Optimalizace

Reálné funkce a zobrazení, lokální extrémy

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

16. 4. 2024

FEL ČVUT

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce
Graf funkce

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce
Graf funkce
Vrstevnice funkce
Spojité zobrazení

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Spojité zobrazení

Derivace funkce: parciální derivace, gradient

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Spojité zobrazení

Derivace funkce: parciální derivace, gradient

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Spojité zobrazení

Derivace funkce: parciální derivace, gradient

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Konvergence zobrazení (vektorové funkce)

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Spojité zobrazení

Derivace funkce: parciální derivace, gradient

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Konvergence zobrazení (vektorové funkce)

Derivace zobrazení (Jacobiho matice), jacobián, totální diferenciál

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Spojité zobrazení

Derivace funkce: parciální derivace, gradient

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Konvergence zobrazení (vektorové funkce)

Derivace zobrazení (Jacobiho matice), jacobián, totální diferenciál

Směrová derivace zobrazení

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Spojité zobrazení

Derivace funkce: parciální derivace, gradient

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Konvergence zobrazení (vektorové funkce)

Derivace zobrazení (Jacobiho matice), jacobián, totální diferenciál

Směrová derivace zobrazení

Parciální derivace druhého řádu (Hessova matice), hessián

Slovník pojmů (co zde bude)

Zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Spojité zobrazení

Derivace funkce: parciální derivace, gradient

Diferencovatelná funkce, diferenciál

Konvergence zobrazení (vektorové funkce)

Derivace zobrazení (Jacobiho matice), jacobián, totální diferenciál

Směrová derivace zobrazení

Parciální derivace druhého řádu (Hessova matice), hessián

Taylorův polynom (pro funkci více proměnných, do stupně 2)

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

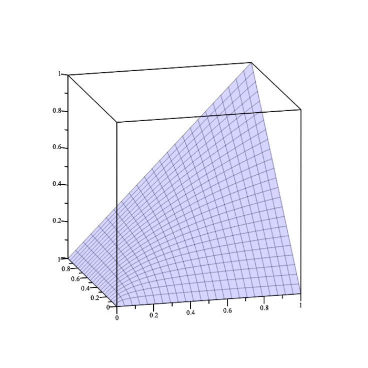
- Graf funkce f:

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Graf funkce f: $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

- Graf funkce f: $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

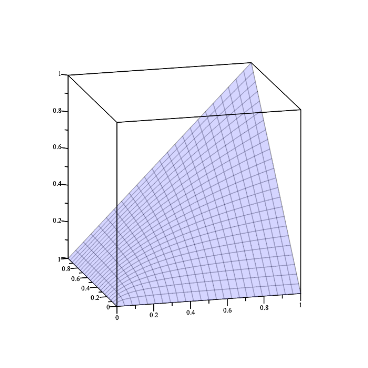
Příklad: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y-xy}\,, \qquad (x,y) \in (0,1]^2\,.$



Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Graf funkce f: $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
- Vrstevnice funkce f výšky y:

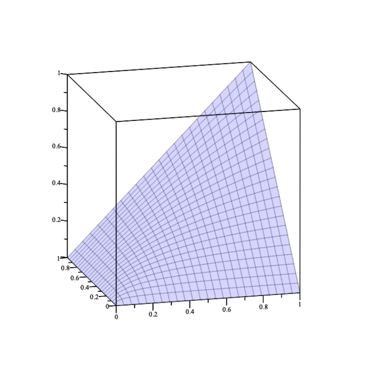
Příklad: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y-xy}, \qquad (x,y) \in (0,1]^2.$

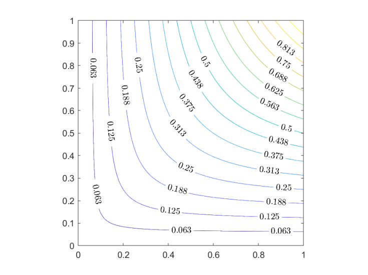


Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Graf funkce f: $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
- Vrstevnice funkce f výšky y: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = y\}$.

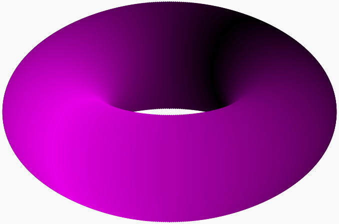
Příklad: $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y - xy}\,, \qquad (x, y) \in (0, 1]^2\,.$





Příklady

- Afinní zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Skalární pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, vektorové pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- Parametrizace toru $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
  $\mathbf{f}(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big)$

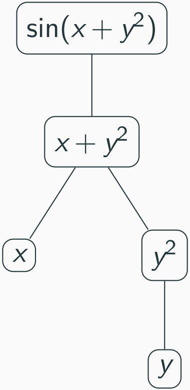


Spojitost zobrazení f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **v bodě x** $\in \mathbb{R}^n$

- Definice pomocí limity

Spojitost zobrazení f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

- Definice pomocí limity
- Spojitost se zachovává skládáním funkcí, což vede na prakticky použitelnou postačující podmínku



Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pokud existuje

$$a = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - a\,(y - x)}{y - x} = 0\,,$$

pak a se nazývá derivace funkce f v bodě x, píšeme $f'(x) \coloneqq a$ a říkáme, že funkce f je v bodě x diferencovatelná nebo že tam má diferenciál, kterým je afinní zobrazení

$$g(y) = f(x) + a\,(y - x)\,.$$

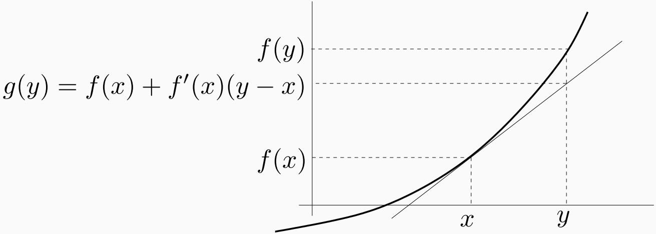
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pokud existuje

$$a = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\,, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - a\,(y - x)}{y - x} = 0\,,$$

pak a se nazývá derivace funkce f v bodě x, píšeme $f'(x) := a$ a říkáme, že funkce f je v bodě x diferencovatelná nebo že tam má diferenciál, kterým je afinní zobrazení

$$g(y) = f(x) + a\,(y - x)\,.$$



Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$

Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
		Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$

Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\vert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$

Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\vert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$
Parciální derivace funkce f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle i-té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{D}_i f$

Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\vert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle i-té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{D}_i f$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f_{x_i}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{x})$

Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\rvert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle i-té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{D}_i f$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f_{x_i}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{x})$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f_{x_i}(\mathbf{1})$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big\rvert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{1})$

Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\vert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle i-té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{D}_i f$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f_{x_i}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{x})$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f_{x_i}(\mathbf{1})$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big\vert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{1})$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle všech proměnných			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$	∇f^{T}

Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\vert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$
Parciální derivace funkce $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle i-té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{D}_i f$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f_{x_i}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{x})$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f_{x_i}(\mathbf{1})$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big\vert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{1})$
Parciální derivace funkce $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle všech proměnných			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$	$\nabla f^{\top}$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x})$	$\frac{\mathrm{d}f(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}(\mathbf{x})$	$\nabla f(\mathbf{x})^{\top}$

Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\rvert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle i-té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{D}_i f$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f_{x_i}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{x})$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f_{x_i}(\mathbf{1})$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big\rvert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{1})$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle všech proměnných			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$	$\nabla f^{\top}$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x})$	$\frac{\mathrm{d}f(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}(\mathbf{x})$	$\nabla f(\mathbf{x})^{\top}$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f'(\mathbf{1})$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}(\mathbf{1}) = \frac{\mathrm{d}f(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\Big\rvert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\nabla f(\mathbf{1})^{\top}$

Konvergence vektorové funkce vektorového argumentu $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$$

znamená konvergenci v normě,

$$\lim_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\to 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{z}\| = 0\,.$$

Konvergence vektorové funkce vektorového argumentu $\mathbf{f}\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$$

znamená konvergenci v normě,

$$\lim_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\to 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{z}\| = 0\,.$$

Na volbě normy nezáleží. ☺

Definice

Pokud existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}\,,$$

tj.

$$\lim_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|} = 0\,,$$

pak $\mathbf{A}$ se nazývá derivace nebo Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$, píšeme $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) := \mathbf{A}$ a říkáme, že zobrazení $\mathbf{f}$ je v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné nebo že tam má totální diferenciál, kterým je afinní zobrazení

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,.$$

Existence derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Existuje-li derivace zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f_1(\mathbf{x}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 f_m(\mathbf{x}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Existence derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Existuje-li derivace zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f_1(\mathbf{x}) & \dots & \mathrm{D}_n f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 f_m(\mathbf{x}) & \dots & \mathrm{D}_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Věta

Jestliže v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \mathrm{D}_j f_i$ existují a jsou spojité, potom má $\mathbf{f}$ v $\mathbf{x}$ derivaci (totální diferenciál).

Speciální případy

$\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_m'(x) \end{bmatrix}.$$

Speciální případy

$\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_m'(x) \end{bmatrix}.$$

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x})^\mathsf{T},$$

kde

$$\nabla f(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = f'(\mathbf{x})^\mathsf{T}$$

je gradient funkce f v bodě $\mathbf{x}$.

Řetízkové pravidlo

Věta o derivaci složeného zobrazení

Pro diferencovatelná zobrazení

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{f}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{h}:=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathbf{g}"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

platí

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\, \mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

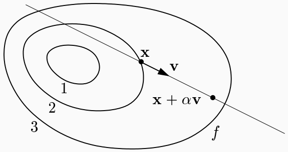
Směrová derivace

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

Směrová derivace

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor

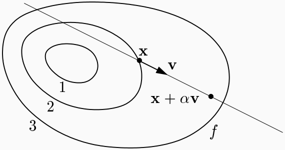
$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha} \in \mathbb{R}^m .$$



Směrová derivace

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha} \in \mathbb{R}^m .$$



Tvrzení

Je-li zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné, pak jeho směrová derivace v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{v}$.

