

Optimalizace

Reálné funkce a zobrazení, lokální extrémny

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

19. 4. 2024

FEL ČVUT

Slovník pojmů (co zde bude)

Relace, zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Limita zobrazení (vektorové funkce)

Spojité zobrazení

Derivace funkce, diferencovatelná funkce, diferenciál

Parciální derivace funkce, gradient

Derivace zobrazení (Jacobiho matice), jacobíán, totální diferenciál

Směrová derivace zobrazení

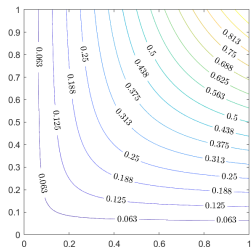
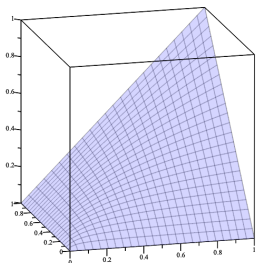
Parciální derivace druhého řádu (Hessova matice), hessián

Taylorův polynom (pro funkci více proměnných, do stupně 2)

Funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

- **Graf** funkce $f: \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
- **Vrstevnice** funkce f výšky $y: \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = y\}$.

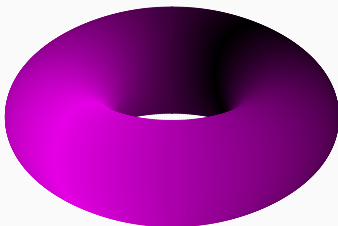
Příklad: $f(x, y) = \frac{xy}{x + y - xy}$, $(x, y) \in (0, 1]^2$.



Zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Příklady

- Afinní zobrazení $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Skalární pole $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, vektorové pole $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- Parametrizace toru $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $f(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v)$



Limita zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$$

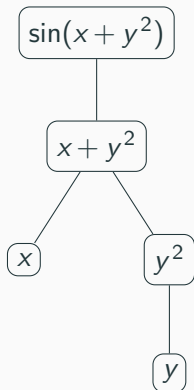
znamená konvergenci v normě,

$$\lim_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \rightarrow 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{z}\| = 0.$$

Na volbě normy nezáleží. ☺

Spojitosť zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $x \in \mathbb{R}^n$

- Definice: $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$.
- Spojitosť se zachovává **skládáním funkcí**, což vede na prakticky použitelnou postačující podmínku



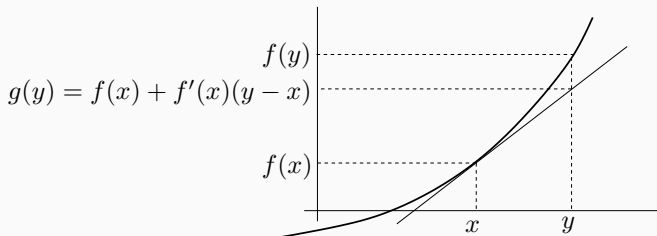
Derivace funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Pokud existuje

$$a = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x) - a(y - x)}{y - x} = 0,$$

pak a se nazývá **derivace** funkce f v bodě x , píšeme $f'(x) := a$ a říkáme, že funkce f je v bodě x **diferencovatelná** nebo že tam má **diferenciál**, kterým je afinní zobrazení

$$g(y) = f(x) + a(y - x).$$



Parciální derivace funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Pokud existuje

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x_i} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{y - x_i} &= \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \alpha, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\alpha}, \end{aligned}$$

pak se nazývá **parciální derivace** funkce f v bodě x **podle i -té proměnné** (x_i).

Vektor parciálních derivací podle **všech** proměnných se nazývá **gradient**.

