Optimalizace

Lokální extrémy vázané rovnostmi

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

12. 4. 2023

FEL ČVUT

Úloha s omezeními ve tvaru rovností

Úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{za podmínek} \quad & g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- Budeme hledat podmínky optimality pro lokální extrémy funkce f vázané rovnostmi $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- Předpokládáme, že f i $\mathbf{g}$ jsou spojitě diferencovatelné

Obecně: Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Lagrangeovy multiplikátory $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$

Lagrangeova funkce $L\colon\ \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Podmínky optimality

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} = f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T} \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,, \text{ neboli } \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}\,,$$
$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})^\mathsf{T} = \mathbf{0}\,.$$

Za příslušných předpokladů existuje $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ splňující $L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$, tedy $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ je stacionárním bodem funkce L.

Tečný vektor k množině

Přípustná řešení úlohy s omezeními ve tvaru rovností značíme

$$X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Definice

Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je tečný k množině X v bodě $\mathbf{x} \in X$, pokud je v tom bodě tečným vektorem nějaké hladké křivky ležící v X.

Popis tečných vektorů

Tvrzení

Je-li vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tečný k množině X v bodě $\mathbf{x}$, pak $\mathbf{g}'(\mathbf{x})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, neboli $\mathbf{v}^\mathsf{T}\,\nabla\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Věta

Pokud platí

1. $\operatorname{rank}\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = m$, neboli $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ má plnou hodnost (pro $m \leq n$),
2. $\mathbf{g}'(\mathbf{x})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, neboli $\mathbf{v}^\mathsf{T}\,\nabla\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,

potom je vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tečný k množině X v bodě $\mathbf{x}$.

Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022. `https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf`
- S. Boyd, L. Vandenberghe. Introduction to applied linear algebra: vectors, matrices, and least squares. Cambridge University Press, 2018.
- J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005. `https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf`