Cvičení 25:15, 36. dubna 2075
Vaše jméno a příjmení:

LGR — první semestrální test — VAŠE ID JE 1

V příkladech týkajících se výrokové logiky je množinou atomických formulí množina

$$At = \{a, b, c\}.$$

Úloha 1 (5 bodů) Množina formulí $M \subseteq Fm(At)$ a formule $\varphi \in Fm(At)$ jsou zadány následovně:

$$M = \{(a \wedge b) \Rightarrow a,\ c \Rightarrow (\neg b \wedge a),\ \neg c \Rightarrow a\}, \qquad \varphi = \neg b \Rightarrow (a \Rightarrow \neg c).$$

Pokud je formule φ logickým důsledkem množiny formulí M, dokažte to přirozenou dedukcí. Pokud ne, ukažte, že φ není sémantickým důsledkem množiny M.

Řešení

Formule φ není sémantickým důsledkem množiny formulí M. To lze ukázat například vyplněním pravdivostní tabulky daných formulí. Náš postup přímo zkonstruuje pravdivostní ohodnocení u, ve kterém bude nepravdivá formule φ, a přitom v něm bude každá formule z množiny M pravdivá. Takové ohonocení u totiž přímo dokazuje, že $M \not\models \varphi$.

Aby $u(\varphi) = 0$, musí $u(\neg b) = 1$ a $u(a \Rightarrow \neg c) = 0$. To nastane přesně v případě, kdy $u(a) = 1$, $u(b) = 0$ a $u(c) = 1$. Tímto přiřazením atomických formulí tedy pravdivostní ohodnocení u definujme. Nyní stačí ukázt, že

$$\begin{aligned} u((a \wedge b) \Rightarrow a) &= 1, \\ u(c \Rightarrow (\neg b \wedge a)) &= 1, \\ u(\neg c \Rightarrow a) &= 1. \end{aligned}$$

První formule je v ohodnocení u pravdivá, neboť je to dokonce tautologie. Druhá formule je v u pravdivá: $u(\neg b \wedge a) = 1$ lze snadno ověřit. Třetí formule je v u pravdivá, neboť $u(c) = 0$.

Úloha 2 (5 bodů) Dokažte přirozenou dedukcí následující tvrzení. Používejte pouze základní odvozovací pravidla.

$$\neg(a \wedge b) \vdash \neg a \vee \neg b$$

Řešení

Toto je standardní úloha řešená například ve sbírce úloh z přirozené dedukce ve výrokové logice.

Úloha 3 (5 bodů) Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$ je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P\}, \quad ar(P) = 1 \\ \mathsf{Func} &= \{f\}, \quad ar(f) = 2 \\ \mathsf{Kons} &= \{a\} \end{aligned}$$

Uvažujte interpretaci $\mathcal{I}$ jazyka $\mathcal{L}$ s universem $U = \mathbb{Z}$, kde

$$\begin{aligned}
&[\![P]\!] = \{3 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\},\\
&[\![f]\!] : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ je sčítání celých čísel},\\
&[\![a]\!] = 7.
\end{aligned}$$

Rozhodněte a pečlivě zdůvodněte, které z následujících formulí φ, ψ, χ

$$\varphi = P(f(x,a)), \quad \psi = \exists x P(f(x,a)), \quad \chi = \forall y \exists x P(f(x,y))$$

jsou pravdivé v kontextu proměnných

$$\begin{aligned}
\rho : \mathsf{Var} &\rightharpoonup \mathbb{Z}\\
x &\mapsto 1.
\end{aligned}$$

Řešení

Množina $[\![P]\!]$ je množina všech celých čísel dělitelných číslem 3.

Proto

$$\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]_\rho &= [\![P(f(x,a))]\!]_\rho\\
&= [\![P]\!]([\![f(x,a)]\!]_\rho)\\
&= [\![P]\!]([\![f]\!]([\![x]\!]_\rho, [\![a]\!]))\\
&= [\![P]\!](1+7)\\
&= [\![P]\!](8).
\end{aligned}$$

Jelikož 8 není dělitelné třemi, $[\![\varphi]\!]_\rho = 0$, tedy formule φ není v interpretaci $\mathcal{I}$ a kontextu proměnných ρ pravdivá.

Formule $\psi = \exists x P(f(x,a))$ v dané interpretaci a kontextu proměnných ρ pravdivá je, neboť je formule $P(f(x,a))$ pravdivá například v kontextu $\rho[x := 2]$ (platí, že číslo $2 + 7$ je dělitelné třemi).

Formule (sentence) χ v interpretaci $\mathcal{I}$ a kontextu proměnných ρ také je pravdivá. Pro každé celé číslo totiž existuje takové celé číslo, že jejich součet je dělitelný třemi. Formálně pro každý update $\rho[y := d]$ kontextu ρ musíme ověřit, zda je formule $\exists x P(f(x,y))$ v tomto kontextu pravdivá. K tomu stačí nalézt update $\rho[y := d][x := d']$ takový, aby v něm byla pravdivá formule $P(f(x,y))$. Pro dané číslo d zvolme $d' = -d$. Pak zjevně

$$\begin{aligned}
[\![P(f(x,y))]\!]_{\rho[y:=d][x:=d']} &= [\![P]\!](d+d')\\
&= [\![P]\!](d-d)\\
&= [\![P]\!](0).
\end{aligned}$$

Jelikož je nula dělitelná třemi, ověření je u konce: sentence χ je v intepretaci $\mathcal{I}$ a kontextu proměnných ρ pravdivá.