

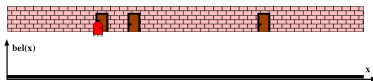
Pravděpodobnostní metody lokalizace v mobilní robotice

Miroslav Kulich

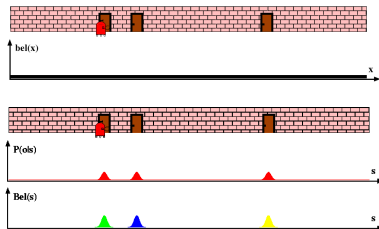
Intelligent and Mobile Robotics Group
Gerstner Laboratory for Intelligent Decision Making and Control
Czech Technical University in Prague

10/11/2010

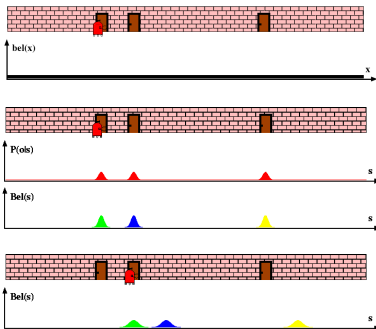
Motivace



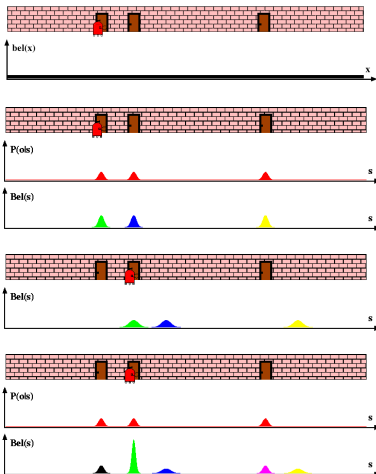
Motivace



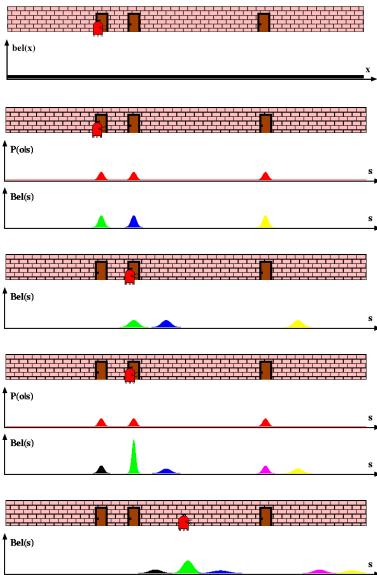
Motivace



Motivace



Motivace



Bayesův filtr: framework

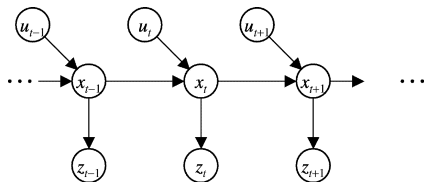
- Je dáno:

- Posloupnost pozorování z a akcí u :

$$d_t = \{u_1, z_1, \dots, u_t, z_t\}$$

- **Sensorický model** $p(z|x)$
 - **Model akcí (pohybu)** $p(x|u, x')$
 - **Počáteční (prior)** pravděpodobnost stavu $p(x)$
- Chceme:
 - Odhad stavu (**posterior**)
 - Posteriorní pravděpodobnost označujeme jako **belief (víra)**:
 $Bel(x_t) = p(x_t|u_1, z_1, \dots, u_t, z_t)$

Markovův předpoklad



Následující stav závisí pouze na aktuálním stavu a nezávisí na stavech předchozích.

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t)$$

$$p(x_t | x_{1:t-1}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

S tím souvisí:

- Statický svět (nebo dynamika modelovaná v x)
- Dokonalý model světa (model senzoru) a model pohybu
- Nezávislý šum
- Přesná reprezentace $p(x)$

Bayesův filtr - odvození

$$Bel(x_t)$$

$$= p(x_t | u_1, z_1, \dots, u_t, z_t)$$

Bayes

$$= \eta p(z_t | x_t, u_1, z_1, \dots, u_t) p(x_t | u_1, z_1, \dots, u_t)$$

Markov

$$= \eta p(z_t | x_t) p(x_t | u_1, z_1, \dots, u_t)$$

Total prob.

$$= \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | u_1, z_1, \dots, u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1} | u_1, z_1, \dots, u_t) dx_{t-1}$$

Markov

$$= \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1} | u_1, z_1, \dots, u_t) dx_{t-1}$$

Markov

$$= \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1} | u_1, z_1, \dots, z_{t-1}) dx_{t-1}$$

$$= \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Bayesův filtr

$$Bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Algoritmus Bayes_filter($Bel(x), d$)

if d is a **measurement** z **then**

$$\eta = 0$$

for all x **do**

$$Bel'(x) = p(z|x) Bel(x)$$

$$\eta = \eta + Bel'(x)$$

end for

for all x **do**

$$Bel(x) = \eta^{-1} Bel'(x)$$

end for

end if

if d is a **action** u **then**

for all x **do**

$$Bel'(x) =$$

$$\int p(x|u, x') Bel(x') dx'$$

end for

end if

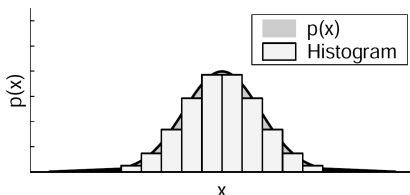
return $Bel(x)$

Bayesovy filtry - celá rodina metod

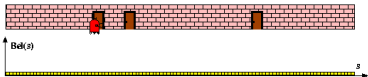
- Kalmanův filtr
- Histogramový filtr
- Particle filtr
- Skryté Markovovy modely
- Dynamické Bayesovy sítě
- Částečně pozorovatelné Markovovy rozhodovací procesy (POMDPs)

Neparametrické filtry

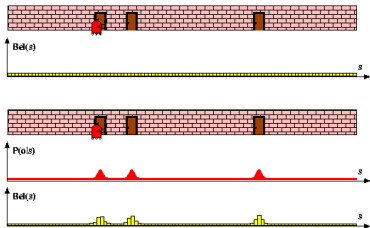
- Aproximace hustoty pravděpodobnosti konečnou množinou hodnot
- Umí reprezentovat libovolné rozložení
- Velikost množiny reprezentantů ovlivňuje rychlost výpočtu a kvalitu filtrace
- Histogramový x částicový filtr



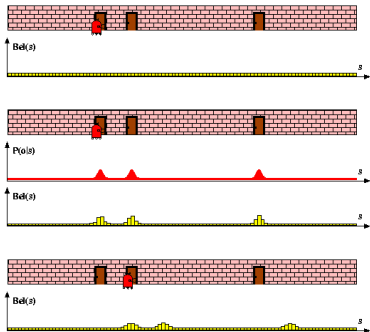
Histogramový filtr



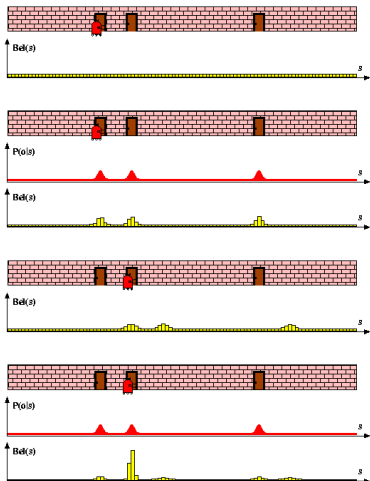
Histogramový filtr



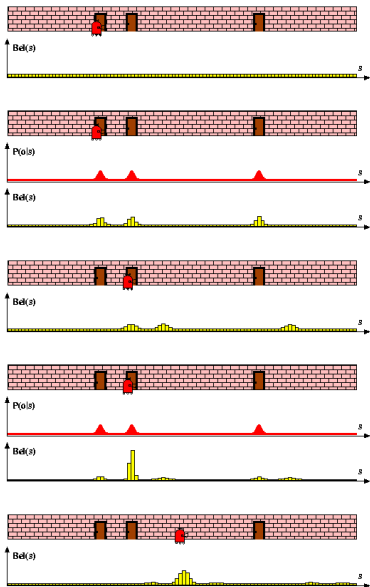
Histogramový filtr



Histogramový filtr



Histogramový filtr



Histogramový filtr

if d is a measurement z then

$$\eta = 0$$

for all x do

$$Bel'(x) = p(z|x)Bel(x)$$

$$\eta = \eta + Bel'(x)$$

end for

for all x do

$$Bel'(x) = \eta^{-1} Bel'(x)$$

end for

else if d is an action u then

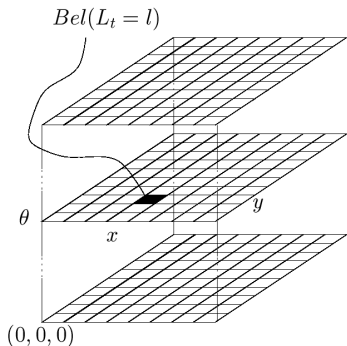
for all x do

$$Bel'(x) = \int p(x|u, x')Bel(x')dx'$$

end for

end if

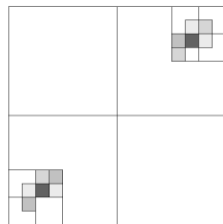
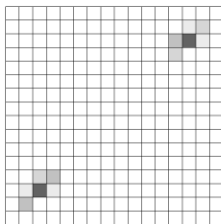
return $Bel'(x)$



$$Bel(x_t = \langle x, y, \phi \rangle)$$

Histogramový filtr

- Složitost $O(n^2)$ – při aktualizaci z modelu pohybu se prochází každá buňka!
- Selektivní update
 - uvažuje se jen část stavového prostoru
 - ale pak je potřeba sledovat, jak úspěšně je robot lokalizován
- Dynamická dekompozice stavového prostoru – kd-stromy (density trees): „jemnost“ dělení závisí na hustotě pravděpodobnosti (vyšší hustota \Rightarrow jemnější dělení)

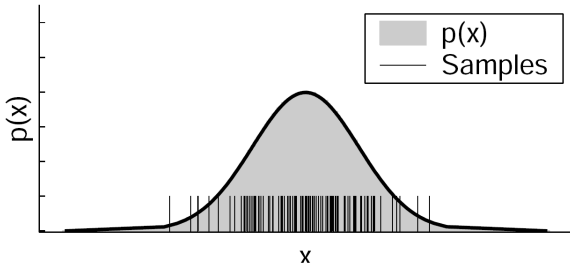


Částicový filtr (particle filter)

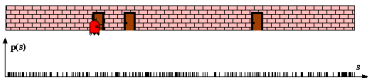
- Hustota pravděpodobnosti je reprezentována „vhodně“ (náhodně umístěnými vzorky):

$$Bel(x_t) \approx \{x^{(i)}, w^{(i)}\}_{i=1, \dots, m}$$

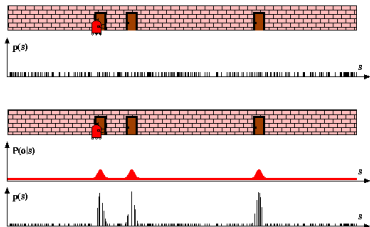
- Vzorky jsou vážené.
- Podle váhy v čase $t - 1$ se vybírají vzorky pro čas t
- Velice jednoduchý na implementaci
- Nejuniverzálnější z BF: reprezentace **ne Gausovské** distribuce a **nelineárních** procesů



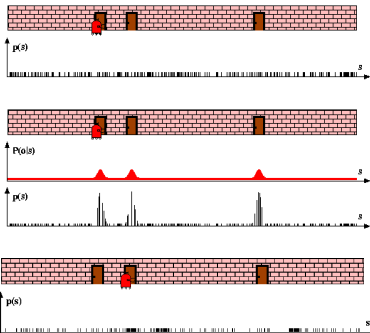
Částicový filtr



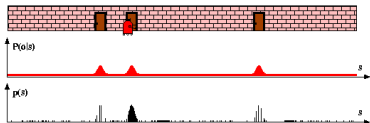
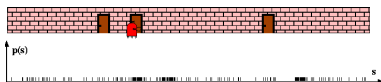
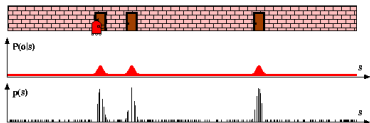
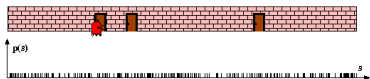
Částicový filtr



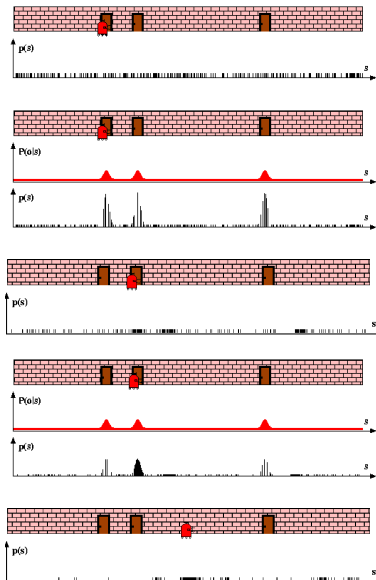
Částicový filtr



Částicový filtr



Částicový filtr



Algoritmus částicového filtru

Particle_filter(S_{t-1}, u_{t-1}, z_t)

