# Základy řazení


Karel Richta a kol.

Přednášky byly připraveny s pomocí materiálů, které vyrobili Marko Berezovský, Petr Felkel, Josef Kolář, Michal Píše a Pavel Tvrdík

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze




Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
01/2018, Lekce 4

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b6b36dsa/start

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

# Opakování: Příklad na rekurzi

Mějme rekurzivní funkci fff definovanou následovně:

```
void fff(int x) {
        if (x < 0) return;
        abc(x);
        fff(x-1);
        fff(x-2);
}
```

Nechť je funkce fff volána s parametrem 2, tj.: fff(2);. Funkce abc(x) je pak celkem volána (platí právě jedna z možností):

a) 1 krát

b) 3 krát

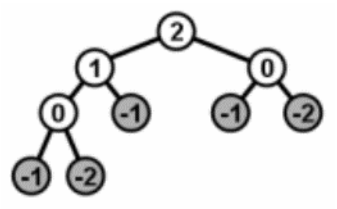
c) 4 krát

d) 7 krát

e) 8 krát

# Příklad na rekurzi - řešení

Strom rekurzivního volání funkce fff vidíme na obrázku (není součástí zadání úlohy).




```
void fff(int x) {
        if (x < 0) return;
        abc(x);
        fff(x–1);
        fff(x–2);
}
```

V každém uzlu je vepsána hodnota parametru x při odpovídajícím volání funkce fff(x). Při volání, kdy je hodnota x je menší než 0 (x = –1 nebo x = –2) , nastává okamžitý návrat z funkce fff a funkce abc v takovém případě již volána není. To znamená, že funkce fff bude volána jen v bílých uzlech stromu na obrázku, jež jsou dohromady 4. Platí varianta c) 4x.

# Příklad na indukci

- Dokažte indukcí, že konvexní obálka n > 2 bodů má nejvýše n hran? Pomůcka: Konvexní obálka n bodů je nejmenší možný konvexní k-úhelník, který obsahuje všech n bodů. Konvexní k-úhelník je takový k-úhelník, kde pokud vezmeme libovolné dva body a spojíme je, tak celá spojnice leží uvnitř tohoto útvaru.


# Příklad na indukci - řešení

- Postupujeme indukcí podle počtu bodů n:
- Počáteční krok:
  - nejmenší smysluplné n je 3, kdy konvexní obal tří bodů má právě 3 hrany (tvoří trojúhelník).
- Indukční krok spočívá v ověření, že pokud má konvexní obal n bodů nejvýše n hran, pak po přidání dalšího bodu bude mít nejvýše n+1 hran. Mohou nastat tři situace:
  - nový bod padne dovnitř konvexního obalu. Pak se ale počet hran konvexního obalu nezmění a platí, že konvexní obal n+1 uzlů má nejvýše n hran (zde dokonce jen n).
  - Pokud by nový bod padnul právě na hranici konvexního obalu, pak rozdělí některou hranu na dvě a konvexní obal n+1 uzlů bude mít nejvýše n+1 hran.
  - Poslední případ je, když nový bod leží mimo původní konvexní obal. Nový konvexní obal vytvoříme tak, že ke stávajícímu obalu přidáme dvě hrany, tvořící tečny současného obalu a vypustíme původní část obalu přemostěnou novou dvojicí. Vypuštěná část má nejméně jednu hranu, čili přidáním dvou nových a vypuštěním jedné staré přidáme nejvýše jednu hranu (můžeme ale také nepřidat žádnou, nebo dokonce jejich počet zmenšit, pokud má původní spojnice dvě a více hran).

q.e.d.

# Příklad na dobu výpočtu

Který z následujících dvou fragmentů programu proběhne rychleji? Kolikrát bude v každém z řešení proveden příkaz sum += i+j, tj. tělo cyklu?

```
int n = 100;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
for (j = 0; j < i; j++)
sum += i+j;
```

```
int n = 75;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
for (j = 0; j < n; j++)
sum += i+j;
```

# Příklad na dobu výpočtu - řešení

- V prvním fragmentu proběhne vnější cyklus 100-krát, vnitřní však proběhne nejprve 0-krát, pak jednou, dvakrát a nakonec 99-krát. Tělo vnitřního cyklu se tedy provede:

  0 + 1 + 2 + ... + 99 = (100/2)*(0+99) =

  = 50 * 99 = 4950-krát.

```
int n = 100;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
for (j = 0; j < i; j++)
sum += i+j;
```

- Ve druhém fragmentu není počet provádění vnitřního cyklu závislý na proměnné vnějšího cyklu, vnější cyklus proběhne 75-krát a v jeho těle pokaždé proběhne vnitřní cyklus rovněž 75-krát. Celkem se tedy tělo vnitřního cyklu provede: 75 * 75 = 5625-krát.

```
int n = 75;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
for (j = 0; j < n; j++)
sum += i+j;
```

- Rychleji proběhne první fragment.

# Příklad na asymptotickou složitost

Substituční metodou ověřte, zda pro:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n^2 & \text{pro } n \geq 4 \\ 1 & \text{pro } n < 4 \end{cases}$$

platí, že: $T(n) \in O(n^2)$.

# Příklad na asymptotickou složitost

Substituční metodou ověřte, zda pro:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n^2 & \text{pro } n \geq 4 \\ 1 & \text{pro } n < 4 \end{cases}$$

platí, že: $T(n) \in O(n^2)$.

Řešení:

Z definice $O(T(n))$ musí platit: $\exists c > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : T(n) \leq c \cdot n^2$. To chceme dokázat indukcí pro libovolné $n$.

Počáteční krok: Pro $n$ = 1 triviálně platí, že $T(1) = 1 \in O(1^2) = O(1)$. Obdobně ověříme i pro $n \in \{2,3,4\}$.

Indukční předpoklad: Nechť dokazovaný vztah platí pro instanci o velikosti $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, tj. $T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) \leq c \cdot \lfloor \frac{n}{4} \rfloor^2$.

Indukční krok: Provedeme substituci, odstranění dolní celé části a další úpravy:

$$T(n) = 2T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n^2 \leq 2 \cdot c \lfloor \frac{n}{4} \rfloor^2 + n^2 \leq 2 \cdot c\left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2 = \left(\frac{c+8}{8}\right) \cdot n^2 \leq c \cdot n^2$$

Poslední nerovnost platí pro všechna $n$ a $c \geq \frac{8}{7}$.

# Příklad na asymptotickou složitost

Zjistěte asymptotickou složitost:

$T(1) = 1$

$T(n) = 2T(n/2) + n^2$

mistrovskou metodou (pomoci Master teorému). Pečlivě zkontrolujte a zapište všechny předpoklady této věty!

# Příklad na asymptotickou složitost - řešení

Abychom mohli použít mistrovskou větu, musí mít rekurzivní rovnost správný tvar:

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

To zde platí pro a=2 a b=2. Pak musíme porovnat:

$n^{\lg 2}$ (tj. n) a $n^2$.

Zřejmě $f(n) = n^2 = \Omega(n^{\lg 2+e}) = \Omega(n^{1+1}) = \Omega(n^2)$, pro $e = 1 > 0$. To by ukazovalo na třetí variantu mistrovské věty, ale musí ještě platit:

$a * f(n/b) \leq c * f(n)$ pro pro nějaké $c < 1$ a dostatečně velká n.

Dosadíme-li za a, b a f(n):

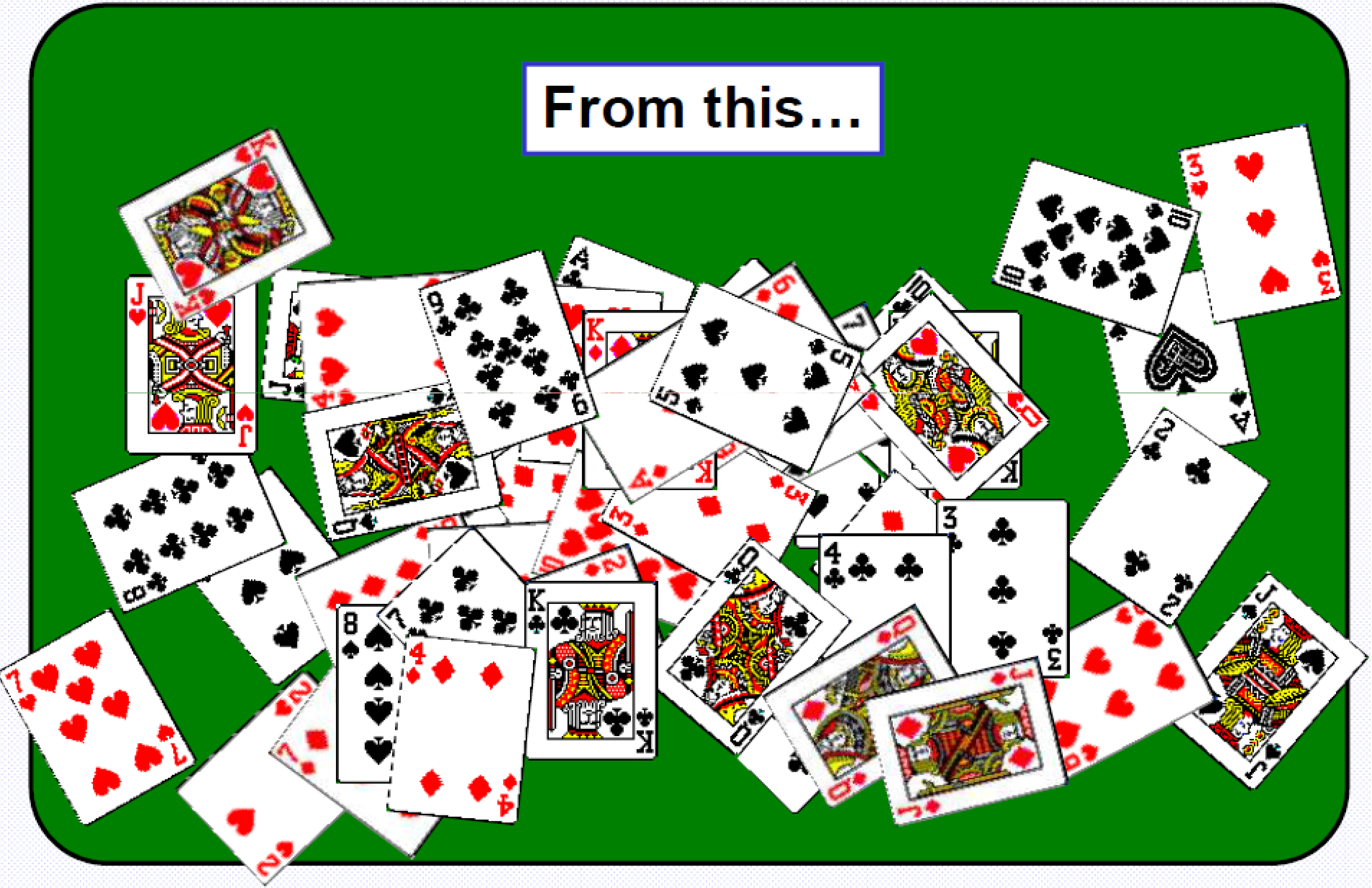
$2 * f(n/2) \leq c * f(n)$ pro dostatečně velká n, tj.:

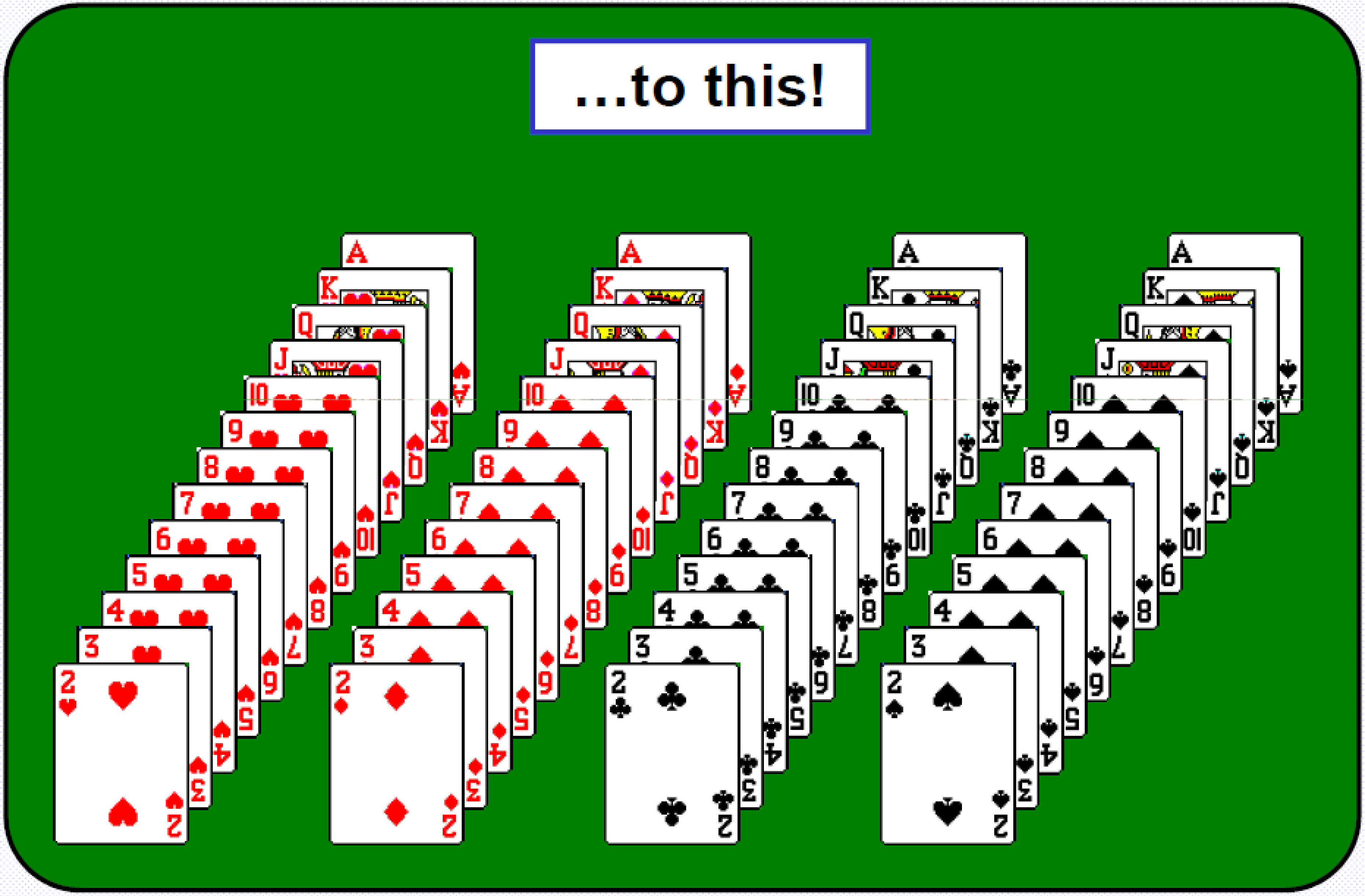
$2 * (n/2)^2 = n^2/2 \leq c * n^2$ a to platí např. pro c=1/2.

Platí tedy třetí možnost mistrovské věty a $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$.

# Definice problému řazení

- Mějme parciálně uspořádanou množinu (poset) M, kde uspořádání je binární relace $\leq \subseteq M \times M$, která je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická.
- Definice problému řazení:
- Na vstupu je posloupnost  prvků z M; cílem je najít takovou posloupnost prvků z M, pro kterou platí dvě základní kritéria:
  - výstupní posloupnost je <u>seřazená</u> a
  - výstupní posloupnost je <u>permutací</u> původní posloupnosti (obsahuje tedy stejná data, jen v jiném pořadí).
- Z hlediska řazení se vstupní data často chápou jako soubor dvojic klíč–hodnota, přičemž po seřazení je posloupnost <u>klíčů</u> monotónní, zatímco na připojené hodnoty se při řazení nebere zřetel. Při existenci několika položek se stejným klíčem se však podle pořadí odpovídajících hodnot rozlišují <u>stabilní</u> a <u>nestabilní</u> algoritmy. V definici relace uspořádání $\leq$ se přitom bere ohled pouze na klíče příslušných hodnot.


From this…


...to this!

# Základní taxonomie řazení

- Řazení bez využití porovnání (adresní řazení: radix-sort, bucket-sort)
- Řazení využívající porovnání (asociativní řazení):
  - Nevyvážené dělení řazené posloupnosti:
    - Důraz na analýzu (řazení přímým výběrem: selection–sort)
    - Důraz na syntézu (řazení přímým zatřiďováním: insertion-sort)
  - Vyvážené dělení řazené posloupnosti:
    - Důraz na analýzu (řazení dělením: quick-sort)
    - Důraz na syntézu (řazení slučováním: merge-sort)

Cvičení

Navrhněte a popište algoritmus pro seřazení balíčku karet.

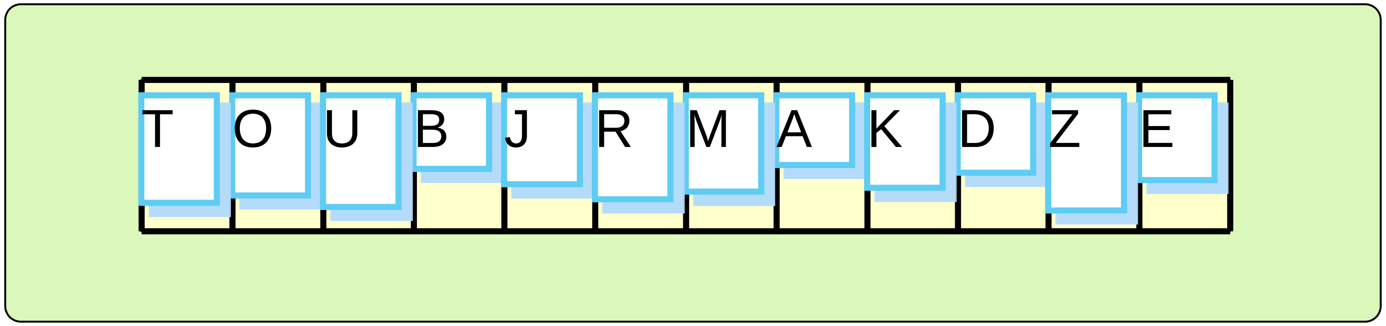
- Smíte používat jen jednu ruku a v ní smíte držet vždy nanejvýš jednu kartu.
- Během řazení můžete (a musíte) odkládat karty do několika pomocných balíčků.
- Z každého balíčku je vidět a je známa pouze hodnota vrchní karty.

Úkolem je sestavit algoritmus tak, aby využíval co nejmenšího počtu pomocných balíčků.

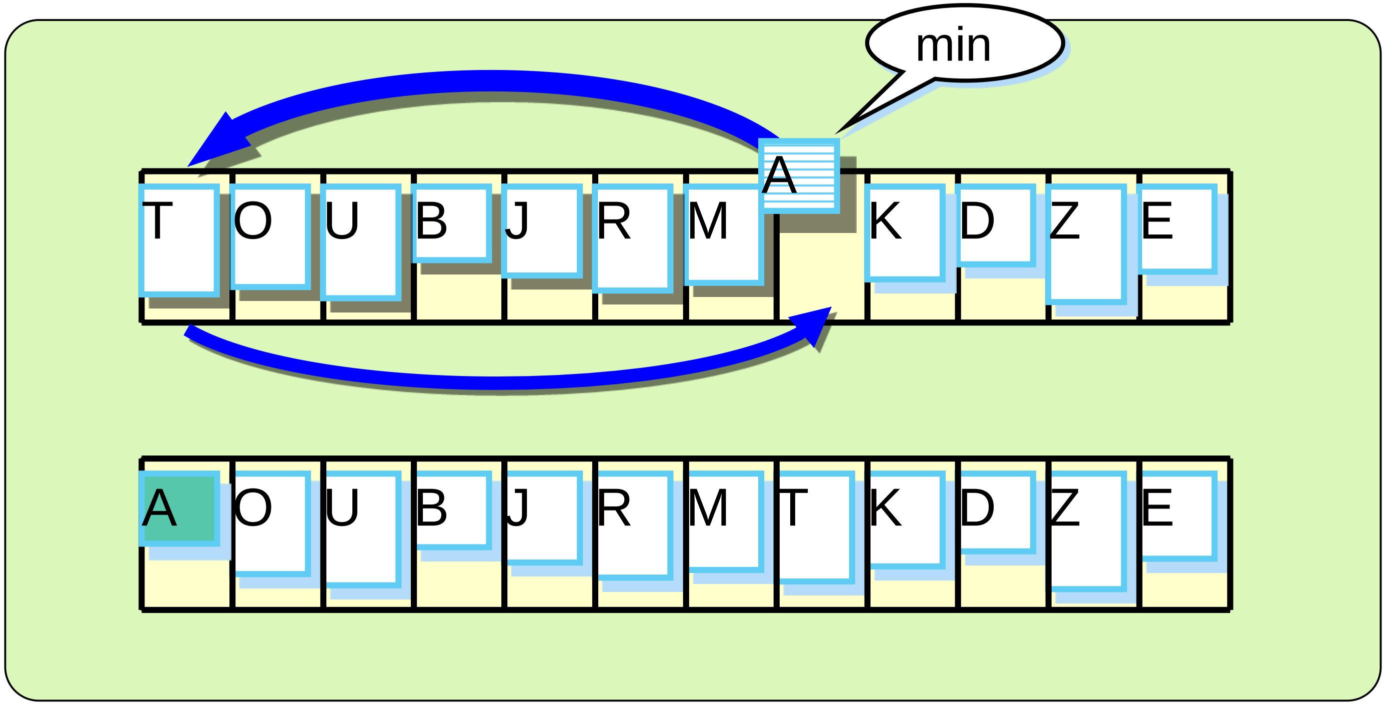
# SELECTION-SORT
# řazení přímým výběrem

# Selection-Sort

Start

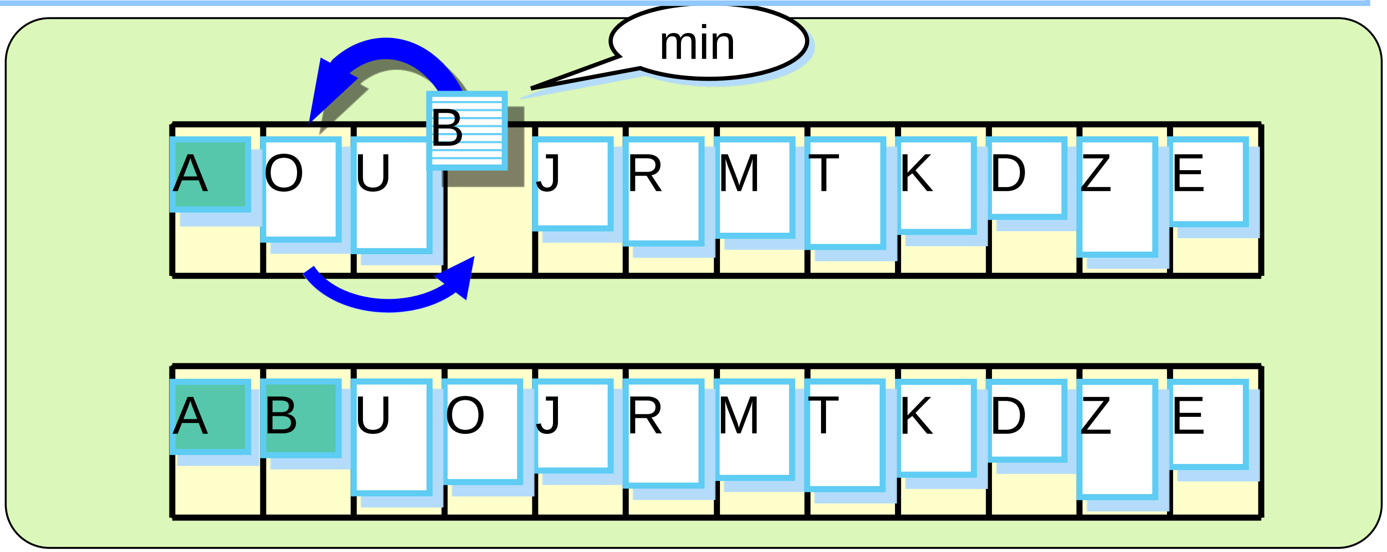



Krok 1

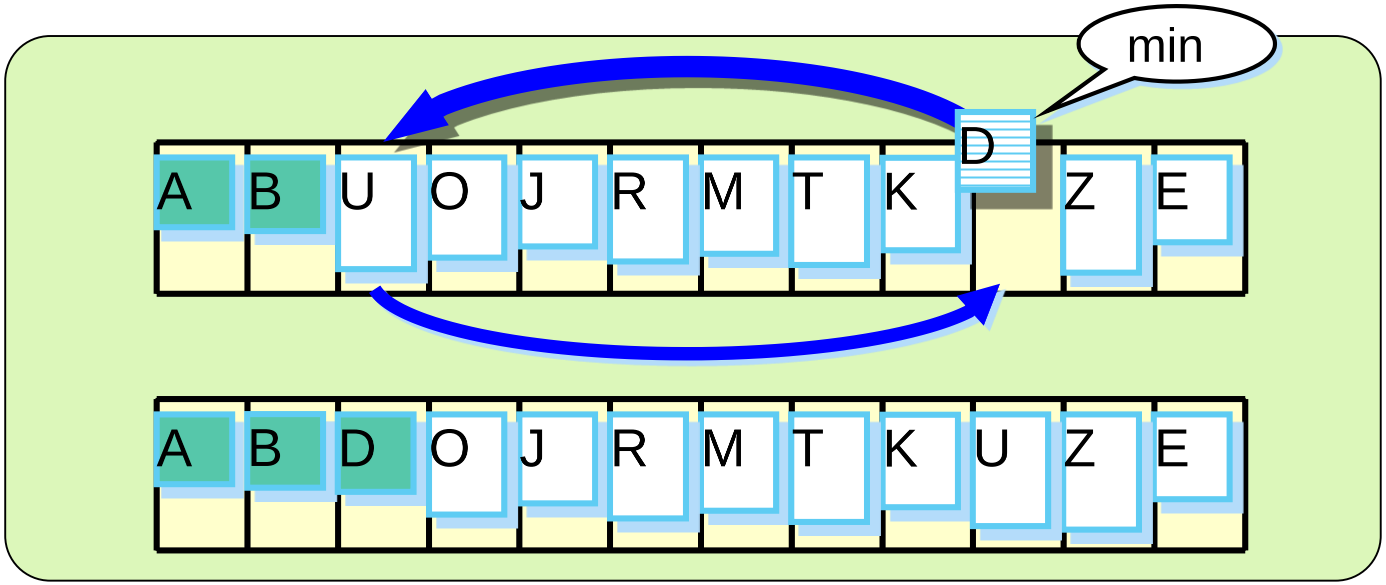


# SELECTION-SORT

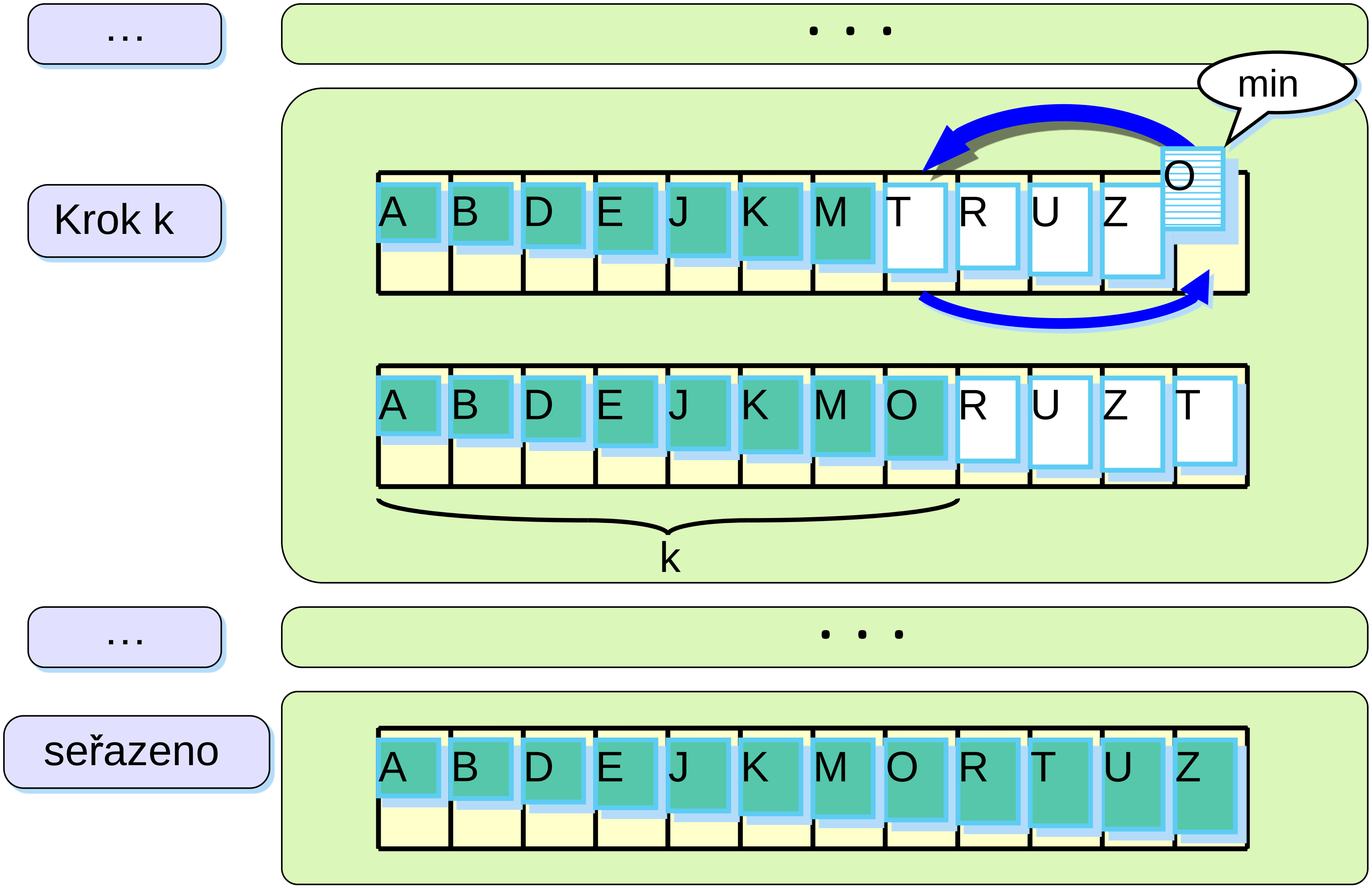
Krok 2




Krok 3



# SELECTION-SORT



# Pseudokód pro SELECTION-SORT

```
SELECTION-SORT(A)
  n = A.length
  for j = 1 to n − 1
      smallest = j
      for i = j + 1 to n
          if A[i] < A[smallest]
              smallest = i
      exchange A[j] with A[smallest]
```

- Algoritmus udržuje invariant, že na začátku každé iterace ve vnější smyčce pro *j* obsahuje podpole *A*[1..*j*-1] *j*-1 nejmenších elementů v poli *A*[1..*n*] a tyto elementy jsou seřazeny podle velikosti.
- Po prvých *n*-1 krocích podpole A[1..*n*-1] obsahuje *n*-1 seřazených elementů.
- Proto element A[*n*] musí být největší element.

