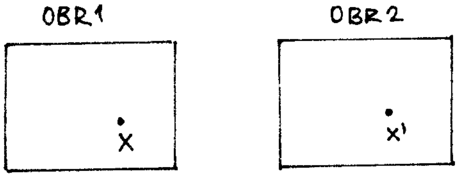
$\alpha x = PX$

$\alpha' x' = P'X$



P, P' – matice kamery (známe)

6 rovnic, 6 neznámých

soustava lin. rovnic – přeurčená

Neznáme matice kamery P, P'

Máme množinu dvojic bodů $\{x_n, x'_n \mid n = 1 \dots N\}$

Chceme najít P, P' a body $\{X_n\}$, tak aby platilo $\alpha_n x_n = P X_n$, $\alpha'_n x'_n = P' X_n$.

Počet rovnic $6 \cdot N$, neznámých $2N + 4N + 24 = \underbrace{6N + 24}_{\text{podurčené, řešení není jednoznačné}}$ ← Nelineární rovnice!

Nejednoznačnost řešení:

1. Násobení skalárem
2. Nejednoznačnost až na homografii

Věta: Buď H libovolná 4×4 matice plné hodnosti. Pak projekce bodů $\{X_n\}$ kamerami P, P' je stejná jako projekce bodů $\{H X_n\}$ kamerami $P \cdot H^{-1}$, $P' H^{-1}$.

Důkaz:

$$\alpha_n \cdot x_n = P X_n = (P H^{-1})(H \cdot X_n)$$
$$\alpha'_n \cdot x'_n = P' X_n = (P' H^{-1})(H \cdot X_n)$$

H – matice homografie $X' = HX$ (colineace, projektivní transformace, …)

(zachovává přímky)

Změněná úloha: Najdeme nějaké P, P', $\{X_n\}$ splňující rovnice $\alpha_n x_n = P X_n$, $\alpha'_n x'_n = P' X_n$.

Věta: Pro libovolné P existuje H plné hodnosti, že $P \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [E\,O]$, kde E a $\vec{o}$ jsou první tři sloupce a poslední sloupec.

Důkaz: $P H^{-1} = [E\,O]$

$$P = [E\,O] H \qquad \text{Zvolím } H = \underbrace{\begin{bmatrix} P \\ \pi^T \end{bmatrix}}_{4} \begin{matrix} \}3 \\ \}1 \end{matrix}$$

– ztransponovaný řádkový vektor (libovolný), ovšem π musí být lineárně nezávislé s horními třemi řádky matice

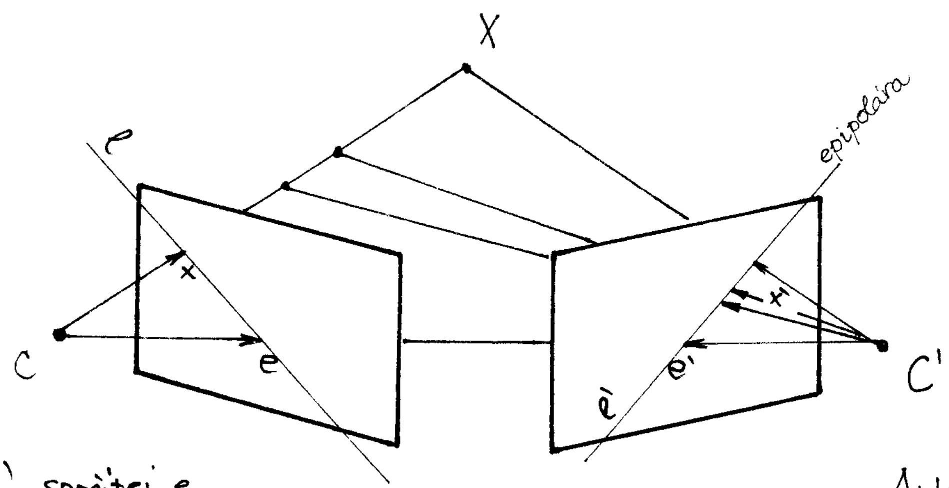
$$P = [E\,O] \cdot \begin{bmatrix} P \\ \pi^T \end{bmatrix} = EP + O\pi^T$$

Pohodlná volba: $\pi = c$, kde $P \cdot C = 0$.

Úloha teď zní: Najdi P' a $\{X_n\}$ tak, že $\alpha_n x_n = [E\,O] X_n$, $\alpha'_n x'_n = P' \cdot X_n$

Řešení: Pomocí F

Geometrie dvou kamer



Mám P, P'; spočítej e
Mám P, P', x; spočítej ℓ'

Antisymetrie matice:
$A + A^T = 0$
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & \\ -y & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Transformujme P, P' tak, že $P = [E\,0]$

$PC = 0 = [E\,0]\,C \;\hat{=}\; C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – volbou $E\,0$ dáváme střed souřadné soustavy do bodu **C**.

Paprsek promítající se do x bude $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\alpha x = [E\,0] \cdot X$
$\alpha = 1 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ \beta \end{bmatrix}$

Promítnu paprsek do 2. obrázku $\left\langle \underbrace{P' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{m = e'}, \underbrace{P' \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}_{Mx} \right\rangle = \langle e', Mx \rangle$

$P' = [\underbrace{M}_{3}\ \underbrace{m}_{1}]$

$a \times b = [a]_\times b$

Průmět paprsku do druhého obrázku je $\langle e', Mx \rangle \Rightarrow \ell' = e' \times (Mx) = \underbrace{[e']_\times M}_{F^T} x$
hod $[e']_\times = 2 \Rightarrow$ hod $F = 2$

$\ell'^T x = 0 == x^T \cdot F x'$

Matice F jde spočítat z korespondencí x_n, x_n' řešením $x_n^T F x_n' = 0$,
N rovnic, 9 neznámých, ale 1 neznámá = násobení F skalárem. $(\cdots)\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$
Potřebujeme 8 nebo víc bodů

Máme F, chceme spočítat P, P'
1. Zvolíme $P = [E\,0]$
2. víme, že $x^T F x' = 0 \Rightarrow (\forall X)\quad (PX)^T \cdot F (P'X) = 0 = X^T \underbrace{P^T F P'}_{A} X$

$(\forall X)\quad X^T A X = 0 \Rightarrow A + A^T = 0$ (A antisymetrická)

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ & \vdots & \\ & & A_{44} \end{pmatrix}$ $\quad X^T A X = \sum_i A_{ii} X_i^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (A_{ij} + A_{ji}) X_i X_j = 0$

$\Rightarrow A_{ii} = 0$
$A_{ij} + A_{ji} = 0$

$P^T F P'$ je antisymetrická

$P^T F P'$ antisymetrická

$P = [E0]$ $\qquad P^T F P' = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} F \,[M m] = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} [FM \ Fm] = \begin{array}{c} \overbrace{}^{3} \\ \begin{bmatrix} FM & Fm \\ 000 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}3 \\ \}1 \end{array} \end{array}$ $\qquad Fm = 0 \Rightarrow m = e'$

$P' = [Mm]$

epipóly splňují:

$Fe' = F^T e = 0$

Zvolíme $M = SF^T$, kde S lib. antisymetrická

$$FSF^T + (FSF^T)^T = FSF^T + FS^TF^T = F(S + S^T)F^T = 0$$

Pohodlně zvolíme $S = [e']_\times$

Výsledek $P = [[e']_\times F^T \ e']$

Matice kamer P, P' konzistentní z F

Máme korespondence $\{x_i, x_i'\}_{i=1}^{n}$ (známe)

$$\{x_i, x_i'\}_{i=1}^{n} \xrightarrow{F} P, P' \xrightarrow{\oplus\, x_i, x_i'} \{X\}_{i=1}^{n} \ : \ \exists \alpha, \alpha' \quad \begin{array}{l} \alpha_i x_i = P \cdot X_i \\ \alpha_i' x_i' = P' \cdot X_i \end{array} \quad \alpha_i, \alpha_i' \neq 0$$

$$\alpha \cdot x = \underbrace{P \cdot H^{-1}}_{\bar{P}} \overbrace{H X}^{\bar{X}}$$

$\alpha_i, \alpha_i', P, P', X_i$ nejsou určeny jednoznačně

$$P \cdot H^{-1} = (E \,|\, 0)$$

$P \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, hod $P = 3$

doplníme na čtvercovou vektorem π $\begin{pmatrix} P \\ \pi^T \end{pmatrix}$ tak, aby hodnost vzniklé matice byla 4.

$\begin{pmatrix} P \\ C^T \end{pmatrix}$, $P \cdot C = 0$ ... dobré doplnění řádkem, který je lin. nezávislý na P. ($c \neq 0$)

$$\left.\begin{array}{l} p_1^T \cdot c = 0 \\ p_2^T \cdot c = 0 \\ p_3^T \cdot c = 0 \end{array}\right\} c \perp \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ p_3^T \end{pmatrix}$$

Získání P' z $\{x_i, x_i'\}_{i=1}^{n}$ $\quad (P = (E|0))$

$x^T \cdot F \cdot x' = 0$, $\quad \alpha x^T \cdot F \cdot \alpha' x' = 0$, $\quad (PX)^T \cdot F \cdot (P'X) = 0$, $\quad \forall X \in \mathbb{R}^4$

$X^T \cdot \underbrace{P^T \cdot F \cdot P'}_{A} X = 0$, $\quad A^T = -A$ (je antisymetrická)

Důkaz antisymetričnosti A:

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ A_{11} = 0, \ A_{22} = 0, \ A_{33} = 0, \ A_{44} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdot & \cdot \\ A_{21} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{(1 \ 1 \ 0 \ 0) \cdot A}_{(A_{21} \ A_{12} \ \cdot \ \cdot)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad A_{21} + A_{12} = 0$$

$$(P^T F \cdot P')^T = -P^T F P'$$

$$P = (E|0), \quad P' = (M\ m)$$

$$P'^T F^T P = -P^T F P' \qquad \begin{pmatrix} M^T \\ m^T \end{pmatrix} F^T (E\ 0) = -\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \cdot F \cdot (M\ m)$$

$$\begin{pmatrix} M^T F^T & 0 \\ m^T F^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -FM & -Fm \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} Fm = 0 \\ m = \beta \cdot e' \end{array}$$

$$\underbrace{M^T F^T}_{} = -FM$$

$$(FM)^T = -FM \qquad (1)$$

Pozorování:

$$\forall S : S^T = -S \qquad M = SF^T \quad \text{platí } (1)$$

Jak volit S ?

$$\text{hod } P' \overset{!}{=} 3, \quad P' = (SF^T\ \ \beta e')$$

Příklad špatného S

$$F^T_{BÚNO} = (f_1\ \ f_2\ \ a_1 f_1 + a_2 f_2) \qquad (\text{hod } F)$$

$$S = [f_1]_\times$$

$$SF^T = ([f_1]_\times f_1\ \ [f_1]_\times f_2\ \ [f_1](a_1 f_1 + a_2 f_2)) = \underbrace{(0\ \ [f_1]_\times f_2\ \ a_2 [f_1]_\times f_2)}_{\text{hod} = 1}$$

$S = [Z]_\times$ a potřebujeme, aby $Z \notin \langle F^T \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow S = [e']_\times$ je dobrá volba, $F \cdot e' = 0$

$$P' = \underbrace{(\underbrace{[e']_\times F^T}_{\text{hod} = 2}\ \ \beta e')}_{\text{hod} = 3}$$

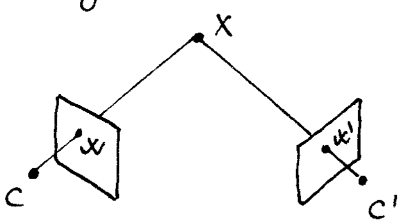
$$P'C' = 0$$

$$P' \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow c_4 = 0 \Rightarrow c'$ je nevlastní bod

$$\left. \begin{array}{l} M = [e']_\times F^T \quad (\text{získáno z } (1)) \\ FM = F(M + \underbrace{e' v^T}_{\mathbb{R}^{3\times 3}}) \\ \qquad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (v_1\ v_2\ v_3) \end{array} \right\} \Rightarrow \quad P' = ([e']_\times F^T + e' v^T \mid \beta e')$$

Triangulace



C, C', x, x'

$\exists \alpha, \alpha' \qquad \alpha x = PX$

$\qquad\qquad\quad \alpha' x' = P'X$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P & -x & 0 \\ P' & 0 & -x' \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}}_{q\,=\,0} = 0$$

1. $x, x' = 0 \Rightarrow$ hod $\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & -x' \end{pmatrix} = 2$
2. hod $P, P' = 3$

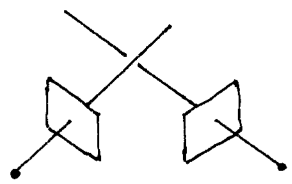
$PC = 0$ středy různé $\equiv$ C, C' LN $\Big\}$ hod $\begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix} = 4$, $\in \mathbb{R}^{6\times 4}$

$PC' = 0$

1. hod $A = 6$ (meče)

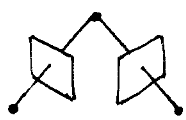
   paprsky x, x' se neprotínají $\Rightarrow$ řešíme přeurčenou soustavu

   $A \cdot q = 0 \qquad [U, D, V] = \mathrm{svd}(A), \quad q = V(:, \mathrm{end})$



2. hod $A = 5$ (korespondence)

   rekonstrukce je jednoznačná



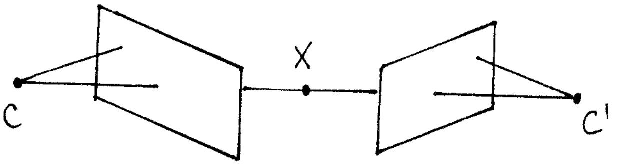
3. hod $A = 4$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P & -x & 0 \\ P' & 0 & -x' \end{pmatrix}}_{\text{hod}=4} \cdot \begin{pmatrix} X \\ \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} P & -x \\ P' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} P'X = 0 \\ \underbrace{\alpha \cdot x}_{\sim e} = P \cdot C' \quad \rightarrow \ \alpha = 1,\ x = e \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ P' & -x' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \alpha' \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} PX = 0 : X = C \\ \underbrace{\alpha x'}_{\sim e'} = P'C \quad \rightarrow \ \alpha' = 1,\ x' = e' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P & -e & 0 \\ P' & 0 & -e' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C' & C \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$



z $x^T \cdot F \cdot x' = 0$ nevyplývá, že x, x' jsou projekcemi jednoho bodu

$e^T \cdot F \cdot x' = 0 \quad \forall x'$