

Sémantika výrokové logiky

Obsah

Sémantika výrokové logiky

Pravdivostní ohodnocení

Splnitelnost, tautologie, kontradikce

Sémantická ekvivalence

Negační normální forma

Sémantický důsledek

Sémantika výrokové logiky - pravdivostní hodnoty

Sémantika přiřazuje formulím (syntaktickým objektům) **význam**.
Ve výrokové logice vyhodnocuje **pravdivost** formulí.

Booleovské (pravdivostní) hodnoty

Pravdu značíme jako **1**, **nepravdu** jako **0**.

Množinu pravdivostních hodnot označujeme jako $\text{Bool} = \{0, 1\}$.

Pravdivostní ohodnocení formulí bude speciální funkce typu

$$u : \text{Fm}(At) \rightarrow \text{Bool}.$$

- ▶ Pravdivost formule závisí na pravdivosti jejích částí.
- ▶ Je nutno znát (či zadat) pravdivost atomických formulí.

Sémantika výrokové logiky - logické spojky

Funkce typu $\text{Bool}^n \rightarrow \text{Bool}$ ($n \in \mathbb{N}$) se nazývá **booleovská funkce**. Význam logických spojek a konstant je dán booleovskými funkcemi (pravdivostními tabulkami):

vstup 1	vstup 2	$\llbracket \wedge \rrbracket$	$\llbracket \vee \rrbracket$	$\llbracket \Rightarrow \rrbracket$	$\llbracket \Leftrightarrow \rrbracket$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

vstup 1	$\llbracket \neg \rrbracket$
0	1
1	0

$\llbracket \top \rrbracket$	$\llbracket \perp \rrbracket$
1	0

Sémantika výrokové logiky - pravdivostní ohodnocení

Pravdivostní ohodnocení

Pravdivostní ohodnocení u je zobrazení $u: \text{Fm}(At) \rightarrow \text{Bool}$ respektující sémantiku logických spojek, tj., splňující:

- ▶ $u(\top) = \llbracket \top \rrbracket = 1.$
- ▶ $u(\perp) = \llbracket \perp \rrbracket = 0.$
- ▶ $u(\neg\alpha) = \llbracket \neg \rrbracket(u(\alpha)).$
- ▶ $u(\alpha \wedge \beta) = \llbracket \wedge \rrbracket(u(\alpha), u(\beta)).$
- ▶ $u(\alpha \vee \beta) = \llbracket \vee \rrbracket(u(\alpha), u(\beta)).$
- ▶ $u(\alpha \Rightarrow \beta) = \llbracket \Rightarrow \rrbracket(u(\alpha), u(\beta)).$
- ▶ $u(\alpha \Leftrightarrow \beta) = \llbracket \Leftrightarrow \rrbracket(u(\alpha), u(\beta)).$

$u(\alpha) = 1$ znamená, že *formule α je pravdivá v ohodnocení u ,*
 $u(\alpha) = 0$ znamená, že *formule α je nepravdivá v ohodnocení u .*

Sémantika výrokové logiky - pravdivostní ohodnocení

Tvrzení

Každé pravdivostní ohodnocení $u : \text{Fm}(At) \rightarrow \text{Bool}$ je jednoznačně určeno svými hodnotami na atomických formulích $a \in At$.

To jest: k zadání pravdivostního ohodnocení $u : \text{Fm}(At) \rightarrow \text{Bool}$ stačí zadat zobrazení $u_{At} : At \rightarrow \text{Bool}$ (ohodnocení atomických formulí).

Důsledek

Máme-li $|At| = n$ atomických formulí, pak počet všech různých pravdivostních ohodnocení je 2^n .

Pravdivostní hodnoty formule o n logických proměnných ve všech různých ohodnoceních lze zapsat do tabulky o 2^n řádcích. Každý řádek reprezentuje jiné ohodnocení.

Sémantika výrokové logiky - splnitelnost

Definice

Formule $\varphi \in \text{Fm}(At)$ se nazývá

- ▶ **splnitelná formule**, jestliže je pravdivá v alespoň jednom ohodnocení,
- ▶ **tautologie**, jestliže je pravdivá ve všech ohodnoceních,
- ▶ **kontradikce**, jestliže není pravdivá v žádném ohodnocení.

Příklad

Formule $\varphi = (a \wedge b) \Rightarrow (b \wedge c)$ je splnitelná, protože je pravdivá např. v ohodnocení u daném hodnotami

$$u(a) = u(c) = 0, \quad u(b) = 1.$$

Formule φ však není tautologie, svědkem je ohodnocení \tilde{u} dané hodnotami $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 1, \quad \tilde{u}(c) = 0$, v němž je $\tilde{u}(\varphi) = 0$.

Sémantika výrokové logiky - splnitelnost

Definice

Množina formulí S se nazývá **splnitelná**, pokud existuje **alespoň jedno** pravdivostní ohodnocení u , ve kterém jsou pravdivé všechny formule $\varphi \in S$ (najednou). Jinak ji nazveme **nesplnitelnou**.

Příklad

Množina $S = \{a \Rightarrow b, \neg b\}$ je splnitelná. Svědkem splnitelnosti je ohodnocení u , pro které platí $u(a) = 0$, $u(b) = 0$.

Příklad

Množina $S = \{a \vee b, \neg a, \neg b\}$ je nesplnitelná. Přitom každá jednotlivá formule z S je splnitelná.

Sémantika výrokové logiky - sémantická ekvivalence

Definice

Řekneme, že formule φ a ψ jsou **sémanticky ekvivalentní**, jestliže pro každé ohodnocení u platí $u(\varphi) = u(\psi)$. Značíme

$$\varphi \vDash \psi.$$

Definice

Mějme formuli $\varphi \in \text{Fm}(At)$. Její **význam** je její pravdivostní tabulka: booleovská funkce

$$\llbracket \varphi \rrbracket : \text{Bool}^{At} \rightarrow \text{Bool}$$

$$u_{At} \mapsto u(\varphi).$$

Sémantika výrokové logiky - sémantická ekvivalence

Poznámka

Formule φ a ψ jsou sémanticky ekvivalentní, pokud mají stejný význam: to jest, pokud $\llbracket \varphi \rrbracket = \llbracket \psi \rrbracket$ (pravdivostní tabulky φ a ψ se shodují).

Příklad

$$a \Rightarrow b \vDash \neg a \vee b.$$

Tvrzení

Sémantická ekvivalence je **relace ekvivalence** na množině $\text{Fm}(At)$.
To jest: necht' $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Fm}(At)$. Pak

- ▶ $\alpha \vDash \alpha$ (reflexivita).
- ▶ Pokud $\alpha \vDash \beta$, pak $\beta \vDash \alpha$ (symetrie).
- ▶ Pokud $\alpha \vDash \beta$ a $\beta \vDash \gamma$, pak $\alpha \vDash \gamma$ (transitivita).

Sémantika výrokové logiky - substituce

Tvrzení

Jsou-li α , β , γ a δ formule splňující $\alpha \models \gamma$ a $\beta \models \delta$, pak platí

- ▶ $\neg\alpha \models \neg\gamma$
- ▶ $(\alpha \circ \beta) \models (\gamma \circ \delta)$, kde \circ označuje libovolnou binární spojku.

Sémantická ekvivalence respektuje logické spojky.

Můžeme substituovat podformule za sémanticky ekvivalentní podformule a neporušíme sémantickou ekvivalenci.

Příklad

Jelikož platí $a \Rightarrow b \models \neg a \vee b$ a $c \models c$, platí i

$$(a \Rightarrow b) \vee c \models (\neg a \vee b) \vee c.$$

Sémantika výrokové logiky - jak „negovat“ tvrzení?

Jak převádět tvrzení v „negativním“ tvaru do „pozitivního“ tvaru?

- ▶ „Není pravda, že není pravda, že prší.“
- ▶ „Není pravda, že jsem byl v klubu a propil nájemné.“

Chceme převádět formule tvaru $\neg\varphi$ na sémanticky ekvivalentní formule, jejichž hlavní spojka není negace.

- ▶ $\neg\top \vDash \perp$, $\neg\perp \vDash \top$
- ▶ $\neg\neg\varphi \vDash \varphi$
- ▶ $\neg(\varphi \wedge \psi) \vDash \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \vDash \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- ▶ $\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \vDash \varphi \wedge \neg\psi$
- ▶ $\neg(\varphi \Leftrightarrow \psi) \vDash (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$

Sémantika výrokové logiky - negační normální forma

Definice

Literál je buď atomická formule, nebo její negace.

$$L ::= a \mid \neg a, \quad a \in At$$

Definice

Formule $\varphi \in \text{Fm}(At)$ je v **negační normální formě**, pokud byla syntakticky sestavena z literálů bez použití spojky negace.

$$N ::= L \mid \top \mid \perp \mid N \wedge N \mid N \vee N \mid N \Rightarrow N \mid N \Leftrightarrow N$$

Tvrzení

Každá formule je sémanticky ekvivalentní nějaké formuli v negační normální formě.