Optimalizace

Reálné funkce a zobrazení, lokální extrémy

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

18. 4. 2024

FEL ČVUT

Slovník pojmů (co zde bude)

Relace, zobrazení, funkce

Graf funkce

Vrstevnice funkce

Limita zobrazení (vektorové funkce)

Spojité zobrazení

Derivace funkce, diferencovatelná funkce, diferenciál

Parciální derivace funkce, gradient

Derivace zobrazení (Jacobiho matice), jacobián, totální diferenciál

Směrová derivace zobrazení

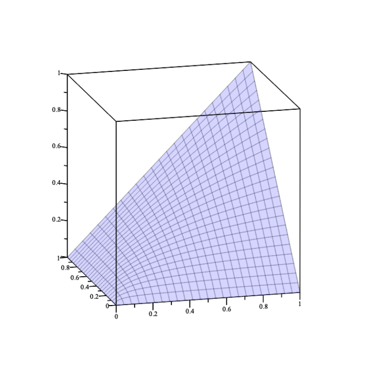
Parciální derivace druhého řádu (Hessova matice), hessián

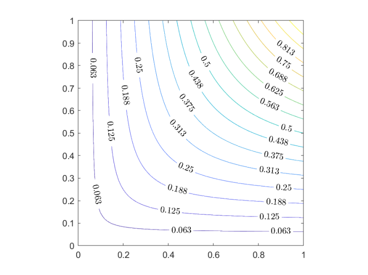
Taylorův polynom (pro funkci více proměnných, do stupně 2)

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Graf funkce f: $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
- Vrstevnice funkce f výšky y: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = y\}$.

Příklad: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y-xy}, \qquad (x,y) \in (0,1]^2.$

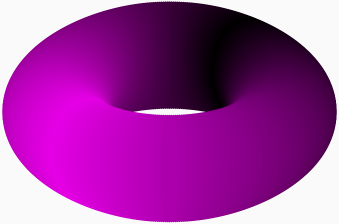




Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Příklady

- Afinní zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Skalární pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, vektorové pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- Parametrizace toru $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
  $\mathbf{f}(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v\big)$



Limita zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{z}$$

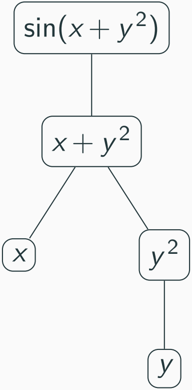
znamená konvergenci v normě,

$$\lim_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\to 0} \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{z}\| = 0\,.$$

Na volbě normy nezáleží. ☺

Spojitost zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

- Definice: $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.
- Spojitost se zachovává skládáním funkcí, což vede na prakticky použitelnou postačující podmínku



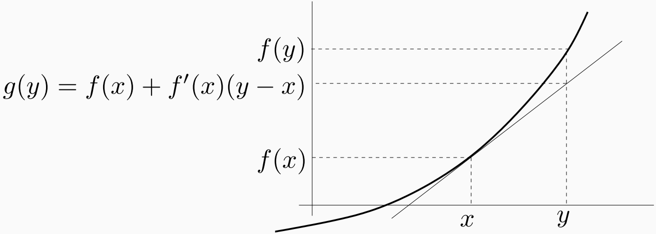
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pokud existuje

$$a = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad \text{t.j.} \quad \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - a\,(y - x)}{y - x} = 0\,,$$

pak a se nazývá derivace funkce f v bodě x, píšeme $f'(x) \coloneqq a$ a říkáme, že funkce f je v bodě x diferencovatelná nebo že tam má diferenciál, kterým je afinní zobrazení

$$g(y) = f(x) + a\,(y - x)\,.$$



Parciální derivace funkce f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Pokud existuje

$$\lim_{y \to x_i} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{y - x_i},$$

pak se nazývá parciální derivace funkce f v bodě x podle i-té proměnné (x_i).

Vektor parciálních derivací podle všech proměnných se nazývá gradient.

Intermezzo: Značení derivací

značení	Lagrangeovo	Leibnizovo	operátorové
Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\mathrm{D}f$
hodnota v x	$f'(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$	$\mathrm{D}f(x)$
hodnota v 1	$f'(1)$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\rvert_{x=1}$	$\mathrm{D}f(1)$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle i-té proměnné			
derivace	f_{x_i}	$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	$\mathrm{D}_i f$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f_{x_i}(\mathbf{x})$	$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{x})$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f_{x_i}(\mathbf{1})$	$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big\rvert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\mathrm{D}_i f(\mathbf{1})$
Parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podle všech proměnných			
derivace	f'	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$	$\nabla f^{\top}$
hodnota v $\mathbf{x}$	$f'(\mathbf{x})$	$\frac{\mathrm{d}f(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}(\mathbf{x})$	$\nabla f(\mathbf{x})^{\top}$
hodnota v $\mathbf{1}$	$f'(\mathbf{1})$	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{x}}(\mathbf{1}) = \frac{\mathrm{d}f(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\Big\rvert_{\mathbf{x}=\mathbf{1}}$	$\nabla f(\mathbf{1})^{\top}$

Derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definice

Pokud existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}\,,$$

tj.

$$\lim_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|} = 0\,,$$

pak $\mathbf{A}$ se nazývá derivace nebo Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$, píšeme $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) := \mathbf{A}$ a říkáme, že zobrazení $\mathbf{f}$ je v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné nebo že tam má totální diferenciál, kterým je afinní zobrazení

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,.$$

Je-li Jacobiho matice čtvercová ($m = n$), pak její determinant, $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x})$, se nazývá jacobián.

Existence derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Existuje-li derivace zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f_1(\mathbf{x}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 f_m(\mathbf{x}) & \ldots & \mathrm{D}_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Věta

Jestliže v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \mathrm{D}_j f_i$ existují a jsou spojité, potom má $\mathbf{f}$ v $\mathbf{x}$ derivaci (totální diferenciál).

Speciální případy

$\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_m'(x) \end{bmatrix}.$$

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x})^{\mathsf{T}},$$

kde

$$\nabla f(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = f'(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}$$

je gradient funkce f v bodě $\mathbf{x}$.

Řetízkové pravidlo

Věta o derivaci složeného zobrazení

Pro diferencovatelná zobrazení

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{f}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{h}:=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathbf{g}"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

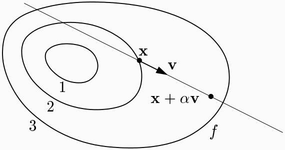
platí

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\,\mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

Směrová derivace

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha} \in \mathbb{R}^m .$$



Tvrzení

Je-li zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné, pak jeho směrová derivace v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{v}$.

Speciální případ: funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Tvrzení

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelná, pak její směrová derivace v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna skalárnímu součinu $\nabla f(\mathbf{x})^\mathsf{T}\,\mathbf{v} = f'(\mathbf{x})\,\mathbf{v}$ a je pro jednotkový vektor $\mathbf{v}$

- maximální, je-li $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$;
- nulová, je-li $\mathbf{v} \perp \nabla f(\mathbf{x})$.

Parciální derivace druhého řádu

Věta

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i\, \partial x_j} = \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i f(\mathbf{x})\,, \qquad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j\, \partial x_i} = \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(\mathbf{x})$$

v bodě $\mathbf{x}$ existují a jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, potom jsou si rovny.

Hessova matice je

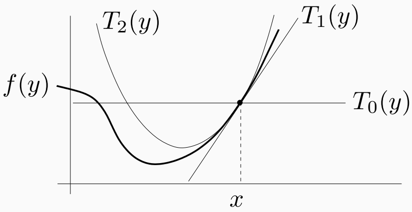
$$f''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1\, \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n\, \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n\, \partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_1 \mathrm{D}_1 f(\mathbf{x}) & \dots & \mathrm{D}_n \mathrm{D}_1 f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_1 \mathrm{D}_n f(\mathbf{x}) & \dots & \mathrm{D}_n \mathrm{D}_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Obvykle symetrická, je maticí nějaké kvadratické formy.

Determinant Hessovy matice, $\det f''(\mathbf{x})$, se nazývá hessián.

Taylorův polynom pro funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Hledáme polynom k-tého stupně $T_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, který má v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace až do řádu k stejné jako funkce f.



Taylorovy polynomy v bodě x do stupně 2

$$T_0(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$$
$$T_1(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$
$$T_2(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\, f''(\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

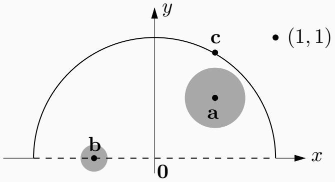
Vnitřek a hranice množiny

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

- vnitřní bod, pokud $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$,
- vnější bod, pokud $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$, tj. $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X = \emptyset$,
- hraniční bod, pokud
  $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset,\ B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$.

Které body jsou vnitřní a které hraniční?

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0\} \ \cup\ \{(1, 1)\}$$



Extrémy funkce na množině

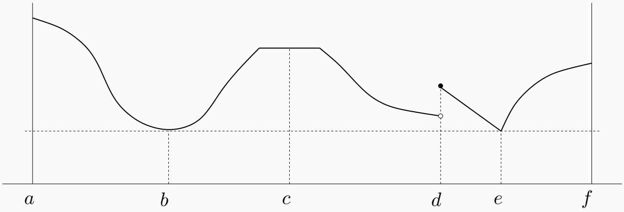
Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

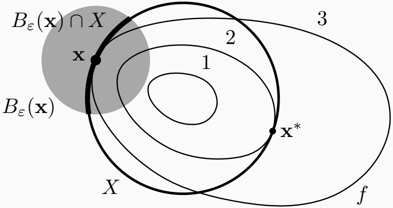
- minima, pokud $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ pro všechna $\mathbf{y} \in X$,
- lokálního minima, pokud existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ pro všechna $\mathbf{y} \in X \cap B_\varepsilon(\mathbf{x})$.

(Lokální) minimum v bodě $\mathbf{x}$ je

- volné, pokud $\mathbf{x}$ je vnitřním bodem množiny X,
- vázané, pokud $\mathbf{x}$ je hraničním bodem množiny X.

Extrémy funkce na množině – příklady





Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022. https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf
- J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005. https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf
- *Matlab Activities for Multivariable Calculus.* https://mse.redwoods.edu/darnold/math50c/matlab/
- M. Navara. *Matematika spojitého světa*. Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2011. https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf