

Příkladová dávka č. 5

(k řešení mezi 24.10. – 7.11.)

Tato dávka příkladů slouží k procvičení interakční energie dipólu v elektrostatickém poli.

Úloha 1 (1 bod)

Na přednášce byl odvozen potenciál elektrického dipólového momentu $\mathbf{p}$ umístěného na pozici $\mathbf{r}'$. Určete generované elektrické pole vně dipólu.

$$\text{Výsledek: } \mathbf{E}(\mathbf{r} \neq \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right), \text{ kde } \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Úloha 2 (1 bod)

Na přednášce bylo ukázáno, že potenciální energie permanentního dipólu s dipólovým momentem $\mathbf{p}$ v elektrostatickém poli $\mathbf{E}_0$ je $W_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$, přičemž elektrické pole $\mathbf{E}_0$ nezahrnuje příspěvek od samotného dipólu.

Uvažte nekonečnou řadu dipólů $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{y}_0$ umístěných na ose x s periodou a . Určete energii W_1 , která je zapotřebí pro odebrání jednoho z dipólů. Určete energii W_2 , která je zapotřebí pro přepolování jednoho z dipólů.

$$\text{Výsledek: } W_1 = -\frac{p_0^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} \zeta(3), \quad W_2 = 2W_1, \text{ kde } \zeta \text{ je Riemannova funkce zeta.}$$

Úloha 3 (1 bod)

Na přednášce bylo ukázáno, že potenciální energie polarizovatelného dipólu s dipólovým momentem $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_0$ v elektrostatickém poli $\mathbf{E}_0$ je $W_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0 / 2 = -\alpha |\mathbf{E}_0|^2 / 2$, přičemž elektrické pole $\mathbf{E}_0$ nezahrnuje příspěvek od samotného dipólu.

Ukažte, že veličina $|\mathbf{E}_0|^2$, která je úměrná hustotě elektrické energie, nemůže mít v prostoru bez nábojů maximum, ale může mít minimum. Lze postupovat tak, že kolem bodu podezřelého z lokálního extrému vyčíslíme integrál

$$\int_S \nabla |\mathbf{E}_0|^2 \cdot d\mathbf{S}, \quad (1)$$

kde plocha těsně obaluje podezřelý bod. Pokud se jedná o lokální maximum, bude vždy záporný, pokud o lokální minimum, bude vždy kladný. Využijte Gaussovu integrální větu a fakt, že v prostoru bez zdrojů platí $\Delta \mathbf{E}_0 = 0$.

Poznámka: Pokud bychom měli polarizovatelný dipól s $\alpha < 0$, mohli bychom takový dipól uvěznit v tomto minimu. U materiálové částice ve vakuu to není možné, jelikož konstanta $\alpha > 0$. Zápornou polarizovatelnost lze ovšem efektivně udělat tak, že ve velmi polarizovatelném prostředí (např. voda) uděláme ostrůvek s nízkou polarizací (vzduchová bublina). Pro pozorovatele žijícího v takovém prostředí se bude zdát, že ostrůvky mají zápornou polarizovatelnost. Tohoto jevu se využívá v “negativní dielektroforéze”.