

Vstupní test předmětu M33SAD

Řešení problémového příkladu

Bayesovské rozhodování

Právě jedna z vašich ovcí byla v noci zabita divokým zvířetem. V okolních lesích žijí tři druhy predátorů: medvěd, vlk a rys. Ze zkušenosti víte, že z osmi útoků predátora připadají čtyři na vlky, tři na medvědy a jeden na rysa. O vlčích je známo, že útočí ve smečce a obvykle zabíjí více ovcí najednou (dvě a více ovcí je zabito v 8 z 10 útoků). Medvědi jsou samotáři, ale jako velká šelma také mohou zabít více ovcí (v 5 z 10 útoků zabijí dvě a více ovcí). Rys zásadně zabíjí jedinou ovcí. Vlci se příští noc nikdy nevrací na stejné místo k novému útoku, rys jen jednou z deseti případů, medvěd v polovině případů. Odpovězte na následující otázky:

1. (2 body) Jaká je pravděpodobnost, že na ovcí zaútočil medvěd?
2. (1 bod) Který predátor zabil ovcí? Rozhodujte pouze na základě věrohodnosti s předpokladem uniformní apriorní pravděpodobnosti. Rozhodnutí vysvětlete.
3. (2 body) Který predátor zabil ovcí? Použijte metodu maximální aposteriorní pravděpodobnosti. Rozhodnutí vysvětlete.
4. (1 bod) Jaká je pravděpodobnost, že se predátor příští noc vrátí? Použijte zjednodušenou aproximaci založenou na maximální aposteriorní hypotéze.
5. (2 body) Jaká je pravděpodobnost, že se predátor příští noc vrátí, pokud vyjdete z plného bayesovského učení?

Řešení:

Význam symbolů:

- skryté stavy:
m ... zaútočil medvěd, v ... zaútočil vlk, r ... zaútočil rys,
- pozorovatelný příznak:
o ... byla zabita jedna ovce,
- rozhodnutí:
n ... predátor se příští noc vrátí,

Převod zadání do pravděpodobnostního zápisu:

- Apriorní pravděpodobnosti:

$$P(m) = \frac{3}{8}, P(v) = \frac{1}{2}, P(r) = \frac{1}{8},$$

- Věrohodnosti:

$$P(o|m) = \frac{1}{2}, P(o|v) = \frac{1}{5}, P(o|r) = 1,$$

- Vztah mezi rozhodnutím a skrytým stavem:

$$P(n|m) = \frac{1}{2}, P(n|v) = 0, P(n|r) = \frac{1}{10},$$

Odpovědi na otázky:

1. Z Bayesova vztahu za znalosti apriorních pstí a věrohodností dopočítáme aposteriorní pst:

$$P(m|o) = \frac{P(o,m)}{P(o)} = \frac{P(o|m)P(m)}{P(o)} = \frac{P(o|m)P(m)}{P(o|m)P(m)+P(o|v)P(v)+P(o|r)P(r)}$$

$$P(m|o) = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \times 1} = 45\%$$

2. Porovnáme věrohodnosti:

$$P(o|r) = 1 > P(o|m) = 0.5 > P(o|v) = 0.2, \text{ ovci zabil rys}$$

3. Stejný krok jako v bodě (1) zopakujeme i pro vlka a rysa, porovnáme aposteriorní psti:

$$P(m|o) = 0.45 > P(r|o) = 0.3 > P(v|o) = 0.25, \text{ ovci zabil medvěd}$$

$$\text{zjednodušeně: } P(m, o) = \frac{3}{16} > P(r, o) = \frac{1}{8} > P(v, o) = \frac{1}{10}, \text{ stejný závěr}$$

4. MAP hypotézou je dle bodu (3) útok medvěda:

$$P(n|o) = P(n|m) = 0.5$$

5. Plné bayesovské učení zohledňuje všechny skryté stavy (jejich vliv váží aposteriorní pstí):

$$P(n|o) = \sum_{p \in m,v,r} P(n|p)P(p|o) = P(n|m)P(m|o) + P(n|r)P(r|o) + P(n|v)P(v|o)$$

$$P(n|o) = 0.5 \times 0.45 + 0.1 \times 0.3 + 0 \times 0.25 = 26\%$$