

Příkladová dávka č. 3 (k řešení mezi 28.3. – 11.4.)

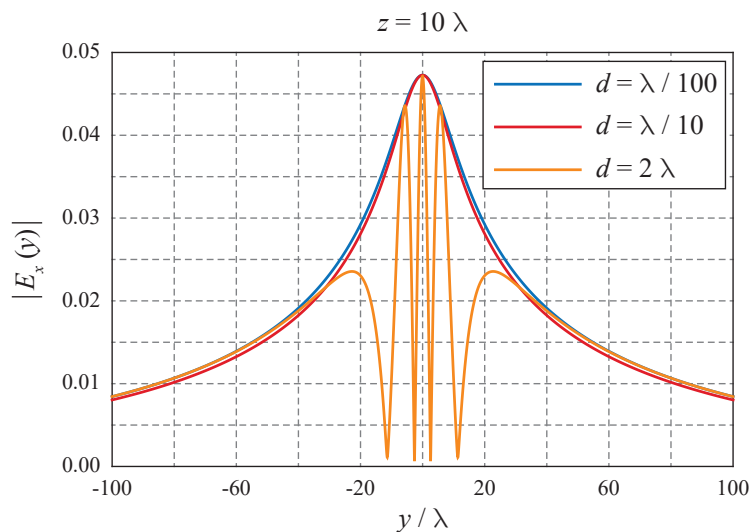
Tato dávka příkladů slouží k procvičení popisu elektromagnetického pole pomocí rozkladu do rovinných vln a popisu pole v zářivé oblasti zdroje.

Úloha 1 (3 body)

Představte si dva velmi tenké a nekonečně dlouhé proudovodiče rovnoběžné s osou x a ležící v rovině $x - y$. Nechť jimi generovaná proudová hustota má tvar

$$\mathbf{J}(x, y, z, \omega) = \mathbf{x}_0 I_0(\omega) \left[\delta\left(y - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(y + \frac{d}{2}\right) \right] \delta(z). \quad (1)$$

Určete obecný vztah pro elektrické pole v poloprostoru $z > 0$ generované tímto proudem. Pro výpočet použijte rozklad pole do rovinných vln. Za předpokladu harmonického časového průběhu a normalizace $I_0(\omega) = -1/(\omega\mu)$ vykreslete absolutní hodnotu elektrického pole v řezu $z = 10\lambda$. Vykreslení proveďte pro $d = 2\lambda, \lambda/10, \lambda/100$. Pro numerické výpočty nevyužívejte pozn. č. 2. Procvičte si numerickou implementaci Fourierovy transformace pomocí FFT algoritmu. Představte si, že byste výsledné pole z Obr. 1



Obrázek 1: Absolutní hodnota elektrického pole v řezu $z = 10\lambda$.

měřili (jak amplitudu, tak fázi) a snažili se použít vztahy z přednáškového slidu č. 41 opačně, tedy k rekonstrukci proudové hustoty (k rekonstrukci tvaru zdroje). Jednalo by se o jakousi mikroskopii. Obrázek 1 ukazuje, že pro $d < \lambda$, se vám rekonstrukce podaří jen teoreticky. Prakticky to možné nebude. Vysvětlete proč. Vysvětlete dále, co bychom měli udělat, abychom zrekonstruovali (abychom „viděli“) i zdroje s $d < \lambda$.

Výsledek:

$$\mathbf{E}(x, y, z > 0, \omega) = -\omega\mu_0\mathbf{x}_0 I_0(\omega) \mathcal{F}_{k_y}^{-1} \left\{ \cos\left(k_y \frac{d}{2}\right) \frac{e^{-jk_z z}}{k_z} \right\} \quad (2)$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2}$$

Pozn. č. 1: Při provádění zpětné Fourierovy transformace je třeba dát pozor na člen $1/k_z$. Tuto singularitu lze odstranit fyzikálním předpokladem, že okolní prostředí je alespoň nepatrně ztrátové, tedy, že vlnové číslo k je komplexní (pozor na znaménka imaginárních částí k, k_z). Použití $k = k(1 - j10^{-3})$ pro naše účely postačí.

Pozn. č. 2: Lze dokázat následující identitu

$$H_0^{(2)}\left(k\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 2\mathcal{F}_{k_y}^{-1} \left\{ \frac{e^{-jk_z|z|}}{k_z} \right\}, \quad (3)$$

kde $H_0^{(2)}(\xi)$ je [Hankelova funkce](#) nultého řádu a druhého druhu. To znamená, že elektrické pole námi popisovaného systému lze také popsat jako

$$\mathbf{E}(x, y, z, \omega) = -\frac{\omega\mu_0\mathbf{x}_0 I_0(\omega)}{4} \left[H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}\right) + H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}\right) \right]. \quad (4)$$

Použitím superpozice můžeme dokonce říci, že proudová hustota

$$\mathbf{J}(x, y, z, \omega) = \mathbf{x}_0 K_0(y, \omega) \delta(z) \quad (5)$$

generuje elektrické pole

$$\mathbf{E}(x, y, z, \omega) = -\frac{\omega\mu_0}{4}\mathbf{x}_0 \int_{y'} K_0(y', \omega) H_0^{(2)}\left(k_0\sqrt{(y - y')^2 + z^2}\right) dy'. \quad (6)$$

Tyto vztahy můžete použít pro ověření správnosti výpočtu pomocí FFT.