Intermezzo: Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{df}{dx}$	Df
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x)$	$Df(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{df}{dx}(1) = \frac{df(x)}{dx} \Big _{x=1}$	$Df(1)$
Parciální derivace funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ podle i -té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$D_i f$
hodnota v x	$f_{x_i}(x)$	$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$	$D_i f(x)$
hodnota v 1	$f_{x_i}(1)$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}(1) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Big _{x=1}$	$D_i f(1)$
Parciální derivace funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ podle všech proměnných			
derivace	f'	$\frac{df}{d\mathbf{x}}$	∇f^\top
hodnota v x	$f'(\mathbf{x})$	$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \frac{df}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x})$	$\nabla f(\mathbf{x})^\top$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{df}{d\mathbf{x}}(1) = \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big _{x=1}$	$\nabla f(1)^\top$

Derivace zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Definice

Pokud existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = \mathbf{0},$$

tj.

$$\lim_{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = 0,$$

pak \mathbf{A} se nazývá **derivace** nebo **Jacobiho matice** zobrazení \mathbf{f} v bodě \mathbf{x} , píšeme $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) := \mathbf{A}$ a říkáme, že zobrazení \mathbf{f} je v bodě \mathbf{x} **diferencovatelné** nebo že tam má **totální diferenciál**, kterým je afinní zobrazení

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Je-li Jacobiho matice čtvercová ($m = n$), pak její determinant, $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x})$, se nazývá **jacobián**.

Existence derivace zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Existuje-li derivace zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Věta

Jestliže v bodě \mathbf{x} všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = D_j f_i$ existují a jsou **spojité**, potom má \mathbf{f} v \mathbf{x} derivaci (totální diferenciál).

Speciální případy

$$\mathbf{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g'_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g'_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} .$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] = \nabla f(\mathbf{x})^\top ,$$

kde

$$\nabla f(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = f'(\mathbf{x})^\top$$

je **gradient** funkce f v bodě \mathbf{x} .

Věta o derivaci složeného zobrazení

Pro diferencovatelná zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbb{R}^l \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathbf{h} := \mathbf{g} \circ \mathbf{f} & & \end{array}$$

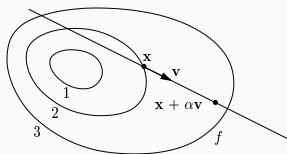
platí

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

Směrová derivace

Směrová derivace zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{\alpha} \in \mathbb{R}^m.$$



Tvrzení

Je-li zobrazení f v bodě \mathbf{x} diferencovatelné, pak jeho směrová derivace v bodě \mathbf{x} ve směru \mathbf{v} je rovna $f'(\mathbf{x})\mathbf{v}$.

Speciální případ: funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Tvrzení

Je-li funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě \mathbf{x} diferencovatelná, pak její směrová derivace v bodě \mathbf{x} ve směru \mathbf{v} je rovna skalárnímu součinu $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{v} = f'(\mathbf{x}) \mathbf{v}$ a je pro jednotkový vektor \mathbf{v}

- maximální, je-li $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$;
- nulová, je-li $\mathbf{v} \perp \nabla f(\mathbf{x})$.

Parciální derivace druhého řádu

Věta

Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = D_j D_i f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} = D_i D_j f(\mathbf{x})$$

v bodě \mathbf{x} existují a jsou v bodě \mathbf{x} spojité, potom jsou si rovny.

Hessova matice je

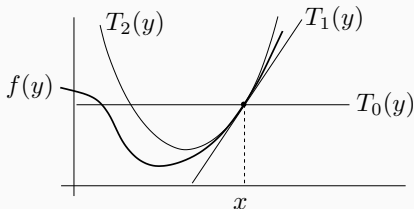
$$f''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_1 f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 D_n f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Obvykle symetrická, je maticí nějaké kvadratické formy.

Determinant Hessovy matice, $\det f''(\mathbf{x})$, se nazývá **hessián**.

Taylorův polynom pro funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Hledáme polynom k -tého stupně $T_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, který má v bodě \mathbf{x} všechny parciální derivace až do řádu k stejné jako funkce f .







Taylorovy polomy v bodě \mathbf{x} do stupně 2

$$T_0(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$$

$$T_1(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

$$T_2(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\top f''(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

Reference

-  T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022.
https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf
-  J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005.
<https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf>
-  *Matlab Activities for Multivariable Calculus*.
<https://mse.redwoods.edu/darnold/math50c/matlab/>
-  M. Navara. *Matematika spojitého světa*. Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2011.
https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf