

Část první

Jazyk predikátové logiky \mathcal{L} je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{R\}, & ar(R) &= 2 \\ \text{Func} &= \{f, g\}, & ar(f) &= 1, ar(g) = 2 \\ \text{Kons} &= \{a\}\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka \mathcal{L} je dána následovně:

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N} \\ \llbracket R \rrbracket &= \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m + n \leq 15\} \\ \llbracket f \rrbracket &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ & n \mapsto n + 2 \\ \llbracket g \rrbracket &: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \\ & (m, n) \mapsto m \cdot n \\ \llbracket a \rrbracket &= 5\end{aligned}$$

Úloha 1, rozmezí hodnocení: $\langle -5, 5 \rangle$ Formule φ je definována jako $\forall x \exists y R(x, y)$. Ověřte pravdivost sentence φ , tedy rozhodněte, zda $I \models \varphi$.

Úloha 2, rozmezí hodnocení: $\langle -5, 5 \rangle$ Nechť seznam deklarovaných proměnných je $D = (x)$ a formuli ψ definujme jako $R(g(x, x), f(f(a)))$. Spočtěte význam formule ψ , tedy nalezněte $\llbracket \psi \rrbracket_D$.

Část druhá

Úloha 3, rozmezí hodnocení: $\langle 0, 5 \rangle$ Nalezněte alespoň tříprvkový model množiny sentencí

$$\{\forall x \neg(f(x) = x), \forall x R(x, f(x)), \forall x \forall y (R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x))\}.$$

U každé sentence pečlivě popište, proč je ve vaší interpretaci pravdivá.

Úloha 4, rozmezí hodnocení: $\langle 0, 5 \rangle$ Přirozenou dedukcí dokažte následující:

$$\forall x (P(x) \Rightarrow S(x)), \forall x (Q(x) \Rightarrow S(x)) \vdash (\exists y (P(y) \vee Q(y))) \Rightarrow (\exists z S(z))$$