

LGR — pokročilé úlohy na přirozenou dedukci

Úloha 1. Jazyk \mathcal{L} je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned}\text{Pred} &= \{Pes, Vyje, Ma, Kocka, Mys, PSS\}, \\ ar(Pes, Vyje, Kocka, Mys, PSS) &= 1 \\ ar(Ma) &= 2 \\ \text{Func} &= \emptyset, \\ \text{Kons} &= \{jan\}\end{aligned}$$

- Formalisujte v jazyce \mathcal{L} predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka:

φ_1 : Všichni psi vyjí.

φ_2 : Kdokoli, kdo má kočku, nemá žádnou myš.

φ_3 : Kdo má problémy se spaním, nemá nic, co vyje.

φ_4 : Jan má kočku nebo psa.

φ_5 : Pokud má Jan problémy se spaním, nemá žádné myši.

- Přirozenou dedukcí rozhodněte, zda platí logický důsledek

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \vdash \varphi_5.$$

Řešení Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

$$\varphi_1: \forall x(Pes(x) \Rightarrow Vyje(x))$$

$$\varphi_2: \forall x(\exists y(Kocka(y) \wedge Ma(x, y)) \Rightarrow \neg \exists z(Mys(z) \wedge Ma(x, z)))$$

$$\varphi_3: \forall x(PSS(x) \Rightarrow \neg \exists y(Vyje(y) \wedge Ma(x, y)))$$

$$\varphi_4: \exists x (Ma(jan, x) \wedge (Kocka(x) \vee Pes(x)))$$

$$\varphi_5: PSS(jan) \Rightarrow \neg \exists x (Ma(jan, x) \wedge Mys(x))$$

Úloha 2. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce \mathcal{L} predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1 Každý člověk má právo sníst cokoli, co je hloupější než některý vepř.

φ_2 Pašík je vepř chytřejší než jakékoli nemluvně (tj. než všechna nemluvnata).

φ_3 Každý člověk má právo sníst jakékoli nemluvně.

Dokažte, že z formulí φ_1, φ_2 logicky plyne formule φ_3 .

Řešení Náš jazyk \mathcal{L} je dán následující volbou symbolů:

$$\text{Pred} = \{Clouek, Vepř, Nemluvně, MPS, Hloupejsi\},$$

$$ar(Clouek, Vepř, Nemluvně) = 1$$

$$ar(MPS, Hloupejsi) = 2$$

$$\text{Func} = \emptyset,$$

$$\text{Kons} = \{pasik\}$$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

$$\varphi_1: \forall x (Clouek(x) \Rightarrow \forall y ((\exists z (Vepř(z) \wedge Hloupejsi(y, z))) \Rightarrow MPS(x, y)))$$

$$\varphi_2: Vepř(pasik) \wedge \forall x (Nemluvně(x) \Rightarrow Hloupejsi(x, pasik))$$

$$\varphi_3: \forall x (Clouek(x) \Rightarrow \forall y (Nemluvně(y) \Rightarrow MPS(x, y)))$$

Úloha 3. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce \mathcal{L} predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \dots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1 : Každý, kdo kupuje kila mrkve, vlastní králíka nebo obchod.

φ_2 : Každý pes honí nějakého králíka.

φ_3 : Marie kupuje kila mrkve.

φ_4 : Každý, kdo vlastní králíka, nenávidí cokoli, co honí nějakého králíka.

φ_5 : Jan vlastní psa.

φ_6 : Jakmile někdo nenávidí něco, co vlastní někdo další, bude s ním odmítat chodit. (Pro každého x , který nenávidí y , které je vlastněno nějakým z , platí, že x bude odmítat chodit se z .)

φ_7 : Pokud Marie nevlastní obchod, bude odmítat chodit s Janem.

Predikát „kupovat kila mrkve“ můžete deklarovat jako unární. Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ logicky plyne formule φ_7 .

Řešení Náš jazyk \mathcal{L} je dán následující volbou symbolů:

$\text{Pred} = \{Kralik, Pes, Obchod, KKM, Vlastni, Nenavidi, Honi, OdmitaChoditS\},$
 $ar(Kralik, Pes, Obchod, KKM) = 1$
 $ar(KKM, Vlastni, Nenavidi, Honi, OdmitaChoditS) = 2$

$\text{Func} = \emptyset,$

$\text{Kons} = \{jan, marie\}$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

$\varphi_1: \forall x(KKM(x) \Rightarrow \exists y((Kralik(y) \vee Obchod(y)) \wedge Vlastni(x, y)))$

$\varphi_2: \forall x(Pes(x) \Rightarrow \exists y(Kralik(y) \wedge Honi(x, y)))$

$\varphi_3: KKM(marie)$

$\varphi_4: \forall x(\exists y(Kralik(y) \wedge Vlastni(x, y)) \Rightarrow \forall z(\exists k(Kralik(k) \wedge Honi(z, k)) \Rightarrow Nenavidi(x, z)))$

$\varphi_5: \exists x(Pes(x) \wedge Vlastni(jan, x))$

$\varphi_6: \forall x \forall y \forall z((Nenavidi(x, y) \wedge Vlastni(z, y)) \Rightarrow OdmitaChoditS(x, z))$

$\varphi_7: (\neg \exists x(Obchod(x) \wedge Vlastni(marie, x))) \Rightarrow OdmitaChoditS(marie, jan)$

Úloha 4. Formalisujte ve vhodně zvoleném jazyce \mathcal{L} predikátové logiky následující věty přirozeného jazyka, a výsledné formule označte $\varphi_1, \dots, \varphi_7$, jak je naznačeno vždy nalevo od zadané věty:

φ_1 : Každý, kdo vynikne na zkoušce, poctivě studuje, je génius nebo má štěstí.

φ_2 : Každý, kdo dostane A, vynikne na zkoušce.

φ_3 : Žádný student OI nemá štěstí.

φ_4 : Každý, kdo pije pivo, nestuduje.

φ_5 : Pokud každý student OI dostane A, pak je každý student OI, který pije pivo, génius.

Dokažte, že z formulí $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ logicky plyne formule φ_5 .

Řešení Náš jazyk \mathcal{L} je dán následující volbou symbolů:

$$\begin{aligned} \text{Pred} &= \{VNZ, PS, Genius, MS, DA, OI, PP\}, \\ \text{ar}(VNZ, PS, Genius, MS, DA, OI, PP) &= 1\text{Func} = \emptyset, \\ \text{Kons} &= \emptyset \end{aligned}$$

Předvedeme jednu možnou formalisaci daných vět.

$$\varphi_1: \forall x(VNZ(x) \Rightarrow ((PS(x) \vee Genius(x)) \vee MS(x)))$$

$$\varphi_2: \forall x(DA(x) \Rightarrow VNZ(x))$$

$$\varphi_3: \neg \exists x(OI(x) \wedge MS(x))$$

$$\varphi_4: \forall x(PP(x) \Rightarrow \neg PS(x))$$

$$\varphi_5: (\forall x(OI(x) \Rightarrow DA(x))) \Rightarrow (\forall x((OI(x) \wedge PP(x)) \Rightarrow Genius(x)))$$

Úloha 5. Přirozenou dedukcí ukažte, že platí následující důsledek.

$$\begin{aligned} &\forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(K(y) \Rightarrow V(x, y))), \\ &\quad \exists x(K(x) \wedge \forall y(O(y) \Rightarrow V(x, y))), \\ &\forall x \forall y \forall z((V(x, y) \wedge V(y, z)) \Rightarrow V(x, z)) \\ &\vdash \forall x(S(x) \Rightarrow \forall y(O(y) \Rightarrow V(x, y))). \end{aligned}$$

(Každý slon váží více než jakýkoli kůň. Nějaký kůň váží více než jakýkoli osel. Vážit více je transitivní vztah. Proto každý slon váží více než jakýkoli osel.)

Můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny výše napsané řetězce sentencemi.

Úloha 6. Přírozenou dedukcí ukažte, že platí následující důsledek.

$$\forall x(K(x) \Rightarrow Z(x)) \vdash \forall x(\exists y(K(y) \wedge O(x, y)) \Rightarrow \exists y(Z(y) \wedge O(x, y)))$$

(Koně jsou zvířata. Proto ocas koně je ocasem zvířete.)

Můžete předpokládat, že pracujeme s jazykem predikátové logiky, ve kterém jsou všechny výše napsané řetězce sentencemi.