Optimalizace

Lokální extrémy vázané rovnostmi

Tomáš Kroupa, Mirko Navara

12. 4. 2023

FEL ČVUT

Úloha s omezeními ve tvaru rovností

Úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{za podmínek} \quad & g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- Budeme hledat podmínky optimality pro lokální extrémy funkce f vázané rovnostmi $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- Předpokládáme, že f i $\mathbf{g}$ jsou spojitě diferencovatelné

Speciální případ: Lineární omezení

Pokud $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\,\mathbf{x} - \mathbf{d}$, kde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak řešíme úlohu

$$\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{C}\,\mathbf{x} = \mathbf{d}\}.$$

Tvrzení

Pro každý lokální extrém $\mathbf{x}$ této úlohy existuje $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}\,\mathbf{C}\,, \text{ neboli } \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^\mathsf{T}\,\boldsymbol{\lambda}\,, \\ \mathbf{C}\,\mathbf{x} &= \mathbf{d}\,. \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\,, \qquad \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^\mathsf{T}\,.$$

Ještě speciálnější případ:
Úloha na nejmenší normu řešení nehomogenní soustavy

Hledáme řešení soustavy $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ s nejmenší normou. Řešíme úlohu

$$\min \left\{ \tfrac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \right\}.$$

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 = \tfrac{1}{2} \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{x}, \qquad f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}.$$

Podmínky optimality

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^\mathsf{T} \boldsymbol{\lambda}, \qquad \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}.$$

Má-li $\mathbf{C}$ lineárně nezávislé řádky, pak optimálním řešením je

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^\mathsf{T} (\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} \mathbf{d}.$$

Méně speciální případ:
Úloha nejmenších čtverců s lineárními omezeními

Hledáme řešení úlohy nejmenších čtverců pro soustavu $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s lineárními omezeními $\mathbf{C}\,\mathbf{x} = \mathbf{d}$. Tedy řešíme úlohu

$$\min\left\{\tfrac{1}{2}\,\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 \mid \mathbf{C}\,\mathbf{x} = \mathbf{d}\right\}.$$

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\,\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b})^\top\,(\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b})\,,$$
$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top\,\mathbf{A}^\top\,\mathbf{A} - \mathbf{b}^\top\,\mathbf{A}\,.$$

Podmínky optimality

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top\mathbf{A} & \mathbf{C}^\top \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top\mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Obecně: Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Lagrangeovy multiplikátory $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$

Lagrangeova funkce $L\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Podmínky optimality

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} = f'(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T} \mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,, \ \text{neboli } \nabla f(\mathbf{x}) + \nabla g(\mathbf{x})\,\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}\,,$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})^\mathsf{T} = \mathbf{0}\,.$$

Za příslušných předpokladů existuje $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ splňující $L'(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$, tedy $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ je stacionárním bodem funkce L.

Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 17. 10. 2022. https://cw.fel.cvut.cz/wiki/_media/courses/b0b33opt/opt.pdf
- S. Boyd, L. Vandenberghe. Introduction to applied linear algebra: vectors, matrices, and least squares. Cambridge University Press, 2018.
- J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005. https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/dipocet.pdf