

Vapnikova-Červoněnkisova dimenze

Návod ke dvanáctému cvičení

ZS 2011/2012

1 VC-dimenze kruhů

1. Uvažujme množinu hypotéz \mathcal{H}_k kruhů ve 2D, které jsou pozitivní uvnitř kruhu a negativní vně. Spočítejte VC dimenzi této třídy hypotéz.
2. Nyní uvažujte množinu hypotéz $\mathcal{H}_{k\pm}$ obsahující jak kruhy (ve 2D), které jsou pozitivní uvnitř a negativní vně, tak i kruhy které jsou pozitivní vně a negativní uvnitř. Ukažte, jak lze rozdrtit (shatter) 4 body s použitím této třídy hypotéz. Tím získáte dolní odhad VC dimenze této třídy hypotéz (jaký?).

2 VC-dimenze lineárních poloprostorů

Uvažujte třídu lineárních separátorů

$$\mathcal{H}_d = \{x \mapsto \text{sign}(w^T x + b) \mid w \in R^d, b \in R\}$$

3. Mějme $d + 1$ bodů obsahujících počátek a vektory standardní báze (tj. vektory s 1 v i -té souřadnici a 0 jinde). Ukažte, že tato množina bodů může být rozdrčena pomocí \mathcal{H}_d .
4. Dokažte, že žádná množina $d + 2$ bodů nemůže být rozdrčena pomocí \mathcal{H}_d . (Nápověda: Použijte Radonovu větu, která říká, že každou množinu $d + 2$ bodů v R^d lze rozdělit do dvou disjunktních množin, jejichž konvexní obaly se překrývají.)

Z toho dostaneme, že VC dimenze množiny hypotéz \mathcal{H}_d je přesně $d + 1$.