## SELECTION-SORT

```
for (j = 0; j < n-1; j++) {
                                        // select min
   smalest = j;
   for (i = j+1; i < n; i++) {
      if (a[i] < a[smalest]) {
         smalest = i;
      }
   }
                                        // exchange min
   min = a[smalest];
   a[smalest] = a[j];
   a[j] = min;
}
```

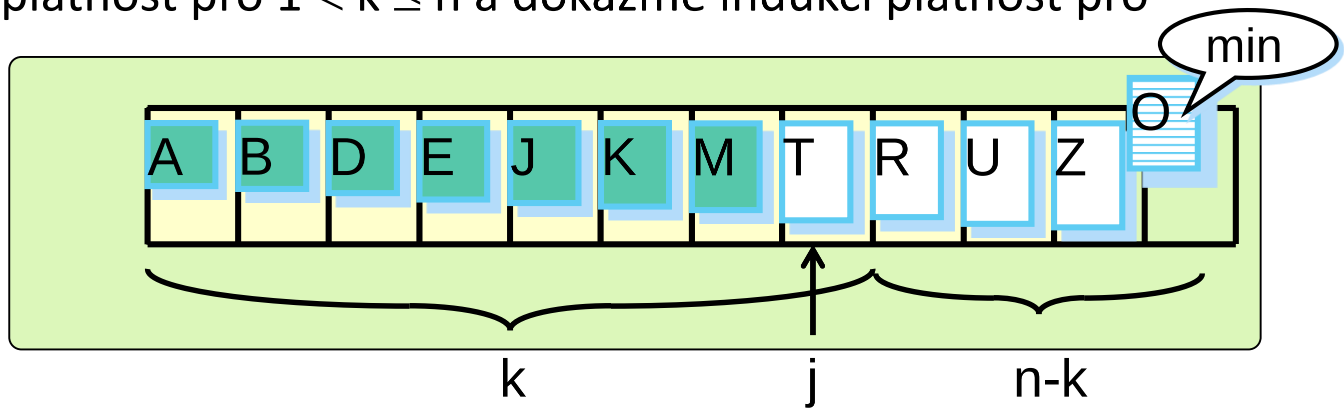
# Platí požadovaný invariant?

```
for (j = 0; j < n-1; j++) {
  // tady musí platit, že začátek do j-1 je seřazen
  smalest = j;
  for (i = j+1; i < n; i++) {
    if (a[i] < a[smalest]) { smalest = i; }
  }
  min = a[smalest]; a[smalest] = a[j]; a[j] = min;
}
```

- Pro n=1 to zřejmě platí (triviálně).
- Předpokládejme platnost pro $1 < k \leq n$ a dokažme indukcí platnost pro k+1.

Pomůcka:

- j se nemění
- a[j] >= a[j-1]



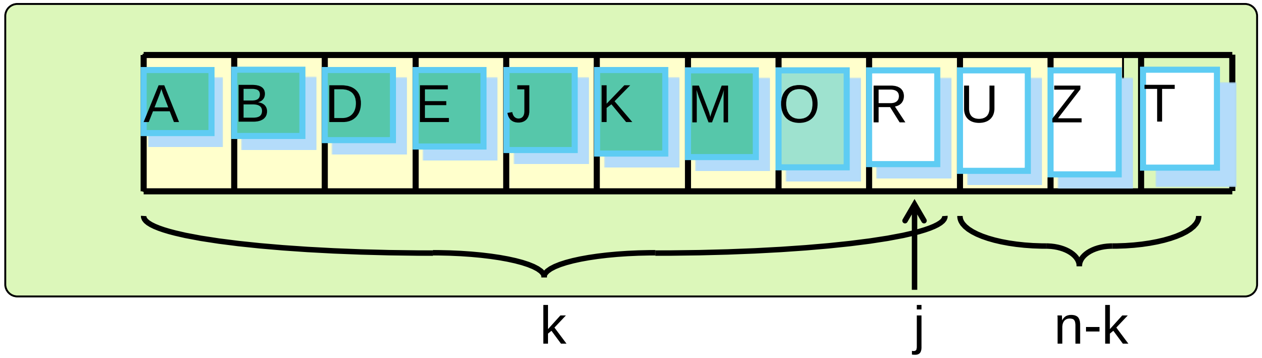
# Platí požadovaný invariant?

```
for (j = 0; j < n-1; j++) {
  // tady musí platit, že začátek do j-1 je seřazen
  smalest = j;
  for (i = j+1; i < n; i++) {
    if (a[i] < a[smalest]) { smalest = i; }
  }
  min = a[smalest]; a[smalest] = a[j]; a[j] = min;
}
```

- Pro n=1 to zřejmě platí (triviálně).
- Předpokládejme platnost pro $1 < k \leq n$ a dokažme indukcí platnost pro k+1.

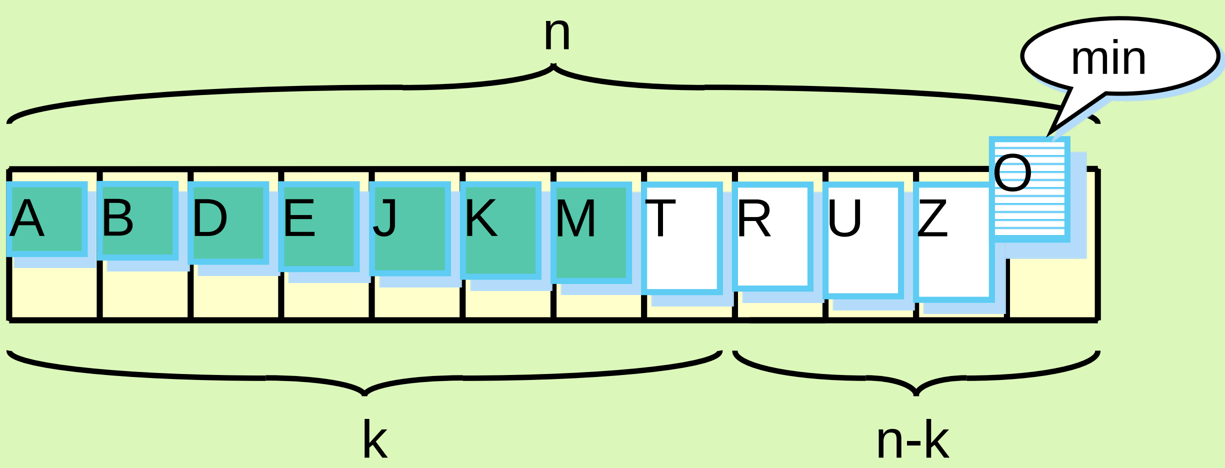
Pomůcka:

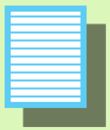
- j se nemění
- a[j] >= a[j-1]



# Selection-Sort

Krok k



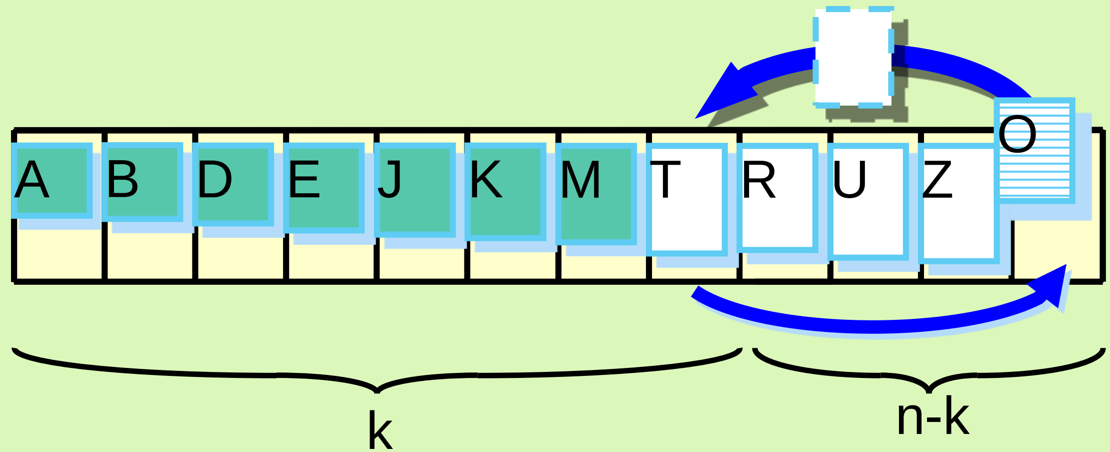

Výběr minima  ....... (n-k) testů

Celkem testů

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(n^2 - n)}$$

# SELECTION-SORT

Krok k




přesuny ....... 3

Celkem přesunů

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3 = \boxed{3(n-1)}$$

# SELECTION-SORT

Shrnutí

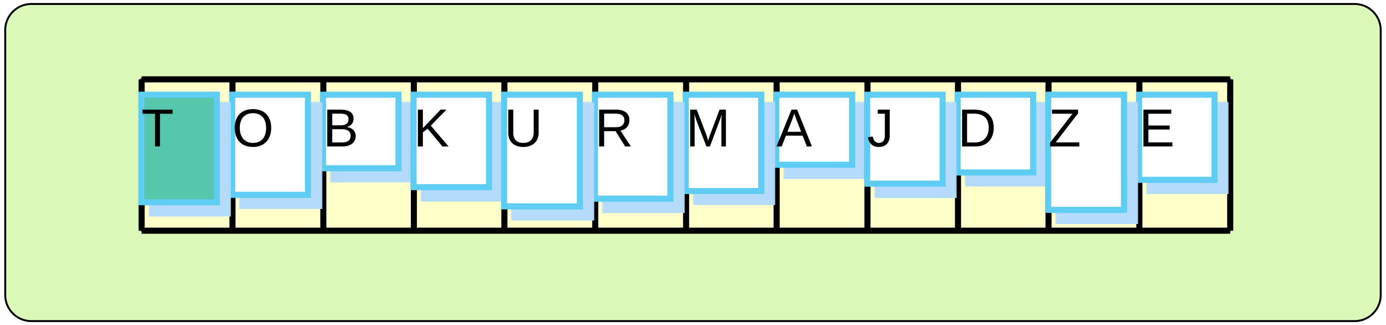
| | |
|---|---|
| Celkem testů | $\frac{1}{2}(n^2 - n) = \Theta(n^2)$ |
| Celkem přesunů | $3(n-1) = \Theta(n)$ |
| Celkem operací | $\frac{1}{2}(n^2 - n) + 3(n-1) = \Theta(n^2)$ |

**Asymptotická složitost SELECTION-SORT je $\Theta(n^2)$**

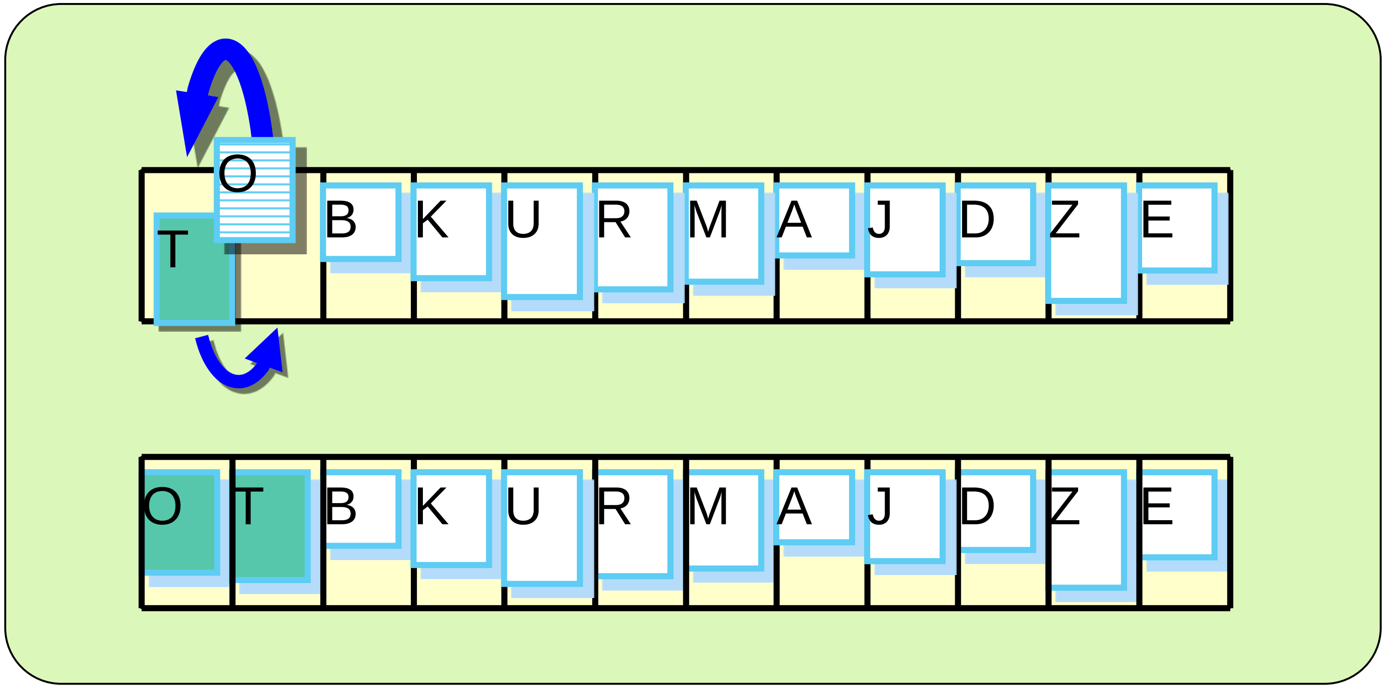
# INSERTION-SORT
# řazení přímým vkládáním

# INSERTION-SORT

Start

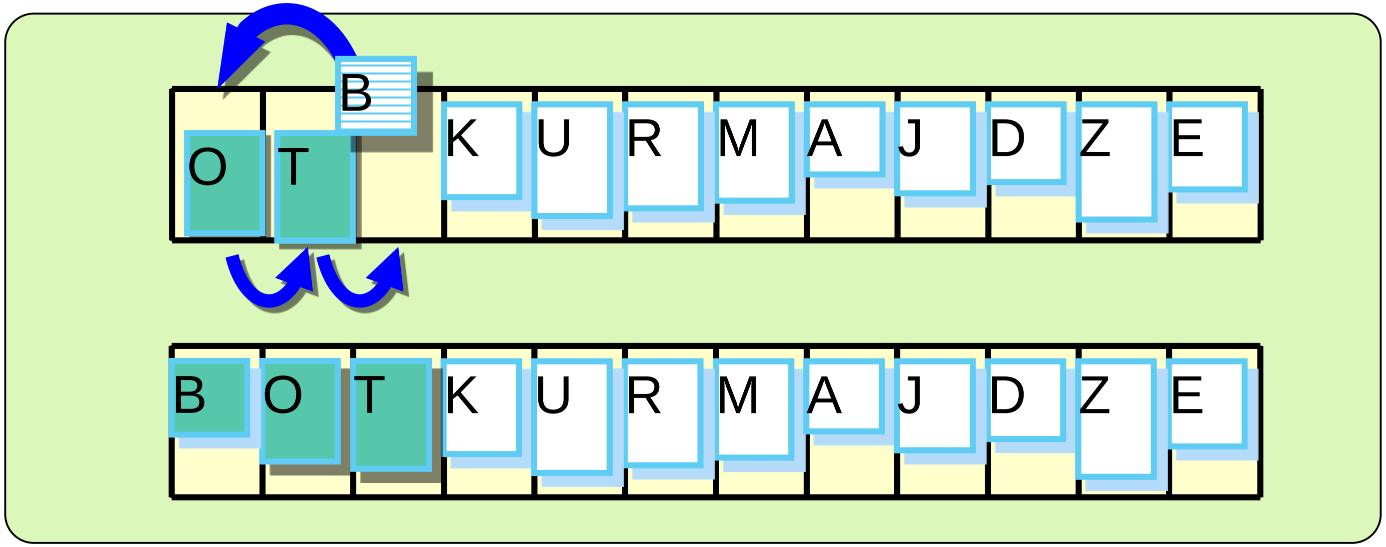



Krok 1

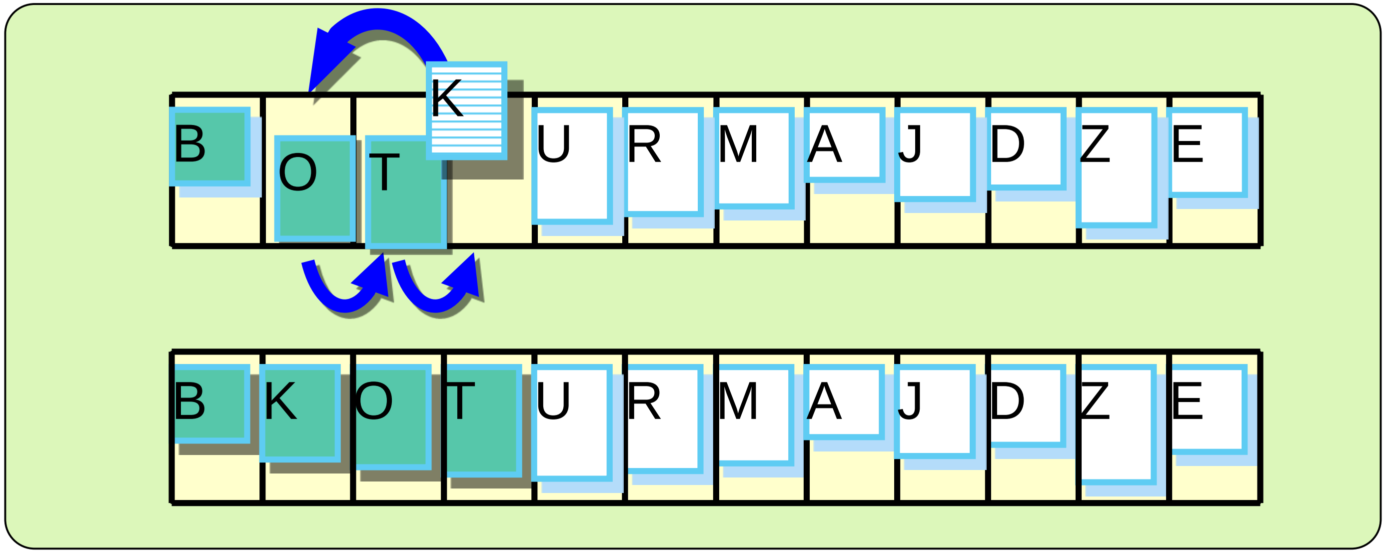


# INSERTION-SORT

Krok 2




Krok 3

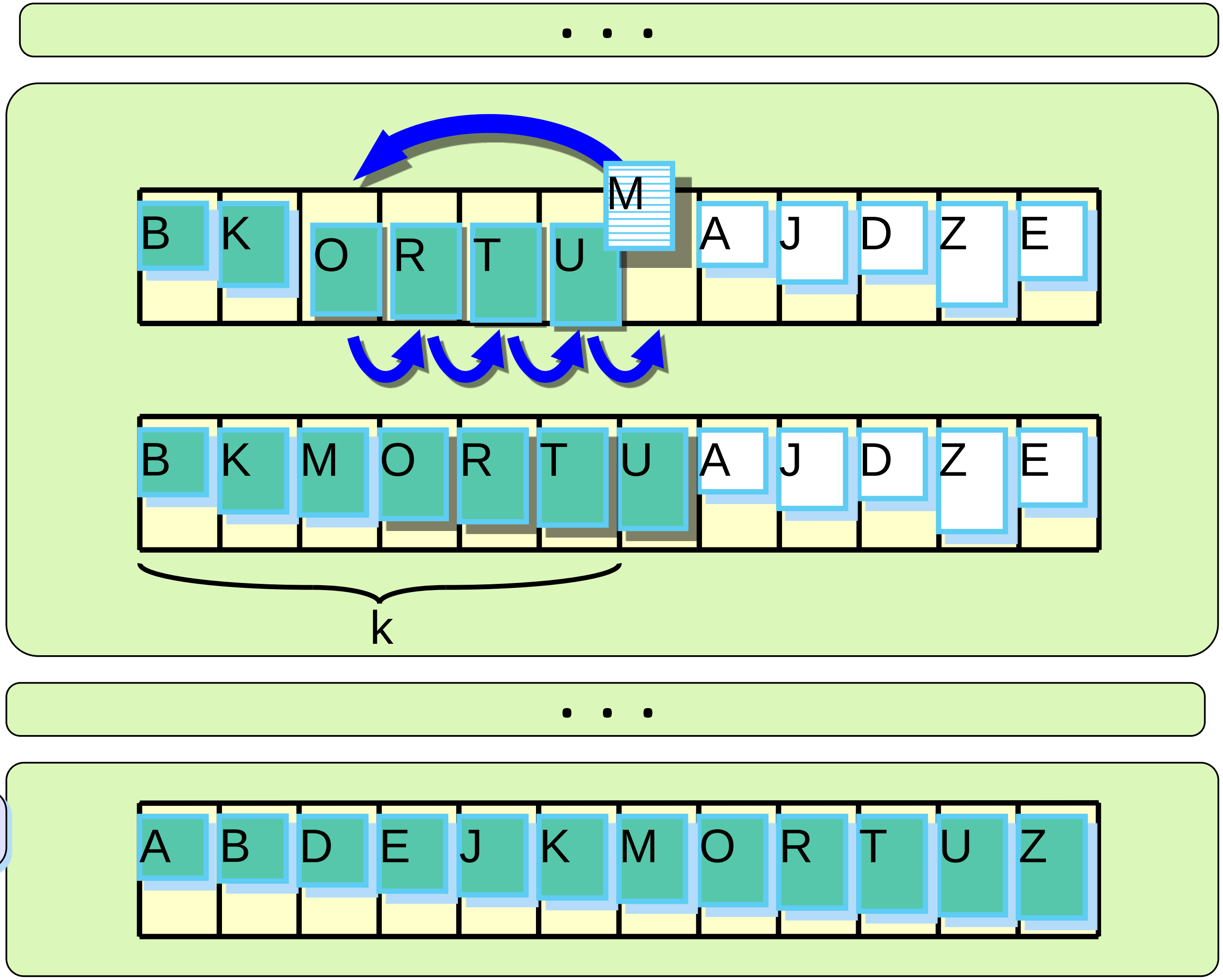


# INSERTION-SORT

...

Krok k

seřazeno



## INSERTION-SORT

```
for (j = 1; j < n; j++) {
                                        // find & make
                                        // place for a[j]
   insVal = a[j];
   i = j-1;
   while ((i >= 0) && (a[i] > insVal)) {
      a[i+1] = a[i];
      i--;
   }
                                        // insert a[j]
   a[i+1] = insVal;
}
```

# Korektnost algoritmu INSERTION-SORT

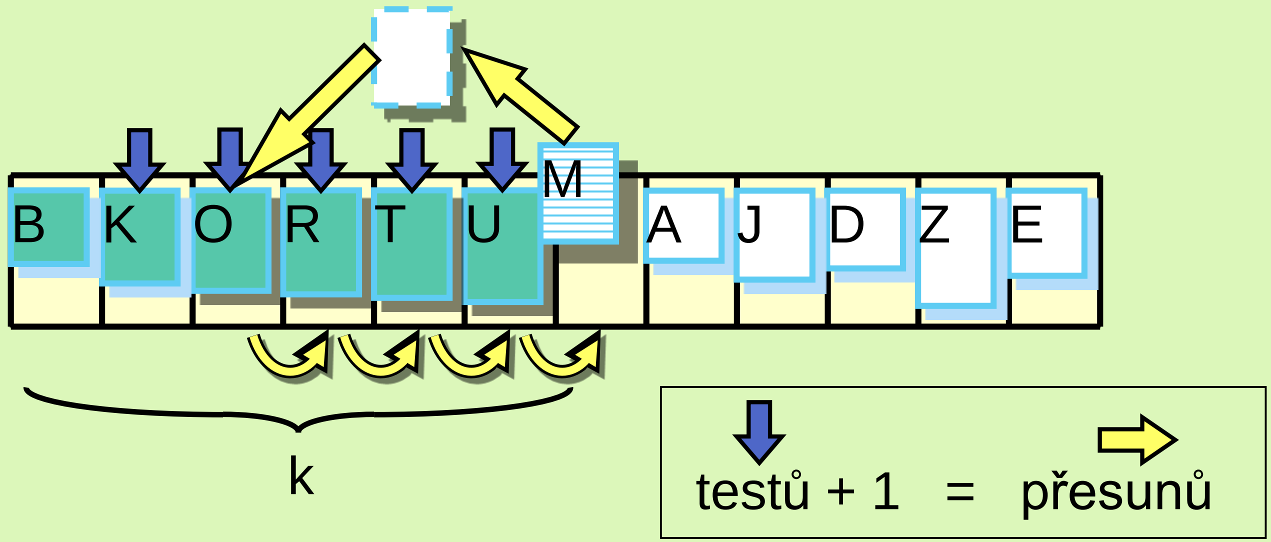
- Abychom zjistili, že algoritmus vždy dává korektní výsledky, zpravidla dokazujeme ***invariant algoritmu***.
- **Invariant pro INSERTION-SORT**: Na začátku každé vnější iterace pro $j$ obsahuje podpole $A[1..j-1]$ $j$-1 nejmenších elementů v poli $A[1..n]$ a tyto elementy jsou seřazeny podle velikosti.
- Musíme dokázat 3 věci:
  - **Počáteční krok (initialization):** Invariant platí před první iterací.
  - **Indukční krok (maintenance):** Pokud invariant platí před iterací, zůstane v platnosti i po iteraci (před další iterací).
  - **Terminace:** Algoritmus musí po konečném počtu iterací skončit.
- Tyto vlastnosti zajistí, že algoritmus je **korektní**.

# Korektnost INSERTION-SORT

- **Počáteční krok (initialization):** před první iterací je j = 1. Proto podpole o jednom prvku a[0] je triviálně seřazeno.
- **Indukční krok (maintenance):** V podstatě se jedná o invariant vnitřního cyklu (**while**). Předpoklad je, že a[0..j-1] je seřazeno. Vybraný prvek a[j] je zatříděn do tohoto úseku před nejblíže větší prvek. Zřejmě tedy bude po jeho vložení seřazen i úsek a[0..j].
- **Terminace:** Vnější cyklus skončí, když j ≥ n, tj. j = n. Navíc je úsek a[0..n] seřazen vzestupně.

# INSERTION-SORT

Krok k




| | | |
|---|---|---|
| testů ……. | 1 | nejlepší případ |
| | k | nejhorší případ |
| | (k+1)/2 | průměrný případ |

| | | |
|---|---|---|
| přesunů ……. | 2 | nejlepší případ |
| | k+1 | nejhorší případ |
| | (k+3)/2 | průměrný případ |

# INSERTION-SORT

## Shrnutí

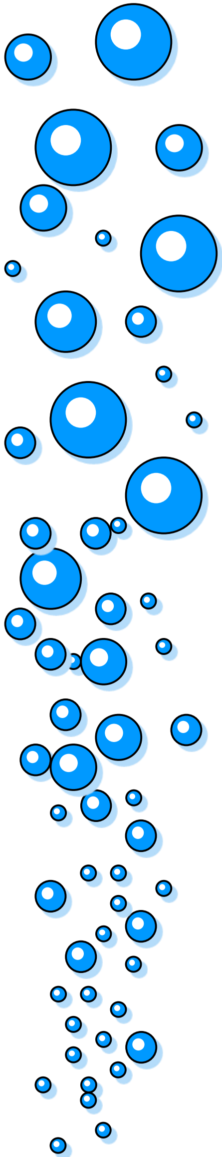
**Celkem testů**

| | | |
|---|---|---|
| $n - 1$ | $= \Theta(n)$ | nejlepší případ |
| $(n^2 - n)/2$ | $= \Theta(n^2)$ | nejhorší případ |
| $(n^2 + n - 2)/4$ | $= \Theta(n^2)$ | průměrný případ |

**Celkem přesunů**

| | | |
|---|---|---|
| $2n - 2$ | $= \Theta(n)$ | nejlepší případ |
| $(n^2 + n - 2)/2$ | $= \Theta(n^2)$ | nejhorší případ |
| $(n^2 + 5n - 6)/4$ | $= \Theta(n^2)$ | průměrný případ |

**Asymptotická složitost INSERTION-SORT je $O(n^2)$ (!!)**

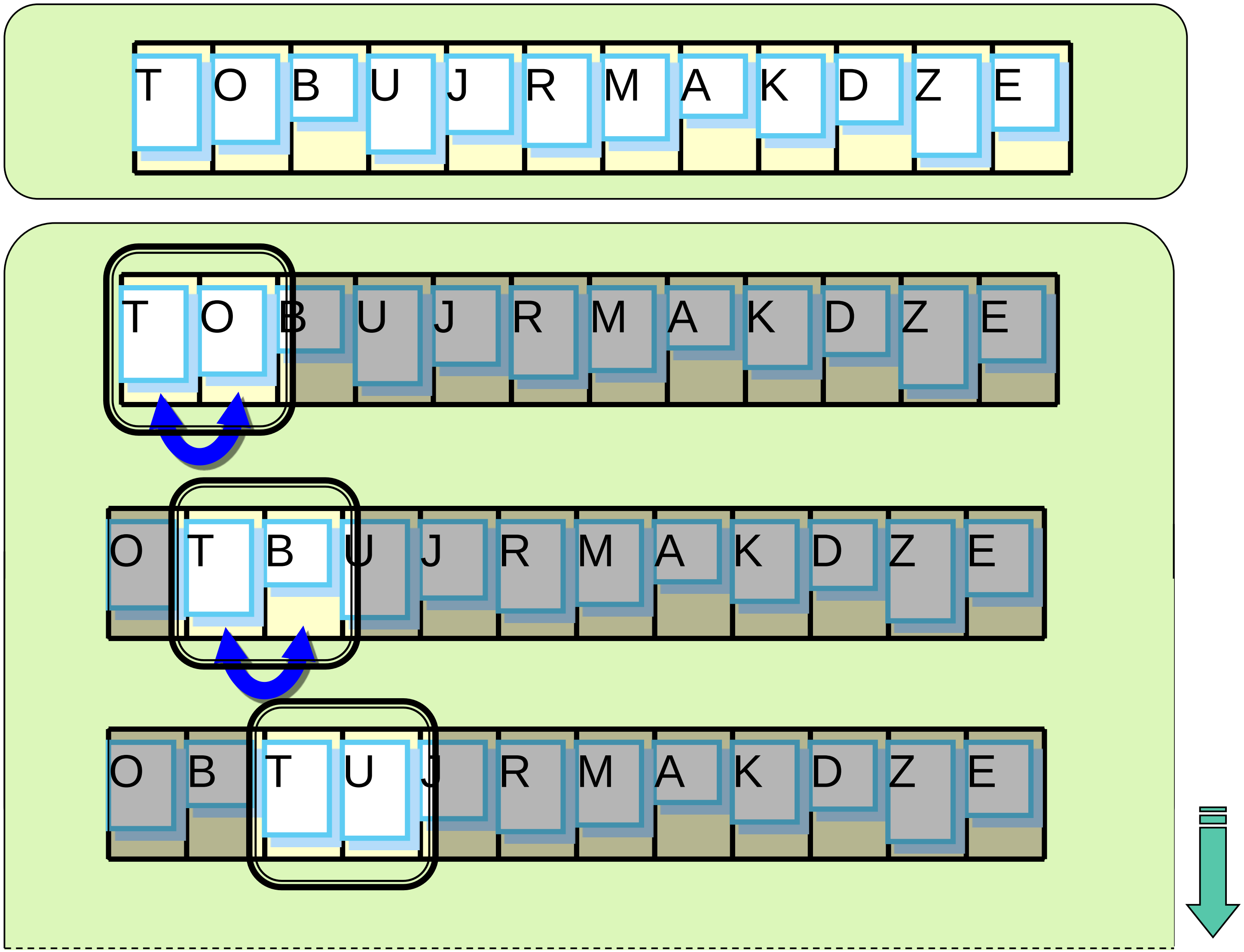


# Bubble-Sort
# bublinkové řazení

# BUBBLE-SORT

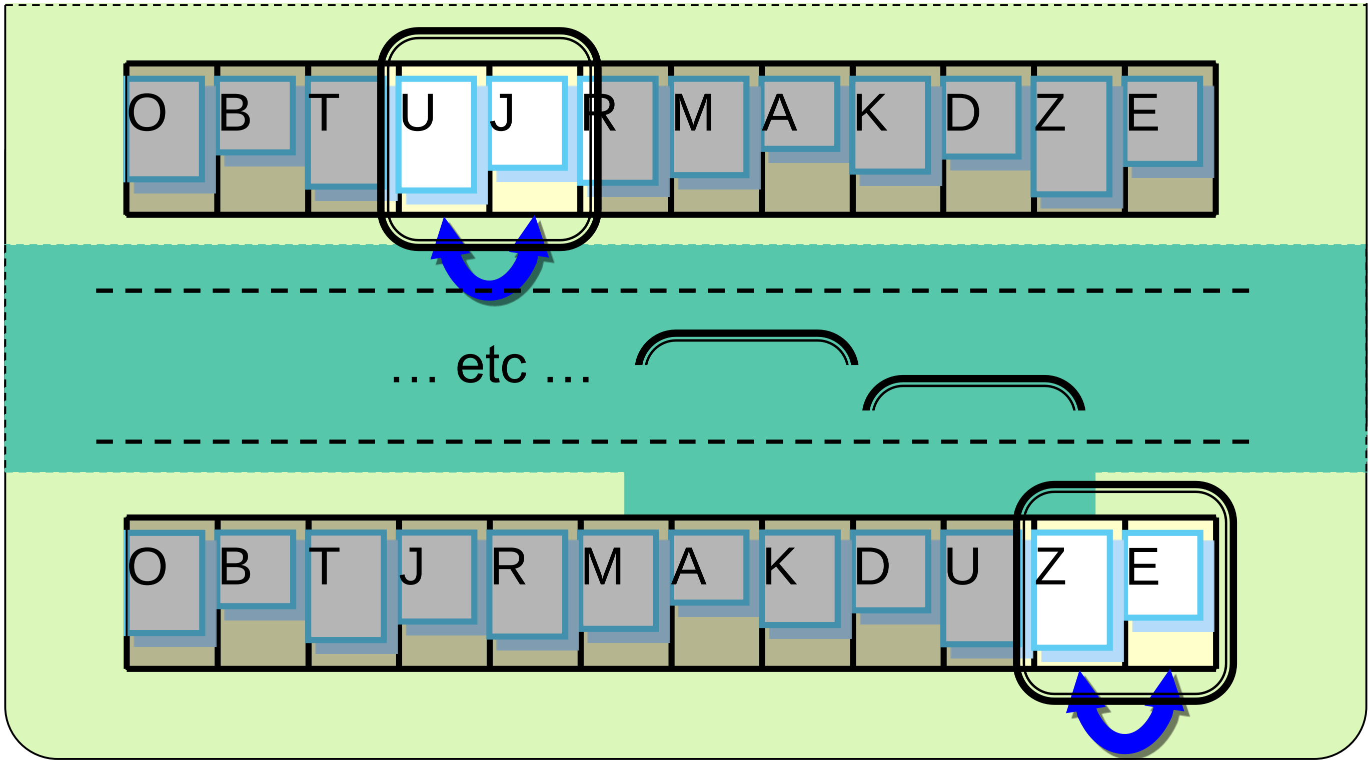
Start

Fáze 1

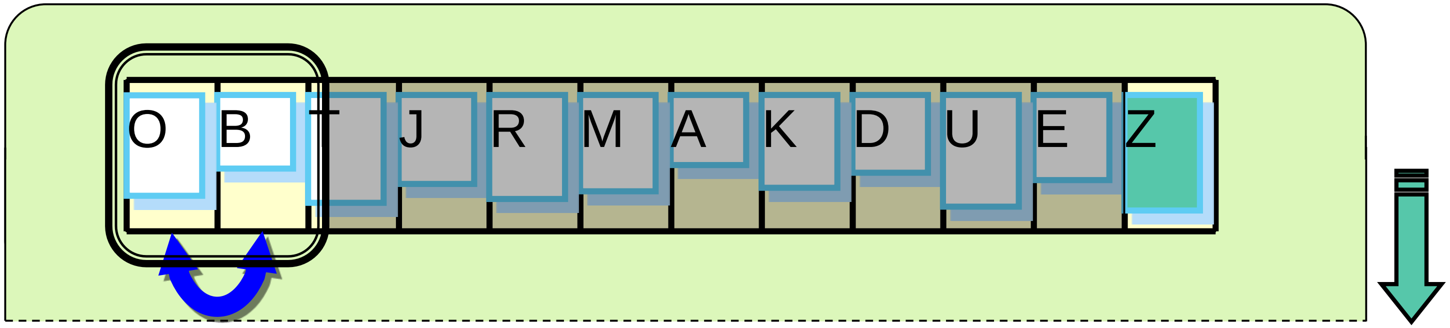


# Bubble-Sort

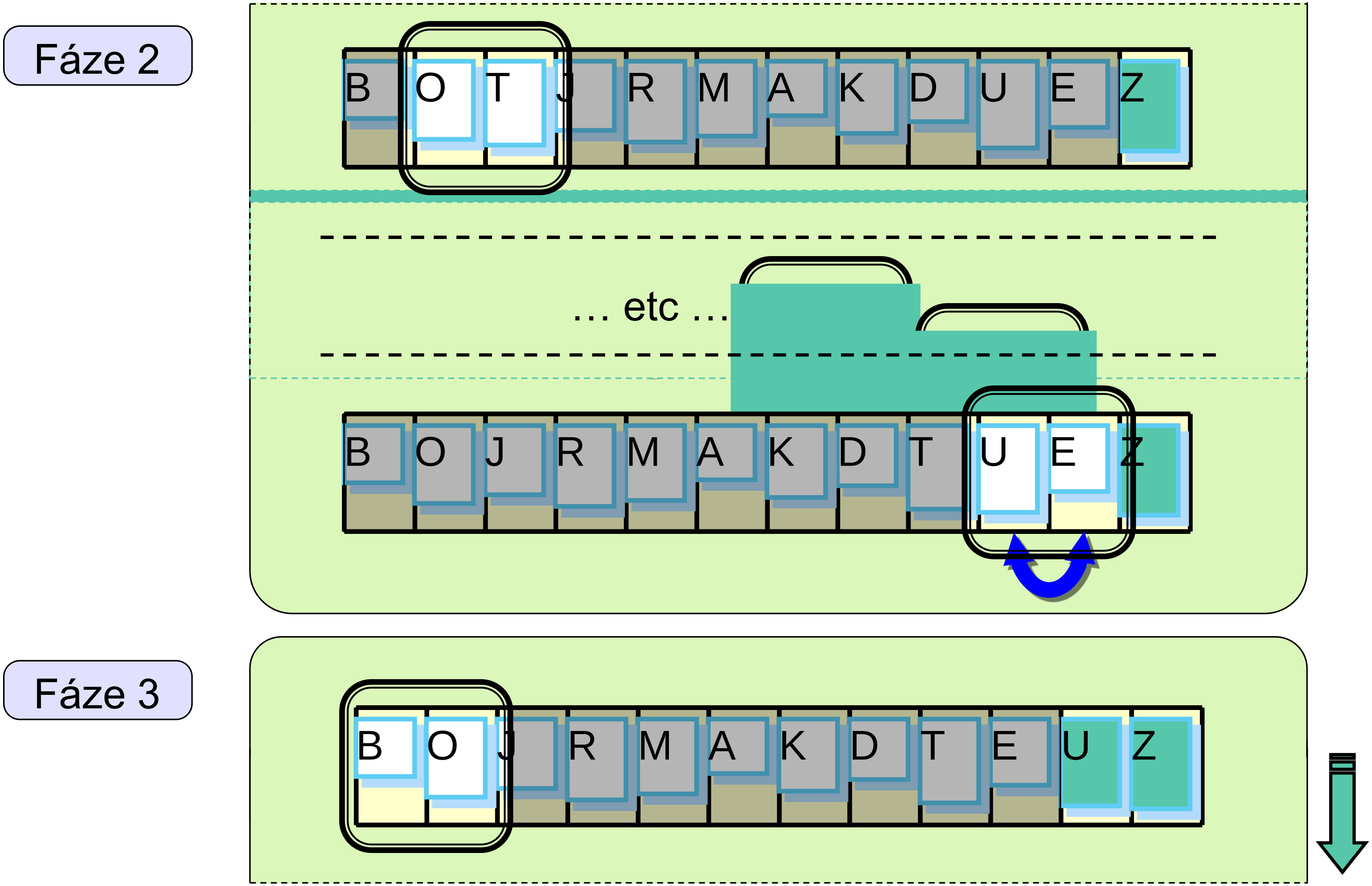
Fáze 1



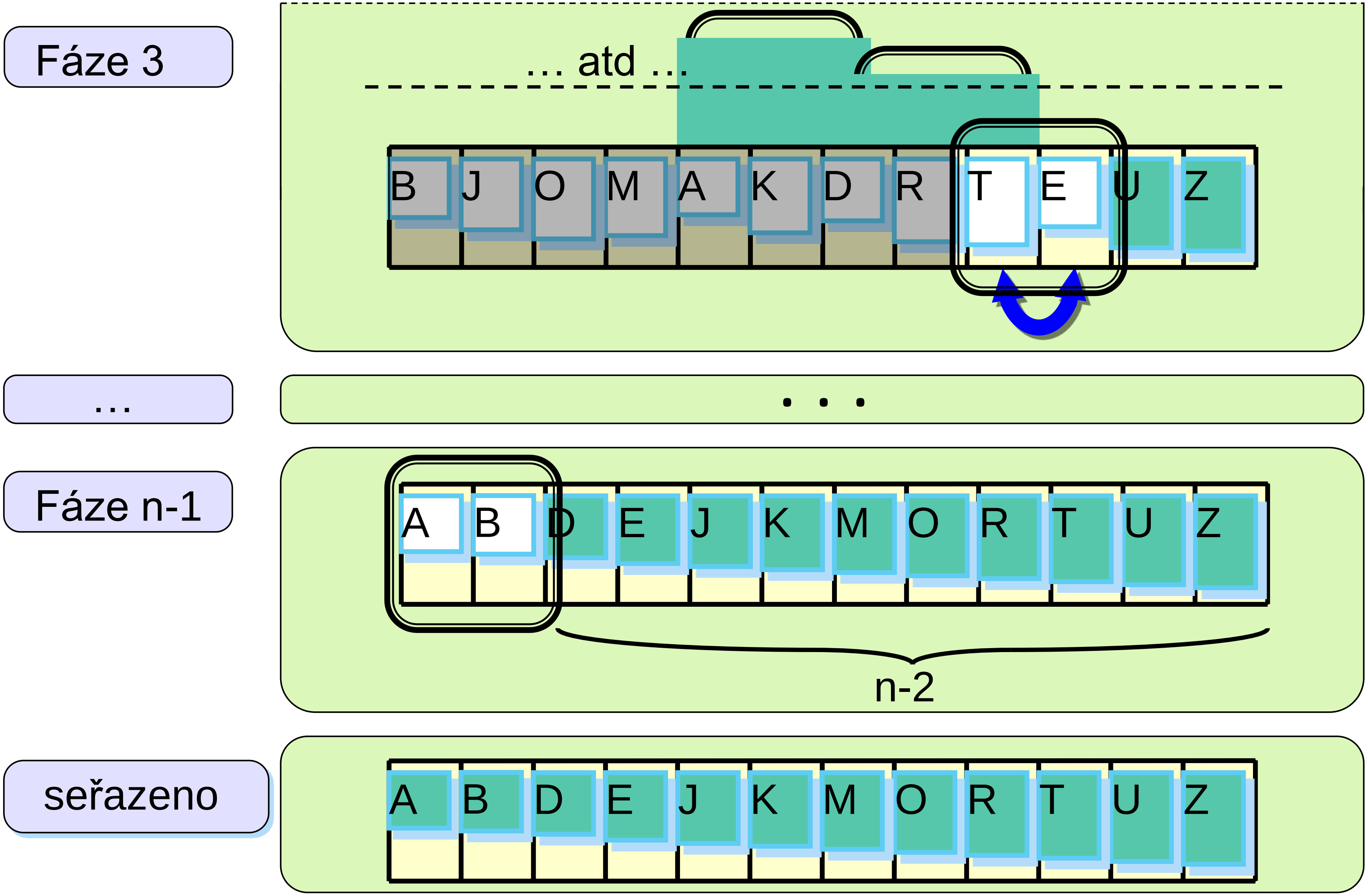

Fáze 2



# Bubble-Sort



# Bubble-Sort


Fáze 3
… atd …
B J O M A K D R T E U Z
…
. . .
Fáze n-1
A B D E J K M O R T U Z
n-2
seřazeno
A B D E J K M O R T U Z

# BUBBLE-SORT

```
for (lastPos = n-1; lastPos > 0; lastPos--)
  for (j = 0; j < lastPos; j++)
    if (a[j] > a[j+1]) swap(a, j, j+1);
```

Shrnutí

Celkem testů

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{1}{2}(n^2 - n) = \Theta(n^2)$$

Celkem přesunů

$0 = \Theta(1)$ nejlepší případ

$\frac{1}{2}(n^2 - n) = \Theta(n^2)$ nejhorší případ

---

**Asymptotická složitost BUBBLE-SORT je $\Theta(n^2)$**

# SHELL-SORT
# řazení se snižujícím se příspěvkem

# Řazení metodou ShellSort

- **ShellSort** nebo též řazení se snižujícím se přírůstkem je řadicí algoritmus založený na principu bublinkového vkládání, který objevil a v roce 1959 publikoval Donald Shell.
- V několika průchodech se řadí prvky od sebe stejně vzdálené pomocí bublinkového vkládání. Vzdálenost prvků od sebe *(krok)* se pak postupně snižuje, až je rovna jedné, tj. klasický BubbleSort.
- Bublinkové řazení porovnává a vyměňuje sousední prvky. **ShellSort** se snaží nejprve vyměnit prvky vzdálenější a teprve poté prvky bližší. Vzdálené prvky pak nemusí „probublávat“ celým polem.
- Praktický problém je stanovení „délky“ kroku.

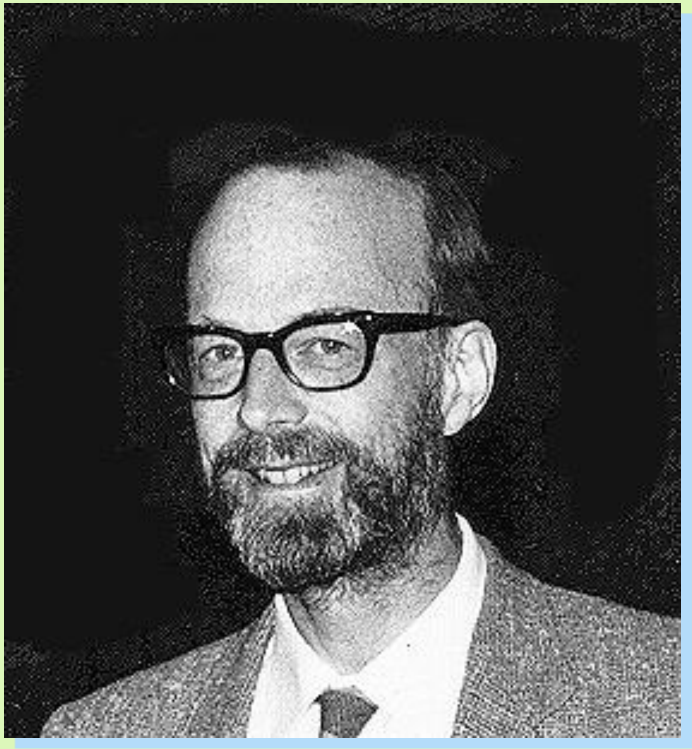
# Implementace v Javě

```
public static void shellSort(int[] a) {
  for (int krok = a.length / 2;
       krok > 0;
       krok = (krok == 2 ? 1 :
                 (int)Math.round(krok / 2.2))) {
    for (int i = krok; i < a.length; i++) {
       int temp = a[i];
       for (int j = i;
            j >= krok && a[j - krok] > temp;
            j -= krok) {
          a[j] = a[j - krok]; // prohoď prvky v nesprávném
          a[j - krok] = temp; // pořadí
       }
    }
  }
}
```

# Složitost SHELLSORT

- Teoretické analýzy nenašly nejvhodnější řadu snižujících se kroků. Kerninghan a Ritchie ve své implementaci používali krok n/2, který pak postupně dělili dvěma.
- Zde je použita úprava kroku koeficientem 2.2 podle Marcina Ciury, což se zdá vést k nejlepším výsledkům.
- **SHELLSORT** je nestabilní řadicí metoda (tj. nezachovává původní pořadí dvou prvků se stejným klíčem.
- Časová složitost metody **SHELLSORT** je přibližně rovna $n^{3/2}$. Tím se zdá být nejlepší v kategorii metod složitosti $\Theta(n^2)$.

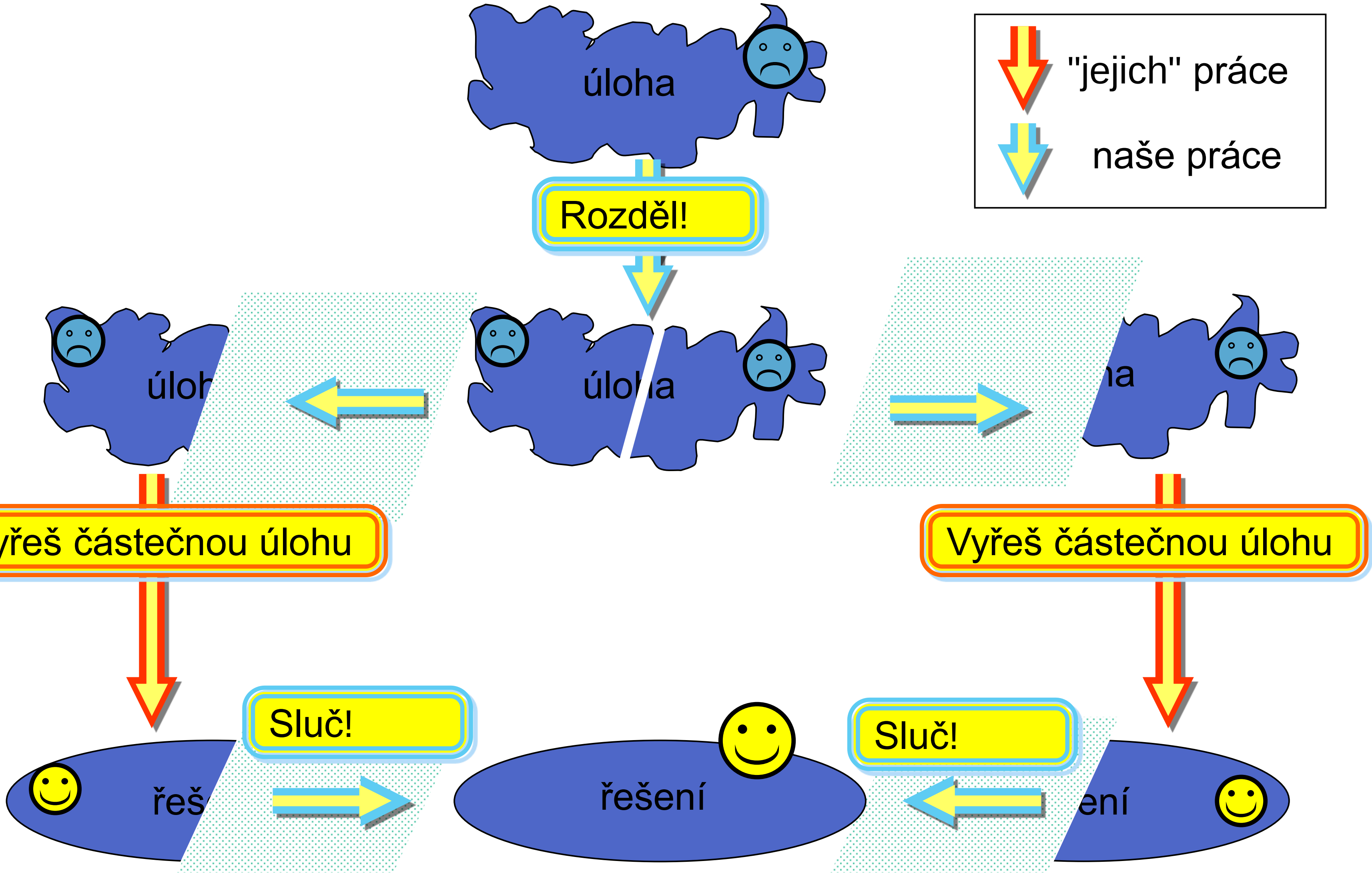
# QUICK-SORT



Sir Charles Antony Richard Hoare

C. A. R. Hoare: Quicksort. Computer Journal, Vol. 5, 1, 10-15 (1962)

Rozděl a Panuj!   Divide & Conquer!   Divide et Impera!

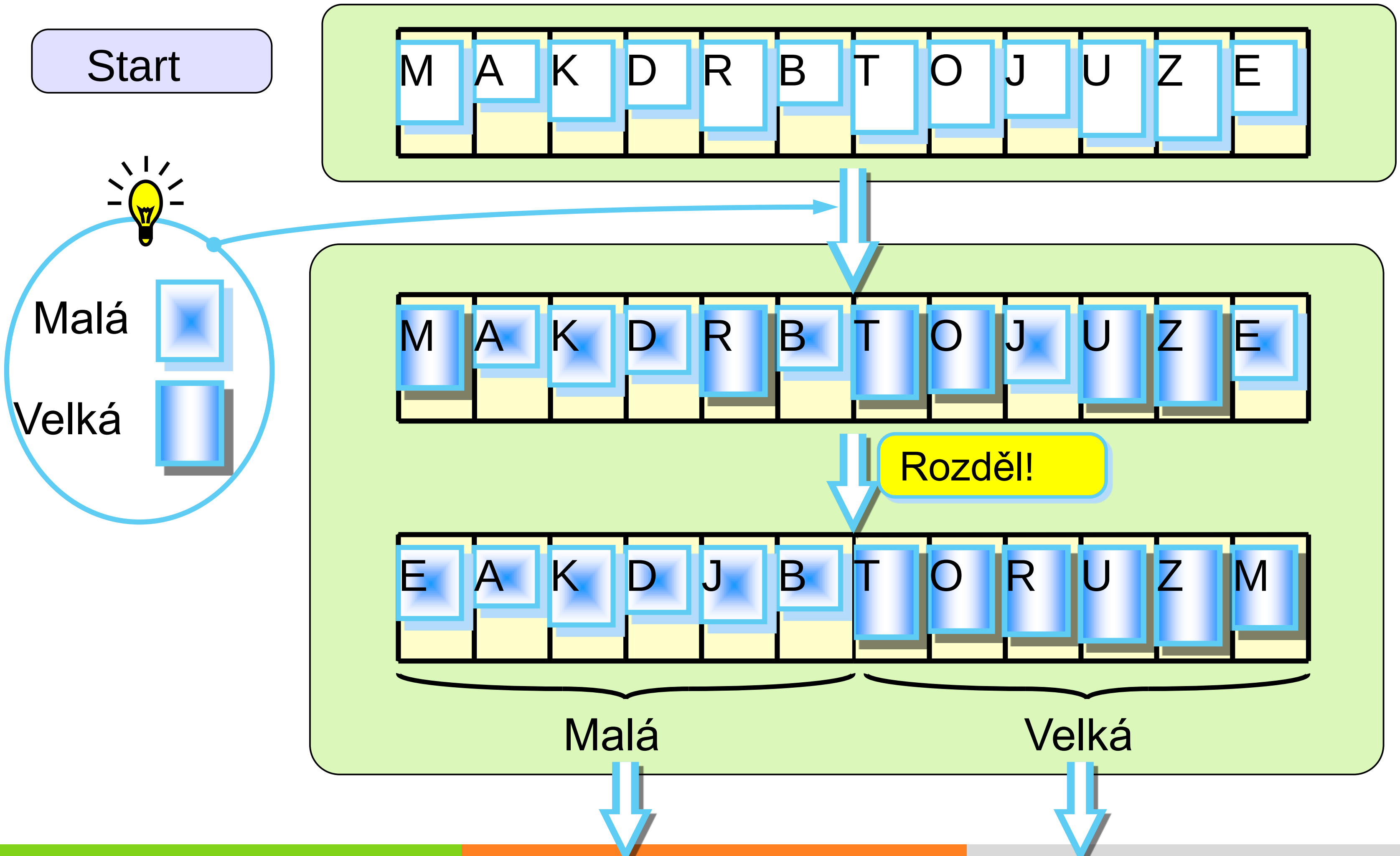


# Quick-Sort

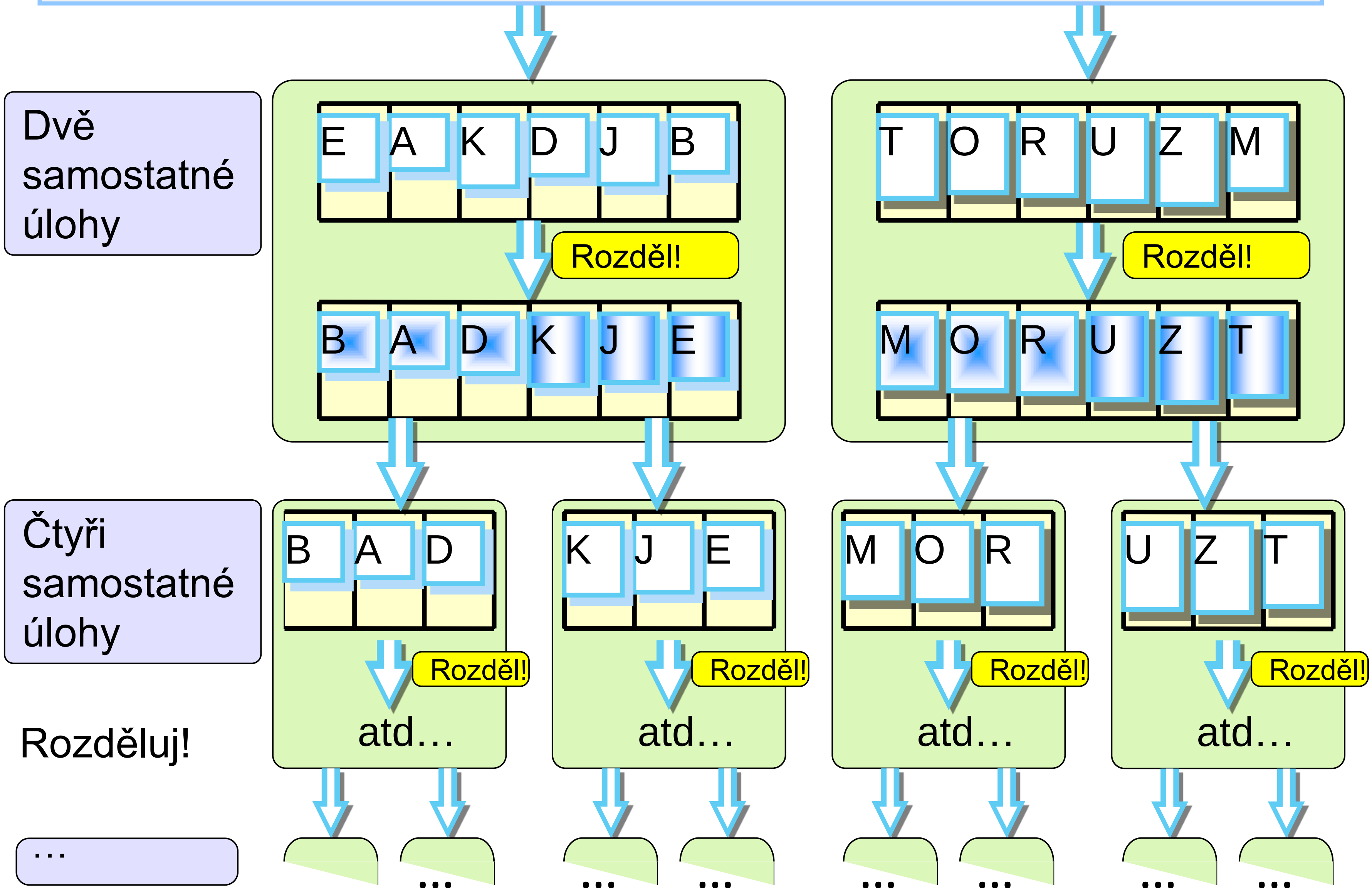
Myšlenka

Divide & Conquer!

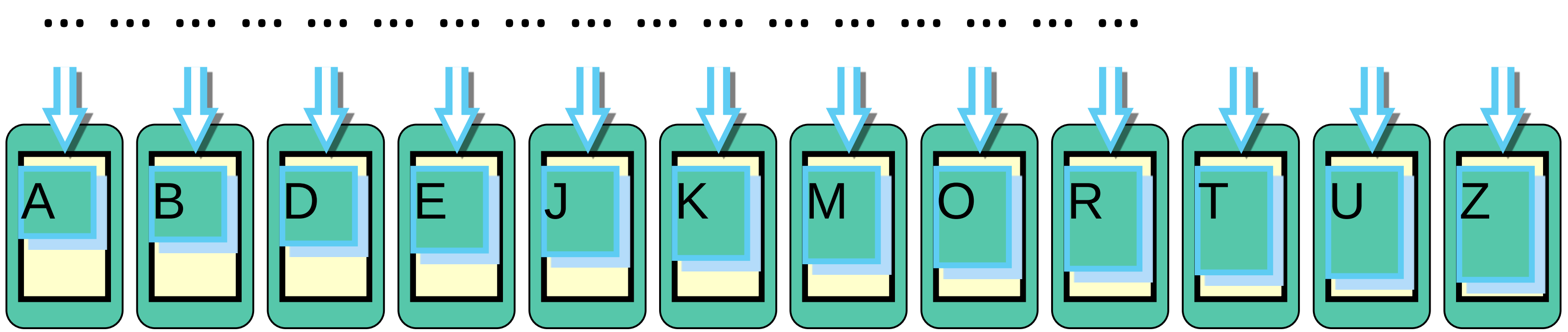
Start



# QUICK-SORT


Dvě samostatné úlohy
E A K D J B
Rozděl!
B A D K J E
T O R U Z M
Rozděl!
M O R U Z T
Čtyři samostatné úlohy
B A D
Rozděl!
atd…
K J E
Rozděl!
atd…
M O R
Rozděl!
atd…
U Z T
Rozděl!
atd…
Rozděluj!
…
…
…
…
…
…
…
…
…
…

# QUICK-SORT

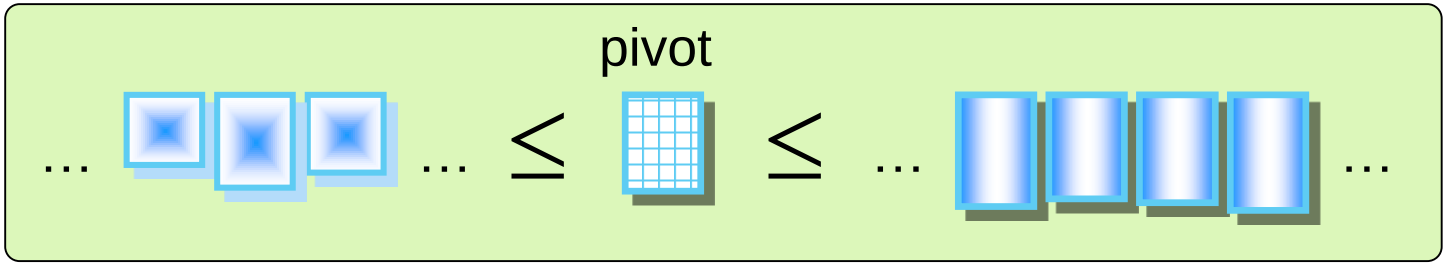



Opanováno!

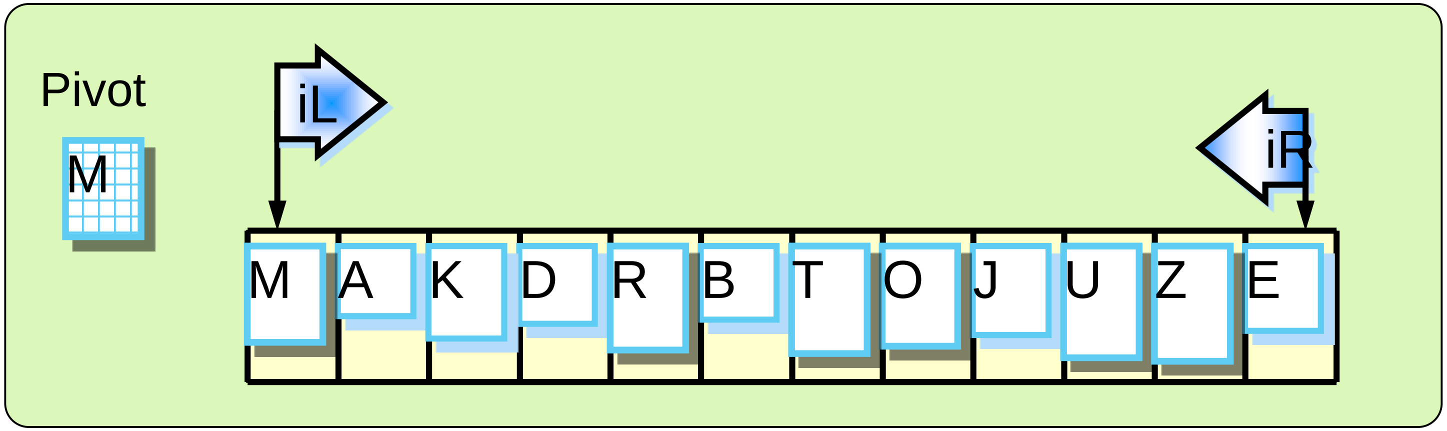
# QUICK-SORT

## Dělení

pivot



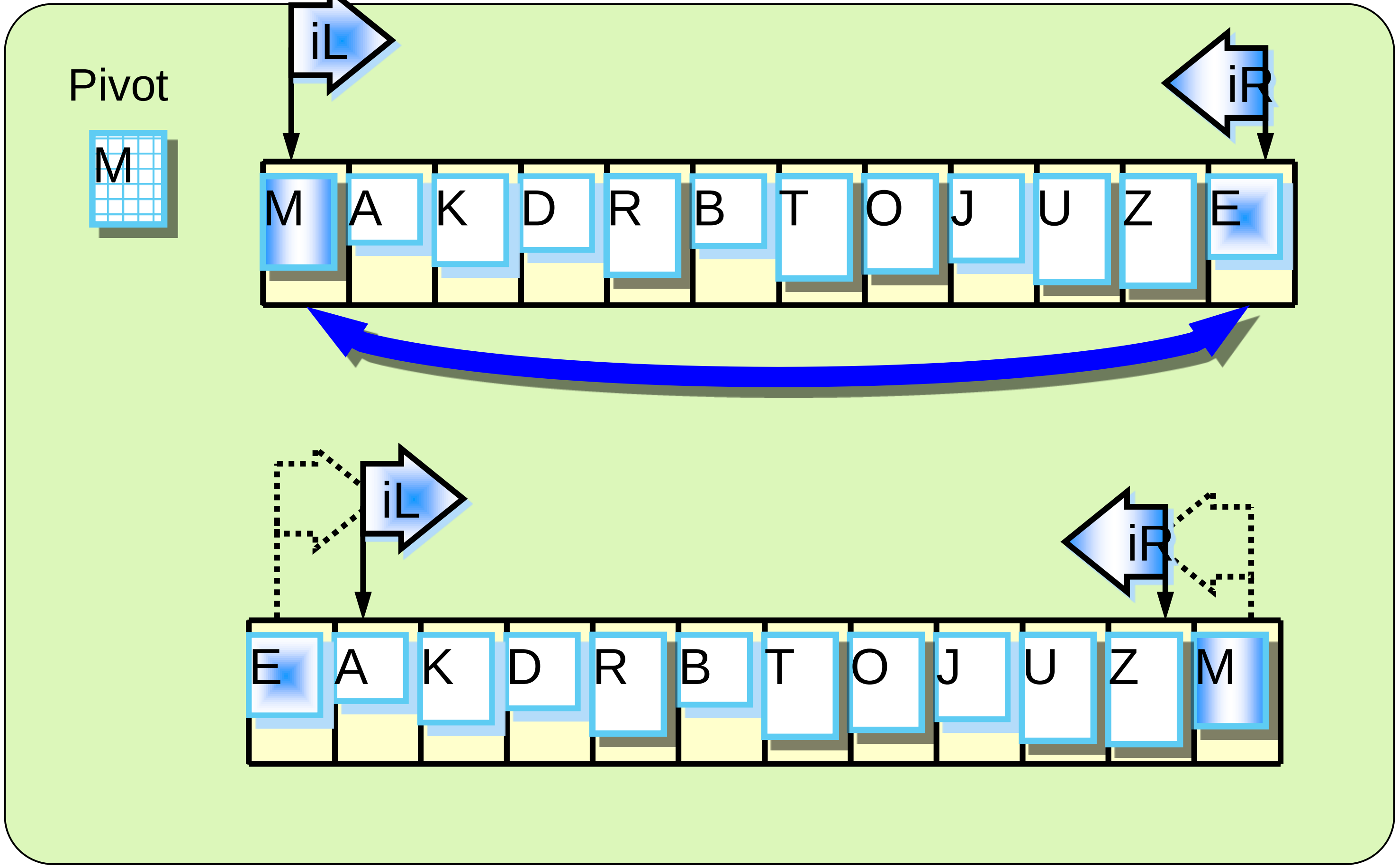

Init



# Quick-Sort

## Dělení

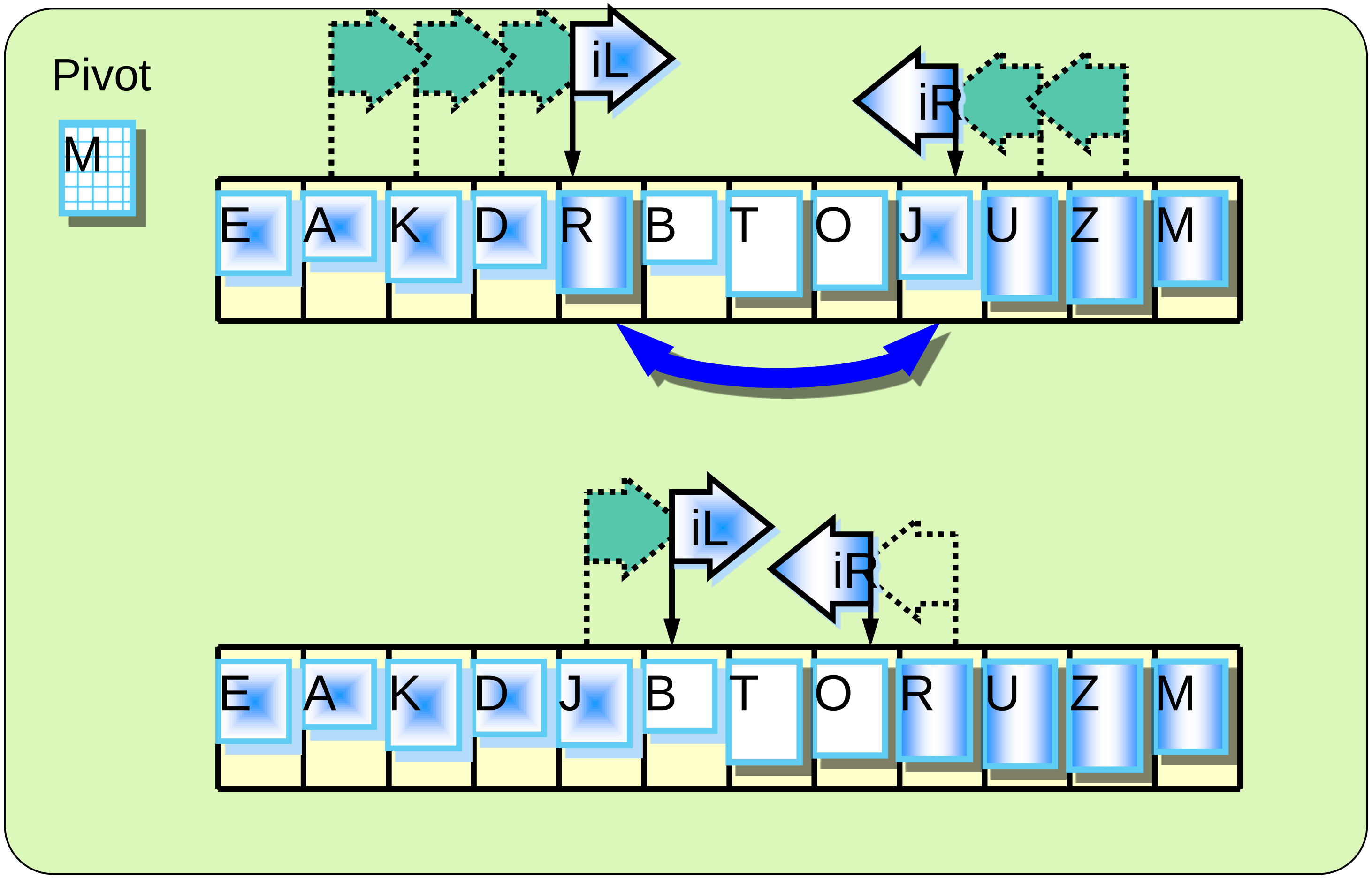
Krok 1



# Quick-Sort

## Dělení

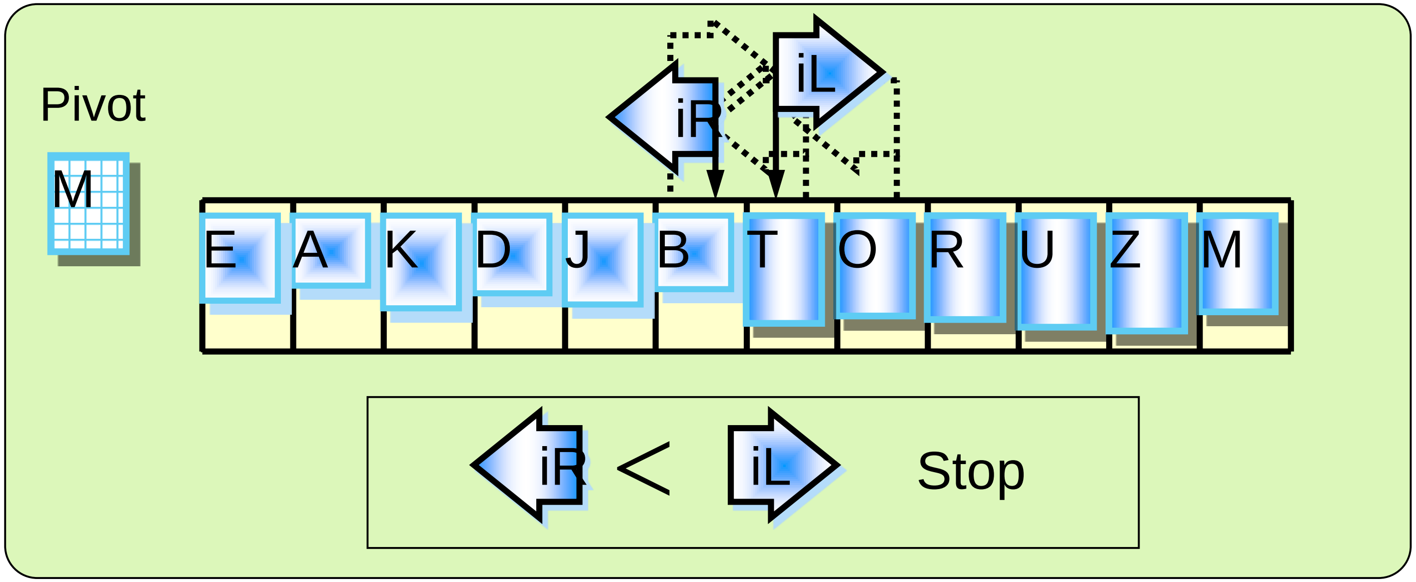
Krok 2



# QUICK-SORT

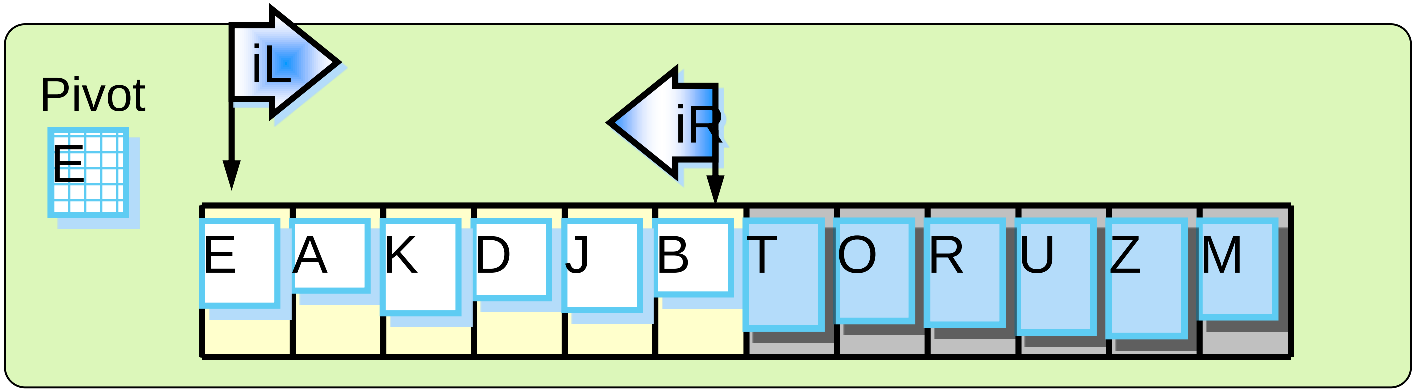
## Dělení

Krok 3




Rozděl!

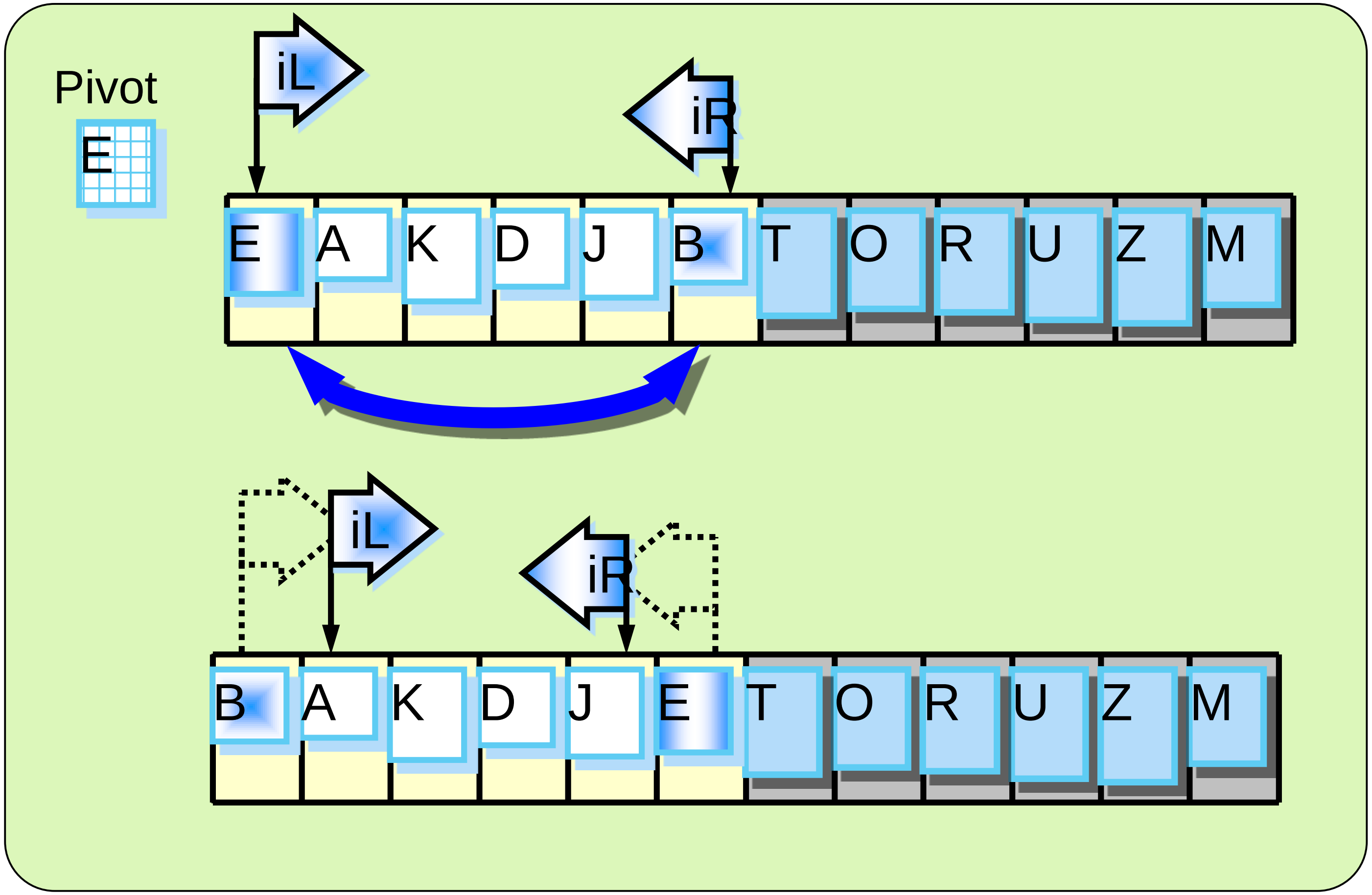
Init



# Quick-Sort

## Dělení

Krok 1



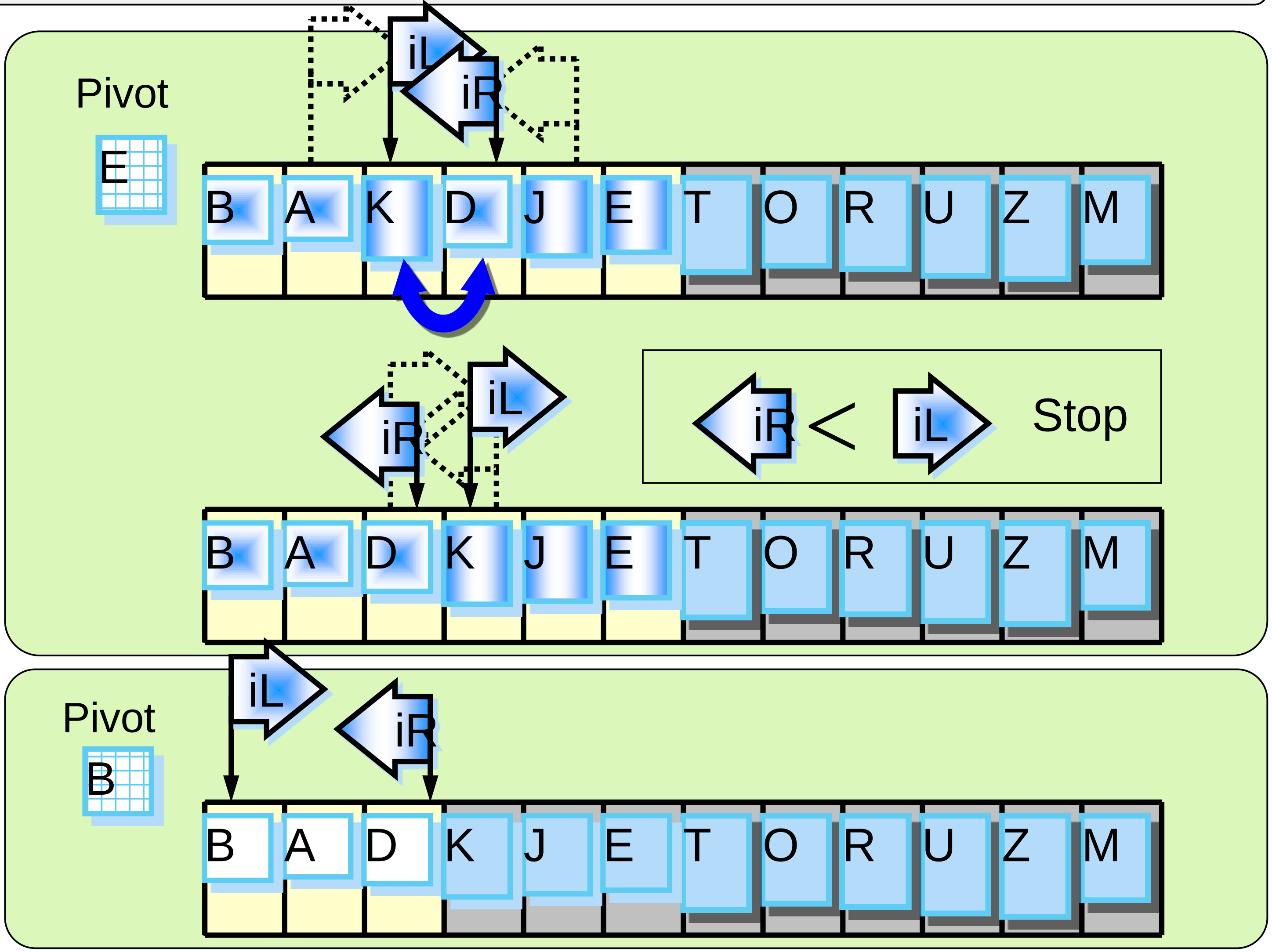
# QUICK-SORT

Dělení

Krok 2

Rozděl!

Init



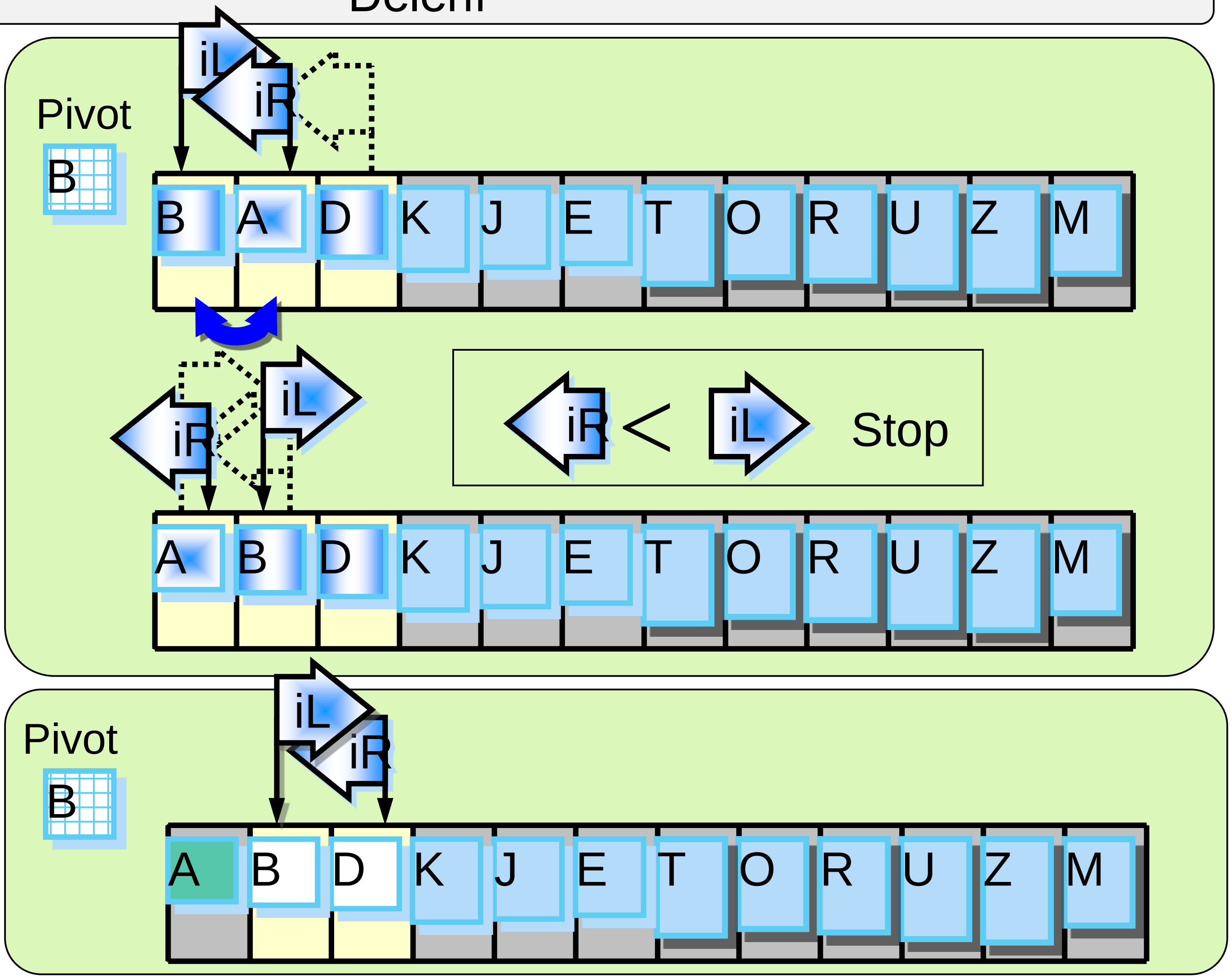
# QUICK-SORT

Dělení

Krok 1

Rozděl!

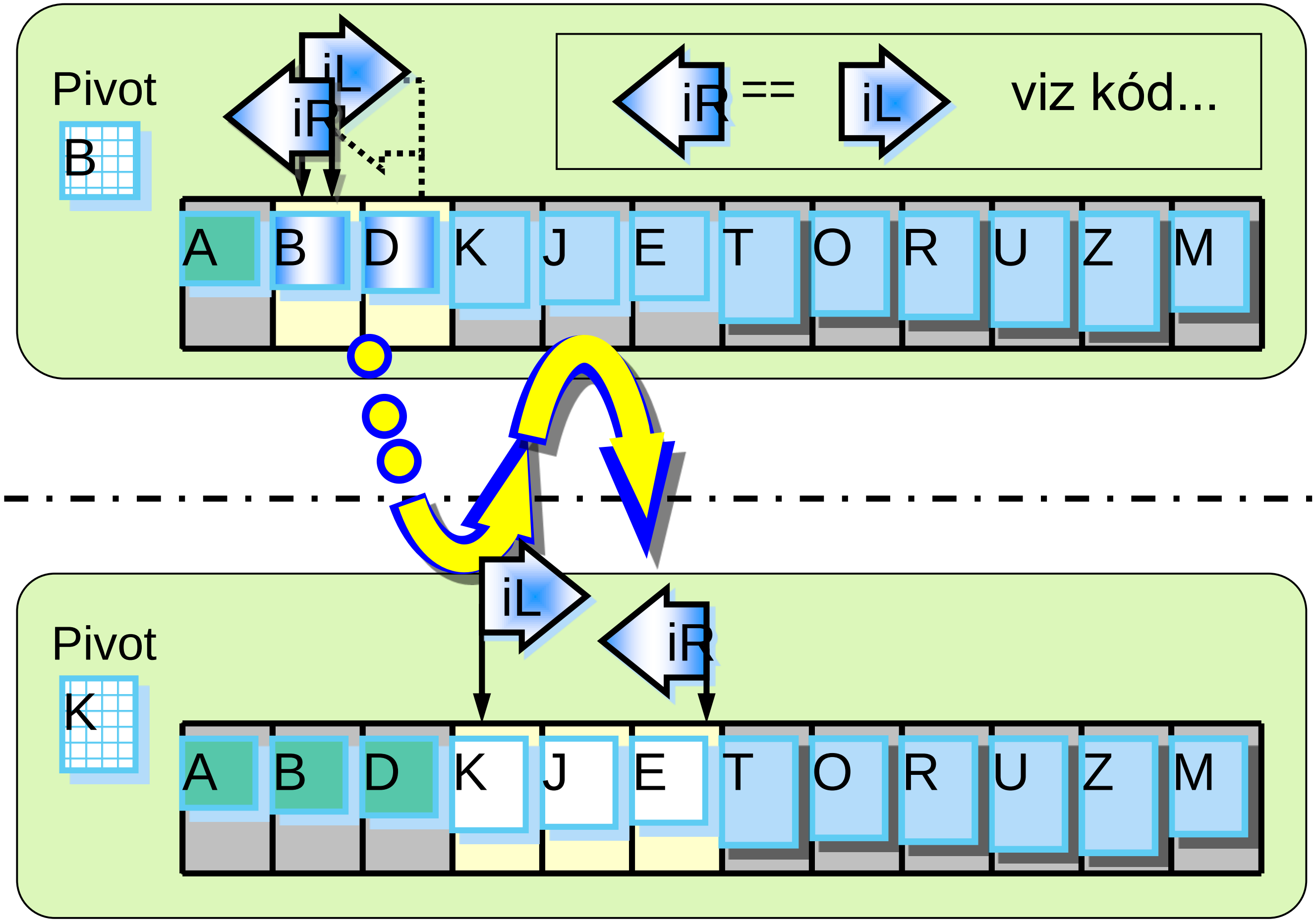
Init



# Quick-Sort

## Dělení

Krok 1




Další oddíl

Init

atd…

atd…

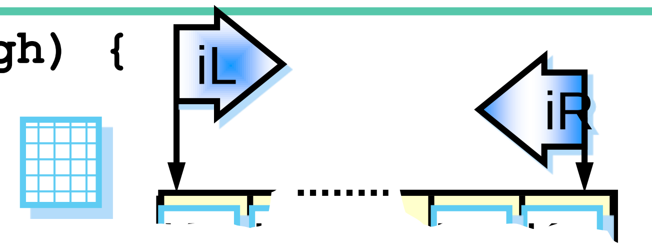
# QUICK-SORT

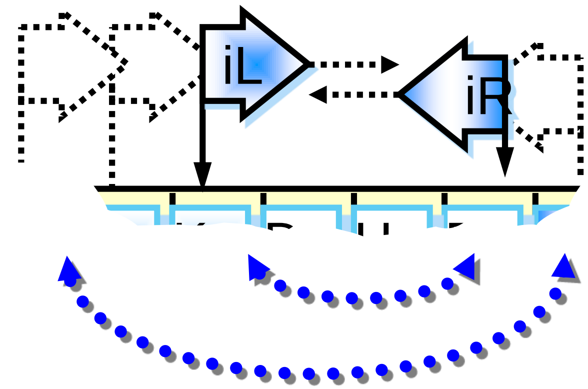
```
void qSort(Item a[], int low, int high) {
  int iL = low, iR = high;
  Item pivot = a[low];

  do {
    while (a[iL] < pivot) iL++;
    while (a[iR] > pivot) iR--;
    if (iL < iR) {
      swap(a,iL, iR);
      iL++; iR--;
    }
    else
      if (iL == iR) { iL++; iR--;}

  } while( iL <= iR);

  if (low < iR)  qSort(a, low, iR);
  if (iL < high) qSort(a, iL, high);
}
```




Rozděl!

## QUICK-SORT

Levý index se nastaví na začátek zpracovávaného úseku pole, pravý na jeho konec, zvolí se pivot.

Cyklus (rozdělení na „malé" a „velké") :

Levý index se pohybuje doprava
a zastaví se na prvku vetším nebo rovném pivotovi.
Pravý index se pohybuje doleva
a zastaví se na prvku menším nebo rovném pivotovi.
Pokud je levý index ještě před pravým,
příslušné prvky se prohodí,
a oba indexy se posunou o 1 ve svém směru.
Jinak pokud se indexy rovnají,
jen se oba posunou o 1 ve svém směru.

Cyklus se opakuje, dokud se indexy neprekříží,
tj. pravý se dostane pred levého.

Následuje rekurzivní volání (zpracování „malých" a „velkých" zvlášť)
na úsek od začátku do pravého(!) indexu včetně
a na úsek od levého(!) indexu včetně až do konce,
má-li príslušný úsek délku větší než 1.

# QUICK-SORT

Asymptotická složitost

Celkem přesunů a testů

| | |
|---|---|
| $\Theta(n \cdot \log_2(n))$ | nejlepší případ |
| $\Theta(n \cdot \log_2(n))$ | průměrný případ |
| $\Theta(n^2)$ | nejhorší případ |

**Asymptotická složitost QUICK-SORT je $O(n^2)$, ...**

… ale! :

**“Očekávaná” složitost QUICK-SORT je $\Theta(n \cdot \log_2(n))$ (!!)**

# Varianta QUICK-