Hry

Pro následující (dvouhráčové) hry se pokuste nalézt výherní strategii, pokud existuje.

Úloha 1. Máme dva hráče, 12 sirek, hráči se střídají a odebírají jednu až tři sirky. Kdo sebere poslední, vyhrál. (Kdo skončí na tahu s prázdnou kupičkou, prohrál.)

Úloha 2. Máme dvě kupičky sirek, v první je 11, v druhé 13 sirek. Hráči se střídají, v jednom tahu hráč odebere z jedné kupičky libovolný (nenulový) počet sirek. Kdo skončí na tahu s prázdnými kupičkami, prohrál.

Úloha 3 (Empty and divide)**.** Jsou dvě krabičky, jedna obsahuje $m > 0$ kamenů, druhá $n > 0$ kamenů. Hráči se střídají. V jednom tahu hráč vybere krabičku, kterou vyprázdní, a kameny z druhé krabičky rozdělí do obou krabiček tak, aby v každé byl alespoň jeden kámen. Komu zůstalo v obou krabičkách po jednom kameni a je na tahu, prohrál.

Úloha 4 (Chomp!)**.** Hráči začínají s tabulkou čokolády velikosti $m \times n$. Čtvereček $(1, 1)$ je otrávený. Hráči se střídají s odlamováním čokolády: v jednom tahu si hráč vybere čtvereček (i, j) (na kterém ještě je čokoláda), a tím odlomí všechny čtverečky na pozicích (i', j'), kde $i' \geq i$ a $j' \geq j$. Tedy odlomí všechny čtverečky směrem doprava a směrem nahoru od (i, j). Kdo musí odlomit čtvereček $(1, 1)$, prohrál. Konkrétní varianta: 4×7.

Úloha 5. Máme jednu kupičku o 15 sirkách, hráči se střídají, odebírají 1, 3 nebo 4 sirky. Kdo sebere poslední, vyhrál.

Úloha 6 (Náročná)**.** Hra Nim. Máme *tři* kupičky sirek, v první je 5, v druhé 7, a ve třetí 9 sirek. Hráči se střídají, v jednom tahu hráč odebere z jedné kupičky libovolný (nenulový) počet sirek. Vyhrává ten, kdo skončí s prázdnými kupičkami.

Turnaje

Označme jako $U(G)$ neorientovaný graf vzniklý zapomenutím orientace orientovaného grafu G. Pak G nazýváme orientací grafu $U(G)$.

Orientaci úplného grafu nazýváme turnaj. (Myšlenka: každý hraje s každým a už jsou známy výsledky jednotlivých her, určují uspořádání daného úplného grafu.)

Nechť v turnaji T pro vrchol v platí: do každého jiného vrcholu u vede z vrcholu v hrana. Takový vrchol v nazýváme císařem.

Úloha 7. Obsahuje každý turnaj císaře?

Úloha 8. Může turnaj obsahovat dva různé císaře?

Nechť v turnaji T pro vrchol v platí: do každého jiného vrcholu u vede z vrcholu v orientovaná cesta délky 1 nebo 2. Takový vrchol v nazýváme králem.

Úloha 9. Vymyslete dva konkrétní turnaje. Identifikujte případné(ho) krále. Může jich být i více?

Úloha 10. Obsahuje každý turnaj krále?

Úloha 11. Nechť v je král v turnaji T. Je $d_{\text{out}}(v)$ nutně maximální v T?

Úloha 12. Nechť pro v v turnaji T platí $d_{\text{in}}(v) > 0$. Vede do v hrana z nějakého krále v T?

Úloha 13. Vymyslete dva konkrétní turnaje. Ukažte, že obsahují orientovanou hamiltonovskou cestu. (Vysvětlit, co je hamiltonovská cesta.)

Úloha 14. Ukažte, že každý turnaj obsahuje orientovanou hamiltonovskou cestu.

Úloha 15. Mějme turnaj T. Rozhodněte, zda platí některé z následujících tvrzení:

1. Pokud T obsahuje císaře, obsahuje přesně jednoho krále.
2. Pokud T obsahuje přesně jednoho krále, obsahuje císaře.

Úloha 16. Lze sestrojit turnaj T obsahující přesně dva krále?

Úloha 17. Rozhodněte, zda platí: Pokud je T turnaj s alespoň třemi vrcholy neobsahující císaře, pak T obsahuje alespoň tři krále.

Algoritmické úlohy

Úloha 18. Sestrojte několik orientovaných grafů a pokuste se v nich nalézt orientovaný uzavřený eulerovský tah.

Úloha 19. Sestrojte několik acyklických orientovaných grafů a topologicky je očíslujte.