Sémantika predikátové logiky

Sémantika predikátové logiky

Interpretace predikátové logiky s predikátovými symboly Pred, konstantními symboly Kons a funkčními symboly Func je dvojice $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, kde

- U je množina nazývaná universum;
- $[\![-]\!]$ je přiřazení, které
  1. každému $P \in$ Pred arity $n > 0$ přiřazuje podmnožinu U^n a každému $P \in$ Pred arity 0 přiřazuje 0 nebo 1, značíme $[\![P]\!]$
  2. každému konstantnímu symbolu $a \in$ Kons přiřazuje prvek z U, značíme jej $[\![a]\!]$,
  3. každému funkčnímu symbolu $f \in$ Func arity n přiřazuje zobrazení množiny U^n do U, značíme $[\![f]\!]$.

Sémantika predikátové logiky

Kontext proměnných

Dána interpretace $\langle U, [\![-]\!] \rangle$. Kontext proměnných je parciální zobrazení

$$\rho : \mathsf{Var} \rightharpoonup U.$$

Definiční obor kontextu ρ (množinu proměnných v kontextu) značíme D.
Kontext ρ ztotožňujeme s (totálním) zobrazením $\rho : D \to U$.

Sémantika predikátové logiky

Update kontextu proměnných.
Je-li ρ kontext proměnných, $x \in \mathsf{Var}$ a $d \in U$, pak kontext

$$\begin{aligned} \rho[x := d] : \mathsf{Var} &\rightharpoonup U \\ y &\mapsto \rho(y) \ \ (\text{pro } y \neq x, \text{ pokud definováno}) \\ x &\mapsto d \end{aligned}$$

nazýváme update kontextu ρ o hodnotu d v x.

Sémantika predikátové logiky

Interpretace termů při daném kontextu proměnných.

Pro danou $\langle U, [\![-]\!]\rangle$ a $\rho : D \to U$ interpretujeme termy v proměnných D následovně:

- Je-li term proměnná x, pak jeho hodnota je $[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$.
- Je-li term $a \in \mathrm{Kons}$, pak jeho hodnota je $[\![a]\!]_\rho = [\![a]\!]$.
- Je-li $f(t_1, \ldots, t_n)$ term, pak jeho hodnota je

$$[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_\rho = [\![f]\!]([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho).$$

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v dané interpretaci a kontextu.

Nechť $P \in \mathrm{Pred}$ je kladné arity, $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy v proměnných D. Atomickou formuli

$$\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$$

nazveme pravdivou v interpretaci $\langle U, [\![-]\!] \rangle$ a kontextu $\rho : D \to U$ v případě, kdy

$$([\![t_1]\!]_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]_\rho) \in [\![P]\!].$$

Je-li $P \in \mathrm{Pred}$, arity 0, pak je P pravdivá , pokud $[\![P]\!] = 1$.

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v dané interpretaci a kontextu.

Jsou-li φ a ψ formule, jejichž pravdivost v interpretaci $\langle U, [\![-]\!] \rangle$ a kontextu ρ již známe, pak

- $\bot$ je nepravdivá, $\top$ je pravdivá.
- $\neg\varphi$ je pravdivá právě tehdy, když φ není pravdivá.
- $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou pravdivé.
- $\varphi \vee \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou nepravdivé.
- $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ je pravdivá a ψ je nepravdivá.
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule φ a ψ jsou pravdivé, nebo obě formule φ a ψ jsou nepravdivé.

Sémantika predikátové logiky

Pravdivost formule v dané interpretaci a kontextu.

Je-li φ formule a x proměnná, pak

- $\forall x\, \varphi$ je pravdivá právě tehdy, když formule φ je pravdivá v každém kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U.
- $\exists x\, \varphi$ je pravdivá právě tehdy, když formule φ je pravdivá v alespoň jednom kontextu $\rho[x := d]$, kde d je prvek U.

Sémantika predikátové logiky

Pravdivostní hodnota sentence.

Sentence φ je pravdivá v interpretaci $\langle U, [\![-]\!] \rangle$, jestliže je pravdivá v prázdném kontextu proměnných

$$\rho : \emptyset \to U.$$

Model sentence.

Interpretace $\langle U, [\![-]\!] \rangle$, ve které je sentence φ pravdivá, se nazývá model sentence φ.