

VÝPOČETNÍ GEOMETRIE

Petr Ryšavý

11. prosince 2025

Katedra počítačů, FEL, ČVUT

KONVEXNÍ OBÁLKA

UVA 218 - Moth Eradication

Definice Necht' $S \subset \mathbb{R}^2$ je množina bodů v rovině. **Konvexní obálka** množiny S je nejmenší možná konvexní množina taková, že obsahuje S

Neformálně řečeno, jde o natažený gumový provaz, který obepíná všechny body S .

- Začneme bodem nejvíce vlevo, ten je určitě v obálce
- Půjdeme bod po bodu a budeme hledat vždy bod, který musí být z konvexní obálky
- Podobné navíjení provázku na body (někdy se tomuto říká *provázkový algoritmus*)
- Běží až $\mathcal{O}(n^2)$

- Seřadíme body podle x -ové souřadnice
- Tvoříme „horní“ a „dolní“ obálku - potkají se v bodu nejvíce vlevo a nejvíce vpravo
- Uvažme horní obálku - přidáme vždy další bod a kontrolujeme, zda jde o konvexní útvar
- Případně vyhodíme existující bod
- Horní obálka se musí stáčet vpravo

Jak ověřit zda je trojice bodů orientovaná vpravo

- Pomůže lineární algebra
- Uvažme trojici bodů p_{-2}, p_{-1}, p
- Necht' $(x_1, y_1) = p_{-1} - p_{-2}$ a necht' $(x_2, y_2) = p - p_{-1}$.
- Trojice je levotočivá (a ne kolineární), pokud

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0.$$

- (V následujícím slide je jiná, ale obdobná podmínka).

Pseudokód (Andrew's Monotone Chain)

function CONVEX-HULL(S)

$P \leftarrow \text{SORT-LEXICOGRAPHICALLY}(S)$

$l \leftarrow \text{empty stack}$

▷ Dolní obálka

for p **do** P

while $\text{LENGHT}(l) \geq 2 \wedge \text{CROSS}(l[-2], l[-1], p) \leq 0$ **do** $\text{POP}(l)$

end while

$\text{PUSH}(p, l)$

end for

$\text{POP}(l)$

▷ Abychom neměli poslední bod dvakrát

$u \leftarrow \text{empty stack}$

▷ Horní obálka

for each p **in** $\text{REVERSE}(P)$ **do**

while $\text{LENGHT}(u) \geq 2 \wedge \text{CROSS}(u[-2], u[-1], p) \leq 0$ **do** $\text{POP}(u)$

end while

$\text{PUSH}(p, u)$

end for

$\text{POP}(u)$

▷ Abychom neměli poslední bod dvakrát

return $\text{CONCATENATE}(l, u)$

end function

function CROSS(o, a, b)

return $(a.x - o.x) \cdot (b.y - o.y) - (a.y - o.y) \cdot (b.x - o.x)$

end function

- Nejdražší je řazení v $\mathcal{O}(n \log n)$
- Je důležité si uvědomit, že každý bod je maximálně jednou vložen do zásobníku
- A tedy maximálně jednou z něj odebrán

DVA NEJVZDÁLENĚJŠÍ BODY

Definice *Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ je množina bodů v rovině. Nalezněte dvojici bodů $u, v \in S$, že $\|u - v\|_2^2$ je největší možné.*

- Dva nejvzdálenější body musí ležet na konvexním obalu.
- Důvod - představme si, že u není, pak všechny další body musí ležet v kružnici procházející tímto bodem se středem v . To je spor - u musí být v konvexní obálce.
- Nemusíme procházet všechny dvojice bodů.

- K obálce přiložíme dvě rovnoběžné přímky, které společně otáčíme.
- Jedna se vždy dotýká dvou bodů obálky - těmto říkáme antipodal.
- Ilustrace na <https://codeforces.com/blog/entry/133763>.
- Stačí nám sledovat úhel a projít obálku v lineárním čase.
- Průměr polygonu je dán jednou z dvojic antipodal bodů

Pseudokód (Shamosův algoritmus)

```
function ANGLE( $p, m, n$ )  
    return úhel (clockwise) otočení přímky  $p_m p_{m+1}$  do směru  $p_n p_{n+1}$   
end function
```

```
function ANTIPODALPOINTS( $S$ )  
     $p \leftarrow \text{CONVEX-HULL}(S)$     ▷ counter-clockwise zleva, index od 1, bez kolinearit  
     $i \leftarrow 1, j \leftarrow 2$   
    while ANGLE( $p, i, j$ ) <  $\pi$  do  $j \leftarrow j + 1$   
    end while    ▷  $i, j$  jsou dva antipodální body  
     $curr \leftarrow i$   
    while  $j \neq |S|$  do  
        if ANGLE( $p, curr, i + 1$ )  $\leq$  ANGLE( $p, curr, j + 1$ ) then  $j \leftarrow j + 1, curr \leftarrow j$   
        else  $i \leftarrow i + 1, curr \leftarrow i$   
        end if    ▷  $i, j$  jsou dva antipodální body  
        if ANGLE( $p, curr, i + 1$ ) = ANGLE( $p, curr, j + 1$ ) then  
            ▷ Dvě rovnoběžné úsečky, označ  $i + 1, j, i, j + 1$  a  $i + 1, j + 1$   
            if  $curr = i$  then  $j \leftarrow j + 1$   
            else  $i \leftarrow i + 1$   
            end if  
        end if  
    end while  
end function
```

Shamosův algoritmus je lineární ve velikosti konvexní obálky.

Existuje i varianta vyhýbající se počítání úhlu pomocí orientované plochy (vektorový součin).

MINIMÁLNÍ OBDÉLNÍK OPISUJÍCÍ BODY V ROVINĚ

Definice *Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ je množina bodů v rovině. Nalezněte obdélník, který obsahuje všechny body S a jeho plocha je minimální možná.*

Věta *Obdélník s minimální plochou, který obsahuje všechny body S obsahuje v jedné ze stran dvojici bodů konvexní obálky.*

- Lineární řešení využívá dvojici calipers - každá přímka odpovídá jedné straně obdélníku
- Musíme vždy spočítat minimální úhel, o který musíme otočit každou z přímek
- Pseudokód např. na

https://grokipedia.com/page/Minimum_bounding_rectangle

- Shamos - dizertace,
<https://euro.econ.cmu.edu/people/faculty/mshamos/1978ShamosThesis.pdf>
- <https://www.cs.swarthmore.edu/~adanner/cs97/s08/pdf/calipers.pdf>
- Tomáš Valla - Průvodce labyrintem algoritmů,
<https://pruvodce.ucw.cz/static/pruvodce.pdf>
- <https://www.geeksforgeeks.org/convex-hull-monotone-chain-algorithm/>
- <https://www.geeksforgeeks.org/dsa/>
maximum-distance-between-two-points-in-coordinate-plane-using-rotating-calipers
- Halim, S., Halim, F., Skiena, S. S., & Revilla, M. A. (2013).
Competitive Programming 3. Lulu Independent Publish.

DĚKUJI ZA POZORNOST.
ČAS NA OTÁZKY!