$$S_t = \emptyset, \eta = 0$$

for $i = 1, \dots, n$ **do**

Generuj nové vzorky

Vyber index j_i podle diskrétní distribuce dané w_{t-1}

Vyber x_t^i z $p(x_t | x_{t-1}, u_{t-1})$ na základě $x_{t-1}^{j_i}$ a u_{t-1}

$$w_t^i = p(z_t | x_t^i)$$

Spočítej váhu

$$\eta = \eta + w_t^i$$

Aktualizuj normalizční faktor

$$S_t = S_t \cup \{ \langle x_t^i, w_t^i \rangle \}$$

Přidej vzorek

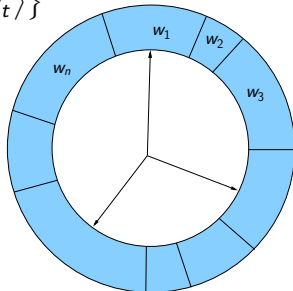
end for

for $i = 1, \dots, n$ **do**

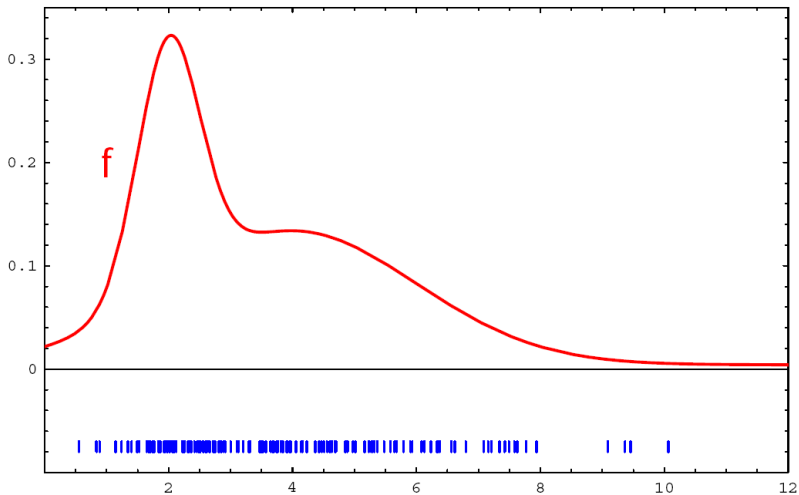
$$w_t^i = \frac{w_t^i}{\eta}$$

Normalizuj váhy

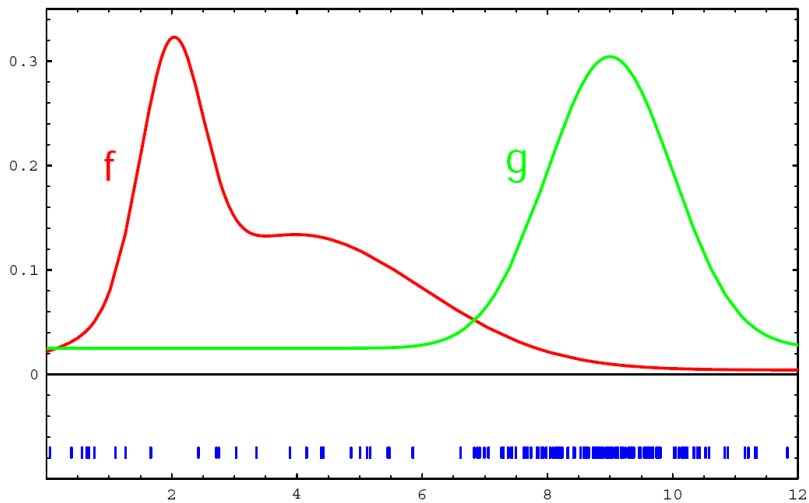
end for



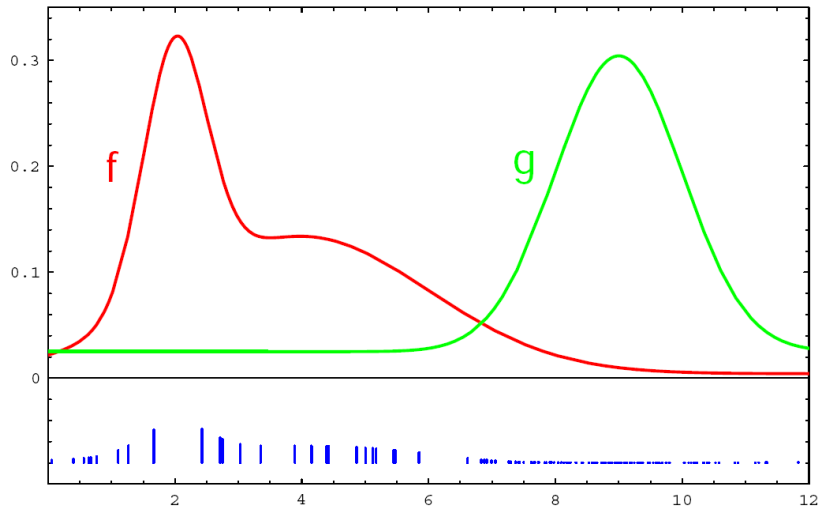
Proč se váží?



Proč se váží?



Proč se váží?



Kalmanův filtr

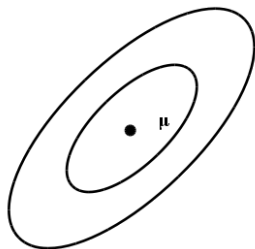
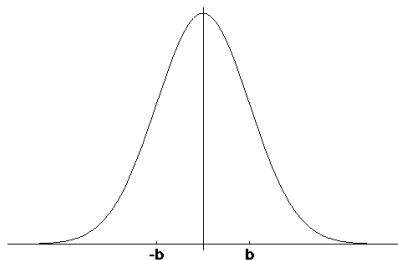
- Unimodální reprezentace hustoty pp. Gaussiánem

$$p(x) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$p(x) \sim N(\mu, \Sigma)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$



Lineární transformace

- Lineární transformace zachovávají normální rozdělení

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ Y = aX + b \end{array} \right\} \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{array} \right\} \Rightarrow p(X_1)p(X_2) \sim N\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\mu_2, \frac{1}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu, \Sigma) \\ Y = AX + B \end{array} \right\} \Rightarrow Y \sim N(A\mu + B, A\Sigma A^T)$$

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_2) \end{array} \right\} \Rightarrow p(X_1)p(X_2) \sim N\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_2, \frac{1}{\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}}\right)$$

Základní předpoklady

- Musí platit Markovova podmínka + tři následující:
 - Pravděpodobnost přechodu stavu (model pohybu) $p(x|u, x')$ je lineární s přidaným Gausovým šumem:

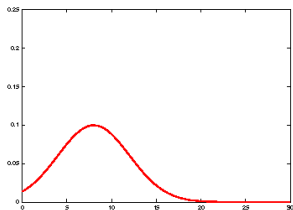
$$x_t = Ax_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

- Model senzoru musí být lineární s Gausovým šumem

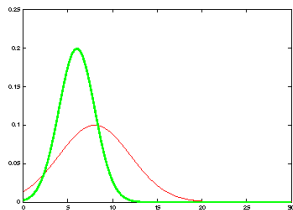
$$z_t = Cx_t + \delta_t$$

- Počáteční informace (víra) musí mít normální rozložení

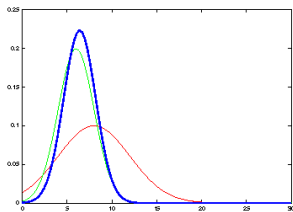
Kalmanův filtr



Apriorní znalost

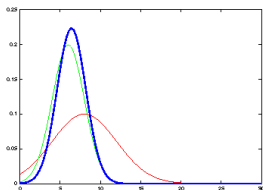


Nové měření

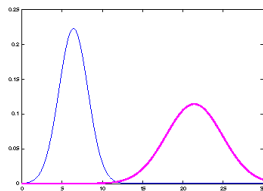


Integrace nového měření

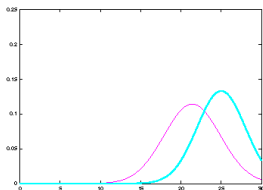
Kalmanův filtr



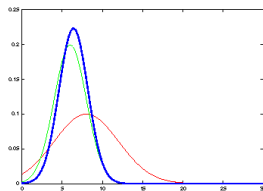
Aktuální stav



Provedení akce



Nové měření



Integrace nového měření

Algoritmus

Algoritmus Kalman_filter($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$)

Predikce (integrace akce)

$$\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$$

$$\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$$

Korekce (integrace měření)

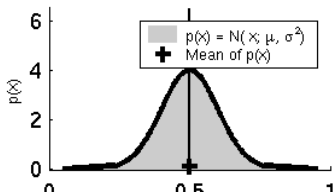
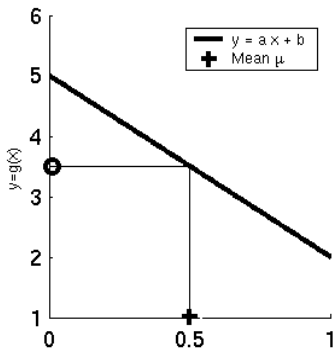
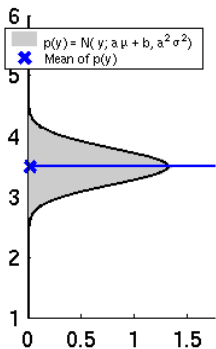
$$K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$$

$$\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$$

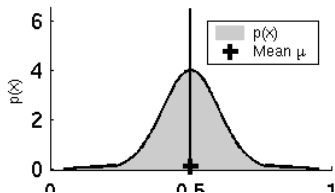
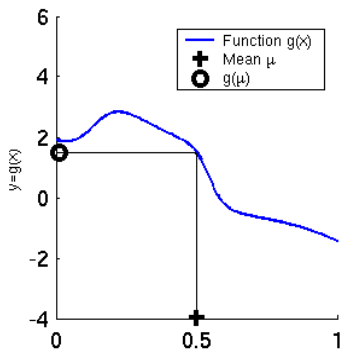
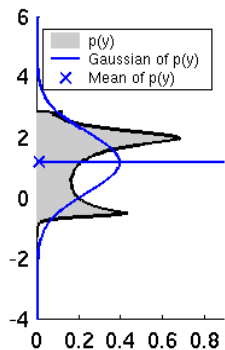
$$\Sigma_t = (E - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$$

return μ_t, Σ_t

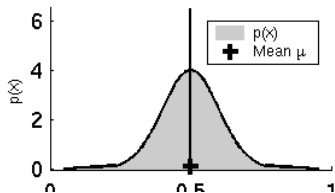
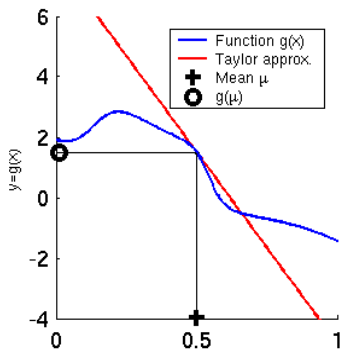
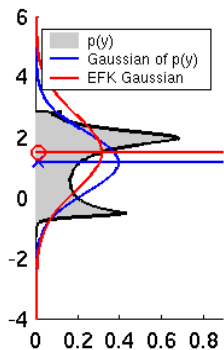
Lineární transformace Kalmanova filtru



NeLineární transformace



Rozšířený Kalmanův filtr



$$x_t = g(u_t, x_{t-1})$$

$$z_t = h(x_t)$$

Rozšířený Kalmanův filtr

- Pro linearizaci používáme Taylorův rozvoj v μ , tj. matice derivací funkcí – Jakobiány
- Predikce:

$$g(u_t, x_t - 1) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$
$$g(u_t, x_t - 1) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

- Korekce:

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} (x_t - \bar{\mu}_t)$$
$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + H_t (x_t - \bar{\mu}_t)$$

Algoritmus

Algoritmus `Extended_Kalman_filter`($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$)

Predikce (integrace akce)

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_t &= g(u_t, \mu_{t-1}) \\ \bar{\Sigma}_t &= G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t\end{aligned}$$

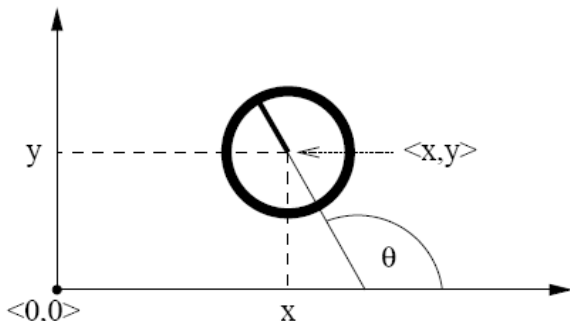
Korekce (integrace měření)

$$\begin{aligned}K_t &= \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1} \\ \mu_t &= \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_t &= \frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t} \\ G_t &= \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}\end{aligned}$$

Model pohybu

- Pro implementaci Bayesova filtru potřebujeme definovat model pohybu $p(x|x', u)$.
- Model pohybu definuje pravděpodobnost, že po provedení akce u ve stavu x' bude robot ve stavu x . Předpokládáme robot pohybující se v rovině, tj $x = \langle x, y, \phi \rangle$
- Existují různé modely (v závislosti na typu řízení, zahrnutí kinematiky, atd.)



Odometrický model pohybu

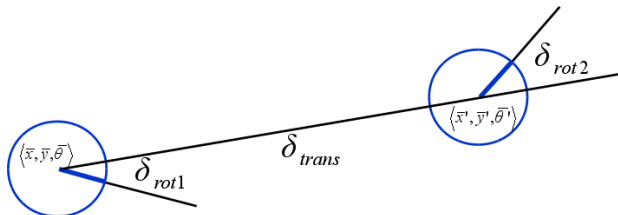
Ideální případ

- Robot se pohybuje z $\langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{\phi} \rangle$ do $\langle \bar{x}', \bar{y}', \bar{\phi}' \rangle$
- Z odometrie získáme $u = \langle \delta_{rot1}, \delta_{rot2}, \delta_{trans} \rangle$

$$\delta_{trans} = \sqrt{(\bar{x}' - \bar{x})^2 + (\bar{y}' - \bar{y})^2}$$

$$\delta_{rot1} = \text{atan2}(\bar{y}' - \bar{y}, \bar{x}' - \bar{x}) - \bar{\phi}$$

$$\delta_{rot2} = \bar{\phi}' - \bar{\phi} - \delta_{rot1}$$



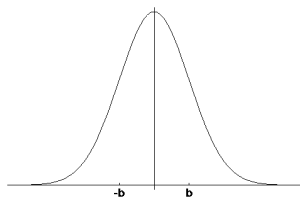
Přidáme šum

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{rot1} &= \delta_{rot1} + \varepsilon_{\alpha_1}|\delta_{rot1}| + \alpha_2|\delta_{trans}| \\ \hat{\delta}_{trans} &= \delta_{trans} + \varepsilon_{\alpha_3}|\delta_{trans}| + \alpha_4(|\delta_{rot1}| + |\delta_{rot2}|) \\ \hat{\delta}_{rot2} &= \delta_{rot2} + \varepsilon_{\alpha_1}|\delta_{rot2}| + \alpha_2|\delta_{trans}|\end{aligned}$$

- Šum je dán čtyřmi parametry
- Na celém modelu je nejtěžší získat právě parametry šumu – experimentálně

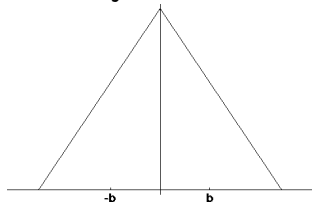
Typické distribuce šumu

Normální



$$\varepsilon_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Trojúhelníková



$$\varepsilon_{\sigma^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } |x| > \sqrt{6\sigma^2} \\ \frac{\sqrt{6\sigma^2} - |x|}{6\sigma^2} & \text{jinak} \end{cases}$$

Odometrický model pro vzorkování

$$u = \langle \delta_{rot1}, \delta_{rot2}, \delta_{trans} \rangle, x = \langle x, y, \phi \rangle \Rightarrow x' = \langle x', y', \phi' \rangle$$

Náhodné řízení

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{rot1} &= \delta_{rot1} + \text{sample}(\alpha_1 |\delta_{rot1}| + \alpha_2 |\delta_{trans}|) \\ \hat{\delta}_{trans} &= \delta_{trans} + \text{sample}(\alpha_3 |\delta_{trans}| + \alpha_4 (|\delta_{rot1}| + |\delta_{rot2}|)) \\ \hat{\delta}_{rot2} &= \delta_{rot2} + \text{sample}(\alpha_1 |\delta_{rot2}| + \alpha_2 |\delta_{trans}|) \end{aligned}$$

Výpočet pozice

$$\begin{aligned} x' &= x + \hat{\delta}_{trans} + \cos(\phi + \hat{\delta}_{rot1}) \\ y' &= x + \hat{\delta}_{trans} + \sin(\phi + \hat{\delta}_{rot1}) \\ \phi' &= \phi + \hat{\delta}_{rot1} + \hat{\delta}_{rot2} \\ &\text{return } \langle x', y', \phi' \rangle \end{aligned}$$

sample (normální rozložení): $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \text{rand}(-b, b)$

Výpočet $p(x|u, x')$

Hodnoty z odometrie (u)

$$\begin{aligned}\delta_{trans} &= \sqrt{(\bar{x}' - \bar{x})^2 + (\bar{y}' - \bar{y})^2} \\ \delta_{rot_1} &= \text{atan2}(\bar{y}' - \bar{y}, \bar{x}' - \bar{x}) - \bar{\phi} \\ \delta_{rot_2} &= \bar{\phi}' - \bar{\phi} - \delta_{rot_1}\end{aligned}$$

Ideální případ

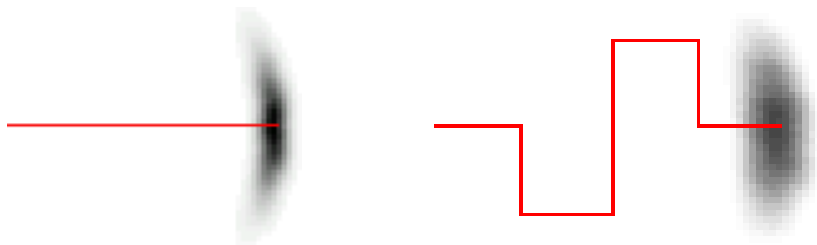
$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{trans} &= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \\ \hat{\delta}_{rot_1} &= \text{atan2}(y' - y, x' - x) - \phi \\ \hat{\delta}_{rot_2} &= \phi' - \phi - \delta_{rot_1}\end{aligned}$$

Výpočet pravděpodobnosti

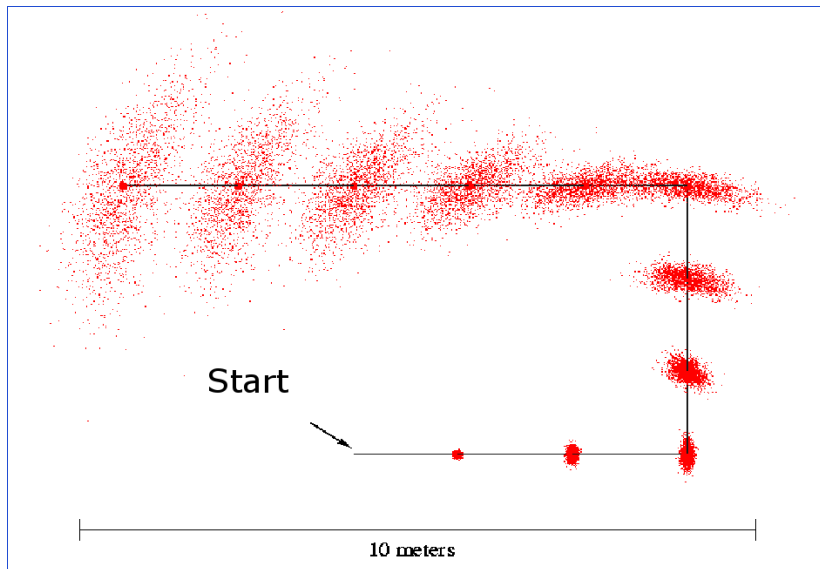
$$\begin{aligned}p_1 &= \text{prob}(\delta_{rot_1} - \hat{\delta}_{rot_1}, \alpha_1 |\delta_{rot_1}| + \alpha_2 \delta_{trans}) \\ p_2 &= \text{prob}(\delta_{trans} - \hat{\delta}_{trans}, \alpha_3 \delta_{trans} + \alpha_4 (|\delta_{rot_1}| + |\delta_{rot_2}|)) \\ p_3 &= \text{prob}(\delta_{rot_2} - \hat{\delta}_{rot_2}, \alpha_1 |\delta_{rot_2}| + \alpha_2 \delta_{trans}) \\ \text{return } p_1 p_2 p_3 &\leftarrow \text{předpokládáme nezávislost}\end{aligned}$$

Aplikace

- Výsledná hustota pravděpodobnosti závisí na ujeté trajektorii, ne pouze na výsledné pozici!
- Pro složitější pohyby se opakovaně provádí předchozí algoritmus.
- Typický případ, jak vypadá distribuce (2D projekce)



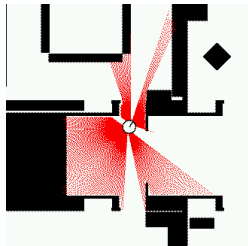
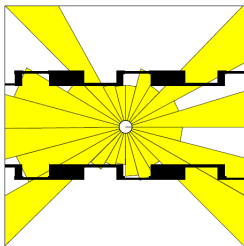
Skládání trajektoří



Model senzoru

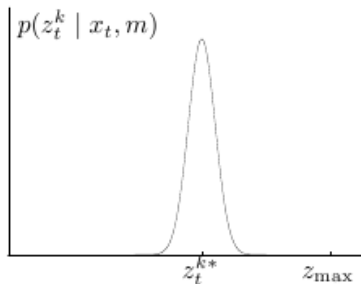
- Cílem je určit $p(z|m, x)$.
- Budeme používat proximní senzory (laser).
- Scan se skládá z k měření (paprsků): $z = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$
- Předpokládáme, že paprsky jsou nezávislé:

$$P(z|x, m) = \prod_{k=1}^k p(z_k|x, m)$$



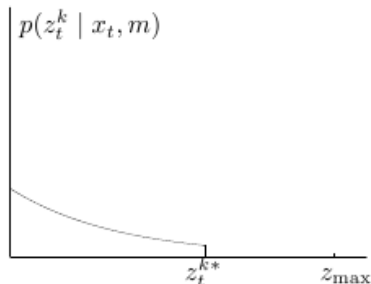
Paprskový model - komponenty

Normální rozložení



$$p_{hit}(z|x, m) = \begin{cases} \eta N(z, z^*, \sigma_{hit}^2) & \text{pokud } 0 \leq z \leq z_{\max} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

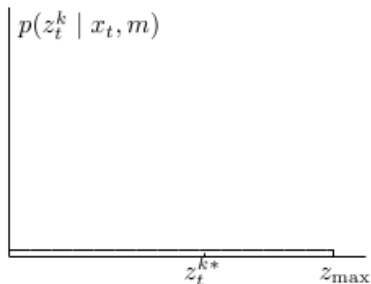
Poissonovo rozložení



$$p_{short}(z|x, m) = \begin{cases} \eta \lambda_{short} e^{-\lambda_{short} z} & \text{pokud } 0 \leq z \leq z^* \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

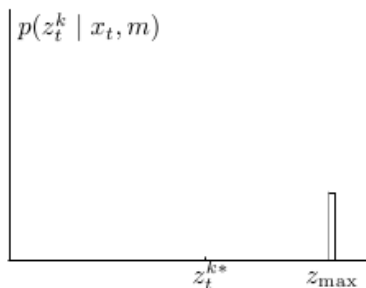
Paprskový model - komponenty

Rovnoměrné rozložení



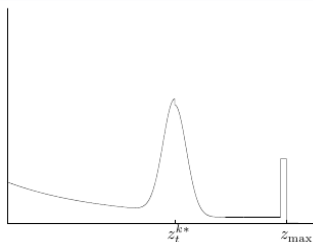
$$p_{rand}(z|x, m) = \begin{cases} \frac{1}{z_{max}} & \text{pokud } 0 \leq z \leq z_{max} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Diskrétní rozložení :-)



$$p_{max}(z|x, m) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } z = z_{max} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Sloučení



$$p(z|x, m) = \begin{pmatrix} \alpha_{hit} \\ \alpha_{short} \\ \alpha_{rand} \\ \alpha_{max} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} p_{hit}(z|x, m) \\ p_{short}(z|x, m) \\ p_{rand}(z|x, m) \\ p_{max}(z|x, m) \end{pmatrix}$$

- Parametry modelu se určí nějakým učícím algoritmem na základě naměřených dat (E-M, genetické algoritmy)
- z_{exp} se počítá raytracing, což je časově náročné.
- Lze počítat jen některé paprsky (např. 8); navíc větší nezávislost.
- Lze použít předpočítané mapy (pro každé $\langle x, y, z \phi \rangle$)
- Vynásobením modelu senzoru $\lambda < 1$ omezíme vliv senzoru.
- Model je nespojitý \Rightarrow aproximační vyjádření hustoty pp. může minout daný stav.