

Příkladová dávka č. 7

(k řešení mezi 19.11. – 3.12.)

Tato dávka příkladů procvičuje pojem magnetického dipólového momentu a výpočty založené na Biot-Savartovu zákonu.

Úloha 1 (2 body)

Vně a uvnitř myšlené koule o poloměru R je umístěna stacionární proudová hustota $\mathbf{J}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ a $\mathbf{J}_{\text{int}}(\mathbf{r})$. Vše je umístěno ve vakuu. Určete obecný vztah pro průměr magnetického pole přes objem této koule, tedy hodnotu

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV. \quad (1)$$

Výsledek: $\langle \mathbf{B} \rangle = 2\mu_0 \mathbf{m}_{\text{int}} / (3V) + \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_{\text{center}})$, kde $\mathbf{m}_{\text{int}}$ je magnetický dipólový moment všech proudů umístěných uvnitř koule, $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ je magnetické pole generované všemi proudy umístěnými vně koule a polohový vektor $\mathbf{r}_{\text{center}}$ náleží centru koule.

Pozn.: Při výpočtu vyjádřete magnetické pole s pomocí Biot-Savartova zákona. Následně prohod'te pořadí integrace, nejprve integrujte přes vektor $\mathbf{r}$. Dále použijte analogii s elektrickým polem generovaným homogenní nábojovou hustotou uvnitř koule. Na tento výpočet lze s výhodou použít Gaussovu větu.

Úloha 1 (2 body)

Nekonečně dlouhý přímý vodič nese proud I_1 a má osu souhlasnou s osou z . Na souřadnici $\mathbf{r} = R\mathbf{x}_0$ je dále umístěn střed kruhové smyčky o poloměru a , která nese proud I_2 . Proudová hustota v přímém vodiči je ve směru $\mathbf{z}_0$ a osa smyčky má směr $\mathbf{y}_0$. Oba vodiče jsou zanedbatelného průřezu a $R \gg a$.

Určete magnetickou sílu, kterou působí smyčka na přímý vodič. Použijte aproximaci magnetického pole smyčky vztahem

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \quad (2)$$

který platí pro elementární dipól ($R \gg a$) umístěný v počátku souřadné soustavy. Ověřte dále, že

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \sum_i m_i \nabla B_i \quad (3)$$

je naopak síla působící v dipólové aproximaci na smyčku, pokud $\mathbf{B}$ je magnetická indukce v místě dipólu.

Výsledek: $\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2 \left(\frac{a}{R}\right)^2 \mathbf{x}_0$