostor v regulárních bodech

V regulárním bodě  $\mathbf{x} \in X$  zobrazení  $\mathbf{g}$  je:

- tečný prostor  $T_{\mathbf{x}} = \text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x})$
- ortogonální prostor  $T_{\mathbf{x}}^{\perp} = (\text{null } \mathbf{g}'(\mathbf{x}))^{\perp} = \text{rng } \mathbf{g}'(\mathbf{x})^T$





## Podmínky prvního řádu pro vázané extrémny

$$\lambda L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

### Věta

Nechť funkce  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jsou spojitě diferencovatelné v regulárním bodě  $\mathbf{x}$  zobrazení  $\mathbf{g}$ . Jestliže  $\mathbf{x}$  je lokální extrém funkce  $f$  za podmínky  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_m$ , pak existuje  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ , splňující

$$\lambda L'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_n,$$

neboli

$$L'(\mathbf{x}, \lambda) = (f'(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}'(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})^T) = \mathbf{0}_{n+m}.$$

## Podmínky **druhého** řádu pro **volné** extrémy (opakování)

### Věta

Nechť  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in X$  je vnitřní bod množiny  $X$  a  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je dvakrát diferencovatelná v  $\mathbf{x}$ . Je-li  $\mathbf{x}$  stacionární bod funkce  $f$ , pak:

$f''(\mathbf{x})$  je pozitivně definitní

↓ ↗

$\mathbf{x}$  je lokální minimum

↓ ↗

$f''(\mathbf{x})$  je pozitivně semidefinitní

Matice  $\mathbf{C}$  je **pozitivně definitní na lineárním prostoru**  $Y$ , jestliže

$$\forall \mathbf{x} \in Y \setminus \{\mathbf{0}\} : \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} > 0.$$

## Podmínky druhého řádu pro vázané extrémny

### Věta

Nechť  $\mathbf{x} \in X$  a funkce  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jsou dvakrát diferencovatelné v  $\mathbf{x}$ . Nechť  $\mathbf{x}$  je regulární bod zobrazení  $\mathbf{g}$  a stacionární bod Lagrangeovy funkce  $\lambda L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Pak

$\lambda L''(\mathbf{x})$  je pozitivně definitní na null  $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$

⇓ ✗

$\mathbf{x}$  je vázané minimum  $f$

⇓ ✗

$\lambda L''(\mathbf{x})$  je pozitivně semidefinitní na null  $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$

kde  $\lambda L''(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{x},\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} L(\mathbf{x}, \lambda) = f''(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i''(\mathbf{x})$ .

Na  $L_{\lambda,\lambda}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} L(\mathbf{x}, \lambda)$ ,  $L_{\mathbf{x},\lambda}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x} \partial \lambda} L(\mathbf{x}, \lambda)$  nezáleží.

# Možný postup: sekvenční kvadratické programování (SQP)

Newtonova metoda **minimalizace funkce** (opakování)

Řešíme rovnici  $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  iterací  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - f''(\mathbf{x}_k)^{-1} f'(\mathbf{x}_k)^\top$ .

Použijeme pro  $f(\mathbf{x}) := L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ :

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

$$L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \left( f'(\mathbf{x}) + \underbrace{\boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}'(\mathbf{x})}_{\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{g}'_i(\mathbf{x})}, \mathbf{g}(\mathbf{x})^\top \right),$$

$$L''(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} f''(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{g}''_i(\mathbf{x}) & \mathbf{g}'(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{g}'(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} = -L''(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)^{-1} L'(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)^\top =$$

$$= - \begin{bmatrix} f''(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{g}''_i(\mathbf{x}_k) & \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^\top \\ \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k) & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f'(\mathbf{x}_k)^\top + \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^\top \boldsymbol{\lambda}_k \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix}.$$

## Co s body, které nejsou regulární?

- Pokud je jich málo, vyzkoušíme je všechny.
- Pokud je některé  $g'_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , zkusme ho rozložit na součin a vyšetřit každý činitel zvlášť.
- Chybějící tečné vektory můžeme najít sami a zpracovat stejně jako gradienty omezujících funkcí.
- Místo toho můžeme odvodit jiné omezující funkce, určující stejný obor  $X$ .

## Speciální případ: **afinní** omezení (opak.)

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{d}, \quad \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{C}, \quad \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T.$$

1. Jsou-li řádky matice  $\mathbf{C}$  (neboli  $\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})$ ) **lineárně nezávislé**, pak jsou všechny body regulární.
2. Jsou-li řádky matice  $\mathbf{C}$  (neboli  $\nabla g_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x})$ ) **lineárně závislé**, pak není žádný bod regulární a záleží na  $\mathbf{d}$ :
  - $X = \emptyset$ : není co řešit.
  - $X \neq \emptyset$ : můžeme z  $[\mathbf{C} \ \mathbf{d}]$  vynechat LZ řádky a pokračovat dle bodu 1, nebo na to nedbat a řešit původní soustavu

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}, \text{ neboli } \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}, \\ \mathbf{C}\mathbf{x} &= \mathbf{d}. \end{aligned}$$

(To **pro nelineární podmínky nelze.**)

Pro velký počet omezujících funkcí je těžké zajistit nebo ověřit regularitu.

Můžeme doufat, že množina bodů, v nichž je regularita porušena, je „řídka“, takže i když přes ni projdeme, nezůstaneme v ní.

## Alternativa: Metoda projektovaných gradientů

Někdy dovedeme k libovolnému bodu z  $\mathbb{R}^n$  *snadno* najít „nejbližší“ přípustný z  $X$  („projekci“ na  $X$ ), např. pro

$$X_1 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\},$$

$$X_2 = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\},$$

$$X_3 = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = r\}.$$





Pak můžeme střídat kroky:

1. Postup ve směru  $\nabla f(\mathbf{x})$  bez respektování omezujících podmínek.
2. Projekce na  $X$ .

Problém: V blízkosti extrému nás 1. krok zavádí dál od cíle.



## Reference

-  T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022. [https://cw.fel.cvut.cz/wiki/\\_media/courses/b0b33opt/opt.pdf](https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf)
-  S. Boyd, L. Vandenberghe. *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge University Press, 2018.
-  J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005.  
<https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf>
-  M. Navara. *Matematika spojitého světa*. Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2011.  
[https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS\\_print.pdf](https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf)