LGR — sémantika výrokové logiky

Matěj Dostál

Úloha 1. V této úloze je množinou atomických formulí množina

$$At = \{a, b, c, d\}.$$

O následujících formulích výrokové logiky rozhodněte, zda jsou tautologiemi, kontradikcemi, a zda jsou splnitelné.

1. $(\neg a \Rightarrow b) \vee ((a \wedge \neg c) \Leftrightarrow b)$.
2. $(a \Rightarrow (b \vee c)) \vee (c \Rightarrow \neg a)$.
3. $((a \Rightarrow b) \wedge c) \vee (a \wedge d)$.

Zakreslete syntaktické stromy těchto formulí.

Řešení. Řešení je natočeno na videích ke cvičení.

Úloha 2. Rozhodněte, zda je množina spojek

1. $\{\neg, \Rightarrow\}$,
2. $\{\top, \Rightarrow\}$,
3. $\{\bot, \Rightarrow\}$,
4. $\{\top, \oplus, \vee\}$,
5. $\{\neg, \oplus, \vee\}$,

úplným systémem logických spojek. (Spojka $\oplus$ značí vylučovací nebo, tedy *xor*.)

Řešení. Řešení prvních třech případů je natočeno na videích ke cvičení.

U čtvrtého zadání si všimněte, že $\varphi \oplus \top \mathrel{\text{⊨⊣}} \neg\varphi$. „Výrazová síla" množiny spojek $\{\top, \oplus, \vee\}$ je tedy nejméně tak silná, jako „výrazová síla" množiny spojek $\{\neg, \vee\}$, to je ale úplný systém logických spojek. Tedy i množina spojek ze zadání tvoří úplný systém.

U pátého zadání si všimněte, že daná množina obsahuje spojky negace a disjunkce, což stačí k tomu, aby tato množina byla úplným systémem logických spojek.

Úloha 3. Matematickou indukcí definujte zkratky

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{a} \quad \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$$

pro každé kladné přirozené číslo n, kde pro každé přirozené i ($1 \leq i \leq n$) je α_i formulí výrokové logiky.

Promyslete, jak by bylo vhodné dodefinovat dané zkratky pro $n = 0$.

Řešení. Tato úloha je řešena ve videu ke cvičení.

Úloha 4. Dokažte matematickou indukcí zobecněné De Morganovy zákony:

1. $$\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \mathrel{\text{⊨⊣}} \bigvee_{i=1}^{n} (\neg\alpha_i),$$

2. $$\neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \mathrel{\text{⊨⊣}} \bigwedge_{i=1}^{n} (\neg\alpha_i).$$

Řešení. Jedna z těchto úloh je řešena ve videu ke cvičení. Druhá se dokazuje duálně.

Úloha 5. Dokažte matematickou indukcí, že první dva níže zapsané zobecněné distributivní zákony platí pro všechna kladná přirozená čísla n. Využijte těchto zákonů k důkazu zbývajících dvou distributivních zákonů. (Pro lepší čitelnost jsou do zápisu připsány velké závorky, které bychom ve skutečnosti psát nemuseli/neměli.)

1. $$\left(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \wedge \beta \mathrel{\text{⊨⊣}} \bigvee_{i=1}^{n} (\alpha_i \wedge \beta),$$

2.
$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\vee\beta \mathrel{\text{⊣⊢}} \bigwedge_{i=1}^{n}(\alpha_i\vee\beta),$$

3.
$$\left(\bigvee_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\wedge\left(\bigvee_{j=1}^{m}\beta_j\right) \mathrel{\text{⊣⊢}} \bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{m}(\alpha_i\wedge\beta_j)\right),$$

4.
$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\vee\left(\bigwedge_{j=1}^{m}\beta_j\right) \mathrel{\text{⊣⊢}} \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{j=1}^{m}(\alpha_i\vee\beta_j)\right).$$

Řešení. Vyřešíme polovinu zadaných podúloh, druhá polovina se řeší duálně.

1. Postupujeme matematickou indukcí podle n.

   Základní krok Ukážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$. Platí
   $$\left(\bigvee_{i=1}^{1}\alpha_i\right)\wedge\beta = \alpha_1\wedge b = \bigvee_{i=1}^{1}(\alpha_i\wedge\beta),$$
   totožné formule jsou samozřejmě sémanticky ekvivalentní.

   Indukční krok Naším indukčním předpokladem bude, že tvrzení platí pro nějaké konkrétní $k \geq 1$. Ukážeme, že pak tvrzení platí i pro $k+1$. Předpokládejme tedy, že $\left(\bigvee_{i=1}^{k}\alpha_i\right)\wedge\beta \mathrel{\text{⊣⊢}} \bigvee_{i=1}^{k}(\alpha_i\wedge\beta)$. Pak
   $$\begin{aligned}\left(\bigvee_{i=1}^{k+1}\alpha_i\right)\wedge\beta &= \left(\bigvee_{i=1}^{k}\alpha_i\vee\alpha_{k+1}\right)\wedge\beta\\ &\mathrel{\text{⊣⊢}} \left(\left(\bigvee_{i=1}^{k}\alpha_i\right)\wedge\beta\right)\vee(\alpha_{k+1}\wedge\beta)\\ &\mathrel{\text{⊣⊢}} \bigvee_{i=1}^{k}(\alpha_i\wedge\beta)\vee(\alpha_{k+1}\wedge\beta)\\ &= \bigvee_{i=1}^{k+1}(\alpha_i\wedge\beta).\end{aligned}$$
   V úpravách postupně používáme
   (a) definici velké disjunkce,
   (b) klasický distributivní zákon,
   (c) indukční předpoklad a větu o substituci,

(d) definici velké disjunkce.

Indukce Principem matematické indukce jsme dokázali, že pro každé kladné přirozené číslo n platí sémantická ekvivalence

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \wedge \beta \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \bigvee_{i=1}^{n} (\alpha_i \wedge \beta).$$

2. Řešení této podúlohy je duální k řešení předchozí podúlohy.

3. Použijeme již dokázaných tvrzení z této úlohy.

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{m} \beta_j\right) &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} \bigvee_{i=1}^{n} (\alpha_i \wedge \bigvee_{j=1}^{m} \beta_j) \\ &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} \bigvee_{i=1}^{n} (\left(\bigvee_{j=1}^{m} \beta_j\right) \wedge \alpha_i) \\ &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m} (\beta_j \wedge \alpha_i)\right) \\ &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m} (\alpha_i \wedge \beta_j)\right)\end{aligned}$$

V úpravách postupně používáme

(a) zobecněný distributivní zákon,

(b) sémantickou komutativitu konjunkce,

(c) zobecněný distributivní zákon a větu o substituci,

(d) sémantickou komutativitu konjunkce a větu o substituci.

4. Řešení této podúlohy je duální k řešení předchozí podúlohy.

Úloha 6. Které zákony pro sémantickou (tautologickou) ekvivalenci formulí se spojkou $\vee$ zůstanou v platnosti, pokud $\vee$ nahradíme spojkou $\oplus$, neboli spojkou "vylučovací nebo"? Bude $\oplus$ splňovat sémantickou idempotenci, absorpci, komutativitu, asociativitu? Bude $\wedge$ sémanticky distributivní vůči $\oplus$ a $\oplus$ sémanticky distributivní vůči $\wedge$?

Řešení. Dané vlastnosti prozkoumáme postupně.

1. Spojka $\oplus$ není sémanticky idempotentní. Platí $\varphi \oplus \varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \bot$.

2. Spojka $\oplus$ by byla sémanticky absorbující, pokud by platilo $\varphi \oplus (\varphi \wedge \psi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi$. To ale neplatí, místo toho platí $\varphi \oplus (\varphi \wedge \psi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi \wedge \neg\psi$.

3. Spojka $\oplus$ je sémanticky komutativní, což lze lehko ověřit. (Sestavte si vhodnou pravdivostní tabulku.)

4. Spojka $\oplus$ je sémanticky asociativní, což lze lehko ověřit.

5. Platí $\varphi \wedge (\psi \oplus \chi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \wedge \psi) \oplus (\varphi \wedge \chi)$? Ano, sestavte pravdivostní tabulku.

6. Platí $\varphi \oplus (\psi \wedge \chi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \oplus \psi) \wedge (\varphi \oplus \chi)$? Obecně ne, uvažujte pravdivostní ohodnocení u, ve kterém platí $u(\varphi) = 1$, $u(\psi) = 0$, $u(\chi) = 1$.

Úloha 7. Dokažte, že pro každou formuli výrokové logiky φ platí:

φ je splnitelná právě tehdy, když $\neg\varphi$ není tautologie.

Řešení. Máme dokázat tvrzení tvaru ekvivalence, kupodivu však není třeba dokazovat oba směry zvlášť.

Nechť φ je formule výrokové logiky. Z definice splnitelnosti plyne, že φ je splnitelná právě tehdy, když existuje pravdivostní ohodnocení u, ve kterém je φ pravdivá (tedy platí $u(\varphi) = 1$). Ale pro každé pravdivostní ohodnocení platí $u(\varphi) = 1$ právě tehdy, když $u(\neg\varphi) = 0$. Formule φ je tedy splnitelná právě tehdy, když existuje pravdivostní ohodnocení u, pro které platí $u(\neg\varphi) = 0$. Takové ohodnocení ale existuje právě tehdy, když $\neg\varphi$ není tautologie.

Úloha 8. Zkuste přijít na co nejvíce co nejrůznorodějších příkladů slov, která jsou

1. sebepopisná (příklad: „čtyřslabičné“),

2. sebenepopisná (příklad: „desetipísmenné“).

Úloha 9. Mějme množinu formulí

$$S = \{a \Rightarrow (b \wedge c), b \Rightarrow (\neg a \vee \neg c)\}.$$

Je S splnitelná?

Výsledky. Tato úloha je řešena ve videu ke cvičení.

Ano, množina S je splnitelná, neboť je pravdivá např. v pravdivostním ohodnocení u, pro které platí $u(a) = 0$, $u(b) = 0$, $u(c) = 0$.

Úloha 10. Mějme množinu formulí

$$T = \{a \vee b, c \vee b, b \Rightarrow (a \wedge b)\}.$$

Platí $T \models b$?

Výsledky. Ne. Svědkem je např. pravdivostní ohodnocení u, pro které platí $u(a) = 1$, $u(b) = 0$, $u(c) = 1$. V tomto ohodnocení je T pravdivá, ale b nepravdivá.

Úloha 11. Pro danou formuli φ nalezněte CNF ψ, která je sémanticky ekvivalentní (tautologicky ekvivalentní) s φ. Pokuste se formuli ψ zjednodušit.

1. $\varphi = (a \wedge b) \oplus (b \vee c)$
2. $\varphi = (a \Rightarrow (b \wedge c)) \oplus (b \Rightarrow (a \vee c))$
3. $\varphi = (a \mid b) \Rightarrow ((a \oplus c) \vee (b \oplus c))$
4. $\varphi = ((a \wedge b) \Rightarrow (b \vee c)) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b)$
5. $\varphi = \neg((a \Leftrightarrow b) \vee (b \wedge c)) \oplus (a \mid b)$

Výsledky. Zde ukazujeme pouze jeden z mnoha možných výsledků.

1. $(\neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee c)$
2. $(a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg c)$
3. $a \vee b \vee c$
4. $\neg a \vee b$
5. $\neg a \wedge (\neg b \vee c)$

Úloha 12. Nalezněte disjunktivní a konjunktivní normální formy následujících Booleových funkcí f, g a h. Proměnné x, y a z representujte atomickými formulemi a, b a c.

x	y	z	f	g	h
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Výsledky. Ke každé funkci uvádím jen jeden z možných tvarů příslušné formule v disjunktivní a konjunktivní normální formě.

Funkce f DNF: $(x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

CNF: $a \wedge (b \vee c)$

Funkce g DNF: $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \vee \neg y \vee \neg z)$

CNF: $(b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b)$

Funkce h DNF: $(\neg a \wedge c) \vee (b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b)$

CNF: $(a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

Úloha 13. Nalezněte negační normální formy (NNF) následujících formulí:

1. $\neg(a \wedge (b \wedge \neg c))$
2. $\neg((a \Rightarrow b) \vee c)$
3. $\neg((a \wedge \neg b) \vee ((a \wedge b) \Rightarrow c))$

Řešení. S jedním možným postupem úprav do negační normální formy:

1. $\neg(a \wedge (b \wedge \neg c)) \mathrel{\text{⫤⊨}} \neg a \vee \neg(b \wedge \neg c) \mathrel{\text{⫤⊨}} \neg a \vee \neg b \vee \neg\neg c \mathrel{\text{⫤⊨}} \neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg((a \Rightarrow b) \vee c) \mathrel{\text{⫤⊨}} \neg(a \Rightarrow b) \wedge \neg c \mathrel{\text{⫤⊨}} (a \wedge \neg b) \wedge \neg c$
3.

$$\begin{aligned}
\neg((a \wedge \neg b) \vee ((a \wedge b) \Rightarrow c))) &\mathrel{\text{⫤⊨}} \neg(a \wedge \neg b) \wedge \neg((a \wedge b) \Rightarrow c) \\
&\mathrel{\text{⫤⊨}} (\neg a \vee \neg\neg b) \wedge ((a \wedge b) \wedge \neg c) \\
&\mathrel{\text{⫤⊨}} (\neg a \vee b) \wedge ((a \wedge b) \wedge \neg c)
\end{aligned}$$

Úloha 14. Ukažte, že platí následující důsledky.

1. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma\} \models \alpha \Rightarrow \gamma$

2. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta\} \models \neg\alpha$ (modus tollens)

3. $\{\alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma\} \models \gamma$

4. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \Rightarrow \neg\beta\} \models \neg\alpha$

5. $\{(a \wedge b) \Rightarrow c, (a \wedge \neg b) \Rightarrow c\} \models a \Rightarrow c$

Řešení. První podúloha je řešena na videu ke cvičení.

K ověření ostatních důsledků můžete využít například generátor pravdivostních tabulek ze stránky `http://logictools.org/prop.html`.

Úloha 15. Ať je $Con(\alpha)$ množina všech sémantických důsledků formule α. Dokažte, že $\alpha \models \beta$ právě tehdy, když $Con(\beta) \subseteq Con(\alpha)$.

Řešení. Uvedeme krátký důkaz opírající se o několik snadných tvrzení. Dokažte je samostatně.

Předpokládejme, že platí $\alpha \models \beta$. Vezměme libovolné $\gamma \in Con(\beta)$. Platí $\beta \models \gamma$. Z *transitivity vztahu* $\models$ *(dokažte)* odvozujeme $\alpha \models \gamma$, a tedy $\gamma \in Con(\alpha)$.

Předpokládejme, že platí $Con(\beta) \subseteq Con(\alpha)$. Jelikož $\beta \models \beta$, platí $\beta \in Con(\beta)$, a proto z předpokladu platí i $\beta \in Con(\alpha)$. To ale znamená, že $\alpha \models \beta$, což jsme měli dokázat.

Úloha 16. Jako vyšetřovatel(ka) znáte následující fakta:

1. Pokud byla Sarah opilá, pak James vraždil nebo Sarah lhala.

2. Určitě nastala alespoň jedna možnost z:

   - James vraždil.
   - Sarah nebyla opilá a vraždilo se o půlnoci.

3. Pokud se vraždilo o půlnoci, tak James vraždil nebo Sarah lhala.

4. Sarah střízlivá nelže.

Dá se na základě těchto fakt zjistit, zda vraždil James?

1. Výše zmíněná fakta a hypotézu formalisujte pomocí výrokové logiky.
2. Zjistěte, zda je tvrzení, že James vraždil, sémantickým důsledkem fakt z vyšetřování.

Úloha 17. Jsme na ostrově, na kterém žijí jen poctivci a padouši. Poctivci mluví vždy pravdu a padouši vždy lžou. Zkuste vyřešit následující hádanky.

1. Tři obyvatelé ostrova, A, B a C si povídají na zahradě. Kolem jde cizinec a ptá se A: „Jste padouch, nebo poctivec?“ A odpoví, ale nezřetelně, takže cizinec neví, co A řekl. Cizinec se nato zeptá B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je padouch.“ V tom okamžiku C řekne: „Nevěřte B, ten lže!“

   Co jsou B a C?

2. Cizinec přijde k dalším třem obyvatelům ostrova. Zeptá se A: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně. Cizinec se zeptá B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“

   Co jsou B a C?

3. Teď máme dva obyvatele ostrova, A a B. A prohlásí: „Alespoň jeden z nás je padouch.“

   Co jsou A a B?

4. Zase máme tři, A, B a C. A a B prohlásí:
   A: „Všichni jsme padouši.“
   B: „Právě jeden z nás je poctivec.“

   Co jsou A, B a C?

5. Co kdyby v předchozím příkladu A a B řekli:
   A: „Všichni jsme padouši.“
   B: „Právě jeden z nás je padouch.“

   Dá se určit, co je B? Dá se určit, co je C?

Úloha 18. Jste na ostrově poctivců a padouchů. Provádíte sčítání (a rozřazování) lidu. To jest, chcete zjistit, kdo je poctivec a kdo padouch.

1. Vstoupíte do prvního domu, otevře vám muž se ženou. Zeptáte se, kdo je kdo, muž odpoví: „Oba jsme padouši.“

2. Vstoupíte do druhého domu, otevřou vám dva muži. Zeptáte se, zda jsou padouši, první muž odpoví: „Alespoň jeden z nás je.“

3. Vstoupíte do třetího domu, otevřou vám dvě ženy. Zeptáte se první, zda je poctivá. Odpoví: „Pokud jsem poctivá, pak je poctivá i má žena.“

4. Vstoupíte do čtvrtého domu, otevře vám muž se ženou. Zeptáte se, co jsou zač. Muž odpoví: „Se ženou jsme jednoho druhu — oba poctivci nebo oba padouši.“