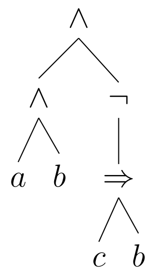
Úloha (1 bod) Zakreslete syntaktický strom následující formule φ výrokové logiky:

$$\varphi = ((a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \wedge (a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$$

Zapište formuli ψ výrokové logiky danou následujícím syntaktickým stromem:



Úloha (1 bod) Rozhodněte, které z následujících formulí výrokové logiky jsou *splnitelné*:

1. $(a \Rightarrow b) \wedge \neg(a \vee b)$.
2. $\neg(\neg a \vee \neg(b \wedge c))$.
3. $(a \vee b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)$.
4. $((a \vee b) \vee c) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$.
5. $\bot \vee (a \Rightarrow \bot)$.

Úloha (2 body) Rozhodněte, které z následujících formulí výrokové logiky jsou *splnitelné*:

1. $(\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$.
2. $(a \Rightarrow \neg b) \wedge (\neg b \Rightarrow \neg a)$.
3. $(a \wedge b) \Rightarrow (\neg b \vee a)$.
4. $\bot \Rightarrow \bot$.
5. $((a \vee b) \vee \neg c) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$.

Úloha (2 body) Rozhodněte, které z následujících formulí výrokové logiky jsou *kontradikce*:

1. $\bot \vee (a \wedge \neg a)$.
2. $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow \neg a)$.
3. $b \Rightarrow (a \wedge (b \Rightarrow \bot))$.
4. $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$.
5. $(a \Leftrightarrow b) \wedge (\neg b \vee \neg a)$.

Úloha (2 body) Rozhodněte, které z následujících formulí jsou sémanticky ekvivalentní formuli $(a \vee b) \Rightarrow \neg c$.

1. $c \Rightarrow \neg(a \vee b)$.
2. $(a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow c$.
3. $\neg c \Rightarrow (a \vee b)$.
4. $((a \vee b) \vee \ c)$.
5. $c \Rightarrow (a \wedge \ b)$.

Úloha (2 body) Je dána množina formulí výrokové logiky

$$M = \{(a \wedge b) \Rightarrow b, \quad (c \vee \neg c), \quad (b \vee a) \Rightarrow \neg c\}.$$

Rozhodněte, které z následujících formulí jsou sémantickým důsledkem množiny M.

1. $c \Rightarrow \neg b$.
2. $b \Rightarrow (a \wedge b)$.
3. $a \Rightarrow (\neg b \vee c)$.
4. $\neg c \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$.
5. $(\neg c \vee \neg\neg c)$.

Úloha (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pred} &= \{P, Q, R\}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2,\\ \mathsf{Func} &= \{f\}, ar(f) = 1,\\ \mathsf{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Jsou dány formule predikátové logiky $\varphi = \forall x R(x, y)$ a $\psi = \exists y R(x, f(y))$ (kde x, y a z jsou proměnné). Dále je term s definován jako $f(f(x))$ a term t jako proměnná y. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

1. Term t je volný pro proměnnou x ve formuli φ.
2. Term t je volný pro proměnnou y ve formuli φ.
3. Term t je volný pro proměnnou x ve formuli ψ.
4. Term t je volný pro proměnnou y ve formuli ψ.
5. Term s je volný pro proměnnou x ve formuli ψ.

Úloha (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pred} &= \{P, Q, R\}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2,\\ \mathsf{Func} &= \{f\}, ar(f) = 1,\\ \mathsf{Kons} &= \{a\}.\end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned}U &= \mathbb{N}\\ [\![P]\!] &= \{0, 3, 12\}\\ [\![Q]\!] &= \{4 \cdot z \mid z \in \mathbb{N}\}\\ [\![R]\!] &= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}\\ [\![f]\!] &: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\ & n \mapsto n + 5\\ [\![a]\!] &= 2\end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow P(x))$.
2. $\exists x R(a,x)$.
3. $\exists x (P(x) \wedge \forall y (Q(y) \Rightarrow R(x,y)))$.
4. $\forall x \exists y (R(x,y) \wedge P(f(x)))$.
5. $\exists y \forall x (Q(x) \Rightarrow R(y, f(x)))$.

Úloha (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \mathsf{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \mathsf{Kons} &= \{a\}. \end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně:

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R} \\ [\![P]\!] &= \{-5, \frac{1}{5}\} \\ [\![R]\!] &= \{(m,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid m < n\} \\ [\![g]\!] &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (m,n) \mapsto m \cdot n \\ [\![a]\!] &= -1 \end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $R(a, g(a,a))$.
2. $\forall x (P(x) \Rightarrow R(a,x))$.
3. $\exists x (P(x) \wedge R(a, g(x,x)))$.
4. $\forall x (R(x,a) \Rightarrow \exists z (R(g(a,z), x)))$.
5. $\exists y \forall x (P(x) \Rightarrow R(g(y,y), x))$.

Úloha (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P, Q, R\}, ar(P) = ar(Q) = 1, ar(R) = 2, \\ \mathsf{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \mathsf{Kons} &= \{a\}. \end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně (*připomenutí*: 0 je přirozené číslo):

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{Z} \\ [\![P]\!] &= \{-5, 3, 13\} \\ [\![Q]\!] &= \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\} \\ [\![R]\!] &= \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \leq n\} \\ [\![g]\!] &: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ & (m,n) \mapsto m - n \\ [\![a]\!] &= 2 \end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $Q(a)$.
2. $\exists y(P(y) \wedge \neg Q(g(a, y)))$.
3. $\forall x \forall y \forall z\ g(x, g(y, z)) = g(g(x, y), z)$.
4. $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow Q(g(x, y)))$.
5. $\forall x(Q(x) \Rightarrow \exists y(P(y) \wedge Q(g(x, y))))$.

Úloha (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P, Q\}, ar(P) = 1, ar(Q) = 1, \\ \mathsf{Func} &= \{g\}, ar(g) = 2, \\ \mathsf{Kons} &= \{a\}. \end{aligned}$$

Interpretace I jazyka L je dána následovně:

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{Q} \\ [\![P]\!] &= \{0, -3, 6\} \\ [\![Q]\!] &= \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\} \\ [\![g]\!] &: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \\ &\quad (m, n) \mapsto m \cdot n \\ [\![a]\!] &= 3 \end{aligned}$$

Rozhodněte, které ze sentencí níže jsou v interpretaci I pravdivé.

1. $\exists x P(g(a, x))$.
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow P(g(a, x)))$.
3. $\forall x \exists y Q(g(x, y))$.
4. $\exists y \forall x Q(g(x, y))$.
5. $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow \exists z(Q(g(x, g(y, z))))))$.

Úloha (2 body) Rozhodněte, které z následujících sentencí predikátové logiky jsou tautologie. Jazyk predikátové logiky v této úloze neobsahuje žádné predikátové, funkční, ani konstantní symboly.

1. $\forall x \exists y(x = y)$.
2. $\exists y \forall x(x = y)$.
3. $\forall x \forall y(x = y)$.
4. $\exists x \exists y(x = y)$.
5. $\forall y \exists x(x = y)$.

Úloha (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{S\}, ar(S) = 2, \\ \mathsf{Func} &= \{\}, \\ \mathsf{Kons} &= \{\}. \end{aligned}$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\forall x \forall y(S(x, y) \Rightarrow \exists z(S(z, x) \wedge S(y, z)))$ pravdivá?

1. $U = \emptyset$, $[\![S]\!] = \emptyset$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $[\![S]\!] = U \times U$.
3. $U = \mathbb{Z}$, $[\![S]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m < n\}$.
4. $U = \mathbb{N}$, $[\![S]\!] = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. $U = \mathbb{N}$, $[\![S]\!] = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Úloha (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{R\}, ar(R) = 2, \\ \mathsf{Func} &= \{\}, \\ \mathsf{Kons} &= \{a\}. \end{aligned}$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\forall x(R(a, x) \Rightarrow \exists y(R(a, y) \wedge R(y, x)))$ pravdivá?

1. $U = \{1, 2\}$, $[\![R]\!] = \{(1, 2), (2, 2)\}$, $[\![a]\!] = 2$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $[\![R]\!] = U \times U$, $[\![a]\!] = 1$.
3. $U = \mathbb{N}$, $[\![R]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$, $[\![a]\!] = 3$.
4. $U = \mathbb{Q}$, $[\![R]\!] = \{(0, q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$, $[\![a]\!] = 0$.
5. $U = \mathbb{R}$, $[\![R]\!] = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid r \leq s\}$, $[\![a]\!] = -1$.

Úloha (2 body) Jazyk L predikátové logiky je dán následovně:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pred} &= \{P, R\}, ar(P) = 1, ar(R) = 2, \\ \mathsf{Func} &= \{\}, \\ \mathsf{Kons} &= \{\}. \end{aligned}$$

Ve kterých interpretacích jazyka L je sentence $\exists x(P(x) \wedge \forall y R(x, y))$ pravdivá?

1. $U = \{1, 2\}$, $[\![P]\!] = \{2\}$, $[\![R]\!] = \{(1, 2), (2, 2)\}$.
2. $U = \{1, 2, 3\}$, $[\![P]\!] = \emptyset$, $[\![R]\!] = U \times U$.
3. $U = \mathbb{N}$, $[\![P]\!] = \mathbb{N}$, $[\![R]\!] = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m < n\}$.
4. $U = \mathbb{Q}$, $[\![P]\!] = \{-1, 0, 1\}$, $[\![R]\!] = \{(0, q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$.
5. $U = \{1, 2, 3\}$, $[\![P]\!] = \{2, 3\}$, $[\![R]\!] = \{(m, n) \in U \times U \mid m \leq n\}$.