Speciální případ: funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Tvrzení

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelná, pak její směrová derivace v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna skalárnímu součinu $\nabla f(\mathbf{x})^\mathsf{T}\,\mathbf{v} = f'(\mathbf{x})\,\mathbf{v}$ a je pro jednotkový vektor $\mathbf{v}$

- maximální, je-li $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$;
- nulová, je-li $\mathbf{v} \perp \nabla f(\mathbf{x})$.

Parciální derivace druhého řádu

Věta

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \, \partial x_j} = \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i f(\mathbf{x}) \,, \qquad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \, \partial x_i} = \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(\mathbf{x})$$

v bodě $\mathbf{x}$ existují a jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, potom jsou si rovny.

Parciální derivace druhého řádu

Věta

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i\,\partial x_j} = \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i f(\mathbf{x})\,, \qquad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j\,\partial x_i} = \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(\mathbf{x})$$

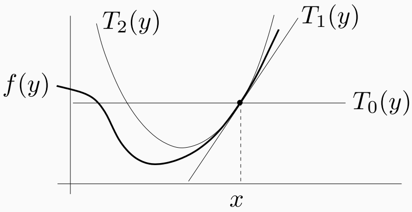
v bodě $\mathbf{x}$ existují a jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, potom jsou si rovny.

Hessova matice je

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1\,\partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n\,\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 \mathrm{D}_1 f(\mathbf{x}) & \dots & \mathrm{D}_n \mathrm{D}_1 f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 \mathrm{D}_n f(\mathbf{x}) & \dots & \mathrm{D}_n \mathrm{D}_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Taylorův polynom pro funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Hledáme polynom k-tého stupně $T_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, který má v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace až do řádu k stejné jako funkce f.



Taylorovy polynomy v bodě x do stupně 2

$$T_0(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$$
$$T_1(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$
$$T_2(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\, f''(\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

Vnitřek a hranice množiny

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

- vnitřní bod, pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$,
- hraniční bod, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ je $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$.

Vnitřek a hranice množiny

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

- vnitřní bod, pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$,
- hraniční bod, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ je $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$.

Které body jsou vnitřní a které hraniční?

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0\} \ \cup \ \{(1, 1)\}$$

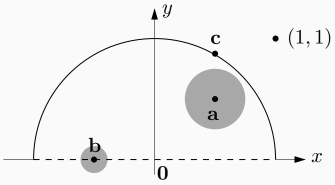
Vnitřek a hranice množiny

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

- vnitřní bod, pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$,
- hraniční bod, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ je $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$.

Které body jsou vnitřní a které hraniční?

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0\} \ \cup\ \{(1, 1)\}$$



Extrémy funkce na množině

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

- minima, pokud $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ pro všechna $\mathbf{y} \in X$,
- lokálního minima, pokud existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ pro všechna $\mathbf{y} \in X \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Extrémy funkce na množině

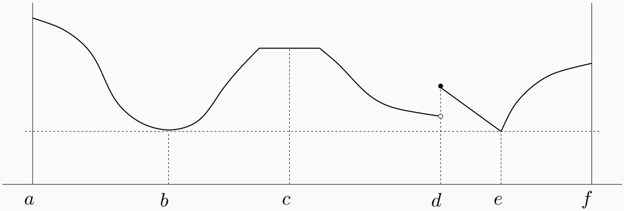
Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

- minima, pokud $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ pro všechna $\mathbf{y} \in X$,
- lokálního minima, pokud existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ pro všechna $\mathbf{y} \in X \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})$.

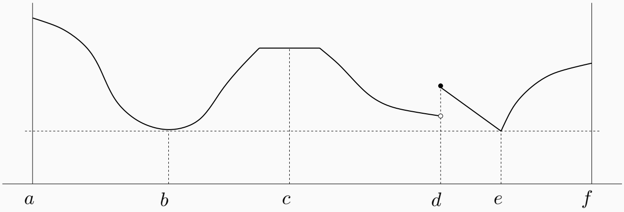
(Lokální) minimum v bodě $\mathbf{x}$ je

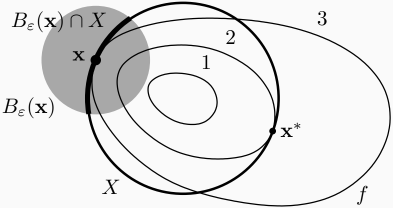
- volné, pokud $\mathbf{x}$ je vnitřním bodem množiny X,
- vázané, pokud $\mathbf{x}$ je hraničním bodem množiny X.

Extrémy funkce na množině – příklady



Extrémy funkce na množině – příklady





Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022. https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf
- J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005. https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf
- *Matlab Activities for Multivariable Calculus.* https://mse.redwoods.edu/darnold/math50c/matlab/
- M. Navara. *Matematika spojitého světa*. Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2011. https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf