

Příkladová dávka č. 2 (k řešení mezi 7.3. – 21.3.)

Tato dávka příkladů slouží k procvičení elementů vyzařování a dále ukazuje zajímavost z oblasti modelování lineárních materiálů.

Úloha 2 (2 body)

Představte si tenký drátek z dobrého vodiče o délce $L = \lambda/2$, který je tenkou mezerou rozdělen na dvě poloviny. Pokud do mezery připojíme zdroj harmonického napětí s frekvencí odpovídající vlnové délce λ , bude tato struktura ochotně generovat elektromagnetické vlny. Elektromagnetické pole v okolí takového zdroje lze dobře aproximovat vyzařováním proudové hustoty

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{z}_0 I_0 \delta(x) \delta(y) \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{4}{\lambda}|z|\right)\right], \quad (1)$$

kde předpokládáme drátek centrováný v souřadné soustavě a položený podél osy z . Proudová hustota je umístěna ve vakuu (originální kov zde již není).

Určete elektrické pole v zářivé oblasti tohoto zdroje, načrtněte vyzařovací diagram a vypočítejte časově střední vyzařovaný výkon.

Výsledek:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\infty &= \frac{j\omega\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \cdot \frac{e^{-jkr}}{kr} \boldsymbol{\theta}_0 \\ P_{\text{rad}} &= \frac{Z_0}{4\pi} |I_0|^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta \approx \frac{Z_0}{10} |I_0|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Pozn.: Uvědomte si, že střední vyzařovaný výkon musí být dodáván zdrojem přiloženého napětí. Pro zdroj se tedy popisovaný drátek jeví jako impedance s reálnou částí $R_{\text{rad}} = 2P_{\text{rad}}/|I_0|^2 \approx 73\Omega$. Tuto hodnotu je možné naměřit.

Úloha 3 (1 bod)

Odvoďte tzv. Kramers-Kronigovu relaci

$$\chi_e(\omega) = \text{P.V.} \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_e(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega, \quad (3)$$

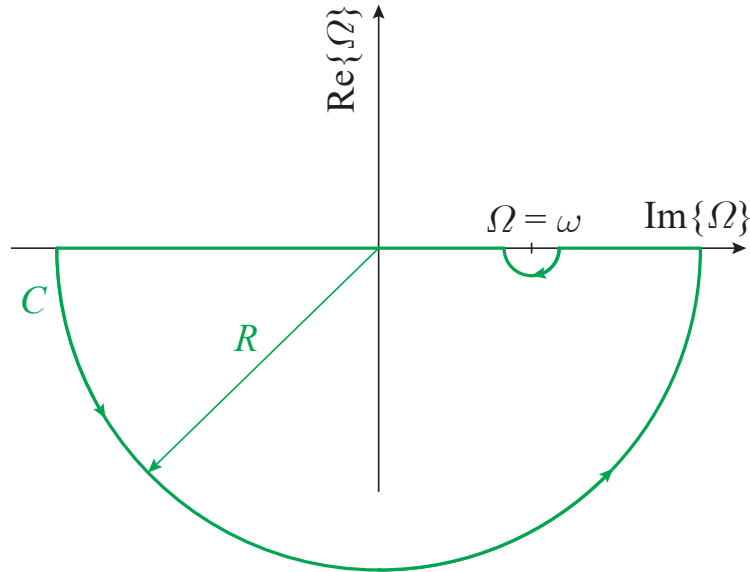
kde P.V. značí Cauchyho hlavní hodnotu integrálu, která svazuje spektrum reálné a imaginární části susceptibility takto

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\chi_e(\omega)\} &= -\text{P.V.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}\{\chi_e(\Omega)\}}{\Omega - \omega} d\Omega \\ \text{Im}\{\chi_e(\omega)\} &= \text{P.V.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\{\chi_e(\Omega)\}}{\Omega - \omega} d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

Standardním postupem při odvození je použití Cauchyho integrálního teorému

$$\chi_e(\omega) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\chi_e(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega \quad (5)$$

na křivce dle Obr. 1 při $R \rightarrow \infty$ a při limitně nulovém poloměru půlkruhu kolem bodu $\Omega = \omega$.



Obrázek 1: Křivka C pro Cauchyův integrální teorém.

Pozn. č. 1: Kramers-Kronigova relace říká, že ztrátový materiál musí být i disperzní a naopak.

Pozn. č. 2: Rozmyslete, co Kramers-Kronigova relace říká o materiálech, které bychom běžně nazvali bezztrátové. Jako příklad lze vzít bezztrátový Lorenzův model $\text{Re}\{\chi_e(\omega)\} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Jakou má tato susceptibilita imaginární část? Je nulová?

Pozn. č. 3: Kramers-Kronigova relace platí obecně pro všechny kauzální lineární systémy, např. pro obvodové impedance. Předchozí bezztrátový Lorenzův model by v tomto případě byl ekvivalentem impedance bezztrátového paralelního rezonančního obvodu $Z = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega/C}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Rozmyslete, co říká Kramers-Kronigova relace o reálné a imaginární části této impedance.