Úloha (2 body) O prostém neorientovaném grafu G bez smyček jste se dozvěděli, že má 16 vrcholů a 14 hran. Která z následujících tvrzení o něm nutně platí?

1. G není souvislý.
2. G je graf bez kružnic s přesně dvěma komponentami souvislosti.
3. G obsahuje alespoň jednu kružnici.
4. G má barevnost maximálně 3.
5. V G existuje neorientovaná cesta délky 2.

Úloha (2 body) Neorientovaný graf G je dán šestiprvkovou množinou vrcholů $V = \{a, b, c, x, y, z\}$ a množinou hran, která je popsána následujícím seznamem:

hrana	$\{a,b\}$	$\{a,x\}$	$\{a,z\}$	$\{b,c\}$	$\{b,x\}$	$\{c,y\}$	$\{c,z\}$

Rozhodněte, která tvrzení o grafu G platí:

1. G je souvislý.
2. G je eulerovský.
3. G má barevnost 2.
4. G neobsahuje kružnice.
5. G obsahuje nějakou tříprvkovou nezávislou množinu vrcholů.

Úloha (2 body) Neorientovaný graf G je dán šestiprvkovou množinou vrcholů $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ a množinou hran, která je popsána následujícím seznamem:

hrana	$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{2,4\}$	$\{2,6\}$	$\{3,5\}$	$\{4,5\}$	$\{4,6\}$

Rozhodněte, která tvrzení o grafu G platí:

1. G obsahuje kružnici o čtyřech vrcholech.
2. G lze nakreslit jedním otevřeným tahem.
3. G má kostru.
4. G má barevnost 4.
5. G má nezávislost 4.

Úloha (2 body) Orientovaný graf G je dán šestiprvkovou množinou vrcholů $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ a množinou hran, která je popsána následujícím seznamem (zápis (m,n) označuje hranu orientovanou z m do n):

hrana	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(3,6)$	$(6,1)$

Rozhodněte, která tvrzení o grafu G platí:

1. G je acyklický.
2. G je silně souvislý.
3. G je strom.
4. G obsahuje kořen.
5. G je souvislý.

Úloha (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení o *neorientovaných* grafech jsou pravdivá:

1. Každý graf obsahuje nějakou kliku.
2. Existuje graf, který má přesně jednu kostru.
3. Každý souvislý graf, který obsahuje alespoň jednu kružnici, má více hran než vrcholů.

4. Existuje graf, který nemá žádný podgraf.
5. Každý graf, který má nezávislost 7, má alespoň 7 hran.

Úloha 5 (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení o *obyčejných neorientovaných* grafech jsou pravdivá. (*Obyčejný graf neobsahuje paralelní hrany ani smyčky.*)

1. Existuje strom, který nemá kostru.
2. Každý souvislý graf, který má méně hran než vrcholů, je strom.
3. Každý graf obsahuje nějakou nezávislou množinu vrcholů.
4. Každý strom, který má 20 vrcholů stupně 2, obsahuje alespoň 18 listů.
5. Každý graf, ve kterém mají všechny vrcholy stupeň 2, je souvislý.

Úloha (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Lze zkonstruovat graf o 12 vrcholech, který má klikovost 5 a nezávislost 8.
2. Každý graf s barevností 6 má nezávislost alespoň 6.
3. Pokud algoritmus sekvenčního barvení obarvil graf G osmi barvami, pak jeho barevnost nemůže být menší než 4.
4. Každý graf s klikovostí 5 má barevnost 5.
5. Existují alespoň dva neisomorfní grafy se čtyřmi vrcholy, které mají barevnost 3.

Úloha (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý silně souvislý orientovaný graf obsahuje cyklus.
2. Každý orientovaný graf o 10 vrcholech, který má přesně dvě silně souvislé komponenty, obsahuje alespoň 11 hran.
3. Každý orientovaný graf G má více vrcholů, než má kondensace grafu G.
4. Pro každý orientovaný graf G platí: Pokud je každá hrana v G součástí nějakého cyklu, pak je G silně souvislý.
5. Žádný acyklický graf není silně souvislý.

Úloha (2 body) Je dán orientovaný graf H, o kterém víte jen to, že je acyklický a že má 7 vrcholů. Která z následujících tvrzení o něm nutně platí také?

1. H není silně souvislý.
2. H má alespoň 6 hran.
3. H je (brán jako neorientovaný graf) souvislý.
4. H obsahuje nějaký vrchol v, pro který platí $d_{out}(v) = 0$.
5. H obsahuje nějaký vrchol u, pro který platí $d_{in}(u) > 0$.

Úloha (2 body) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

1. Každý orientovaný graf, který obsahuje kružnici, obsahuje i cyklus.
2. Každý orientovaný graf, který je acyklický a má n vrcholů, má i n silně souvislých komponent.
3. Každý strom, který je orientovaný, má kořen.
4. Každý orientovaný graf, který má kořen, je silně souvislý.
5. Každý orientovaný graf, který je silně souvislý, má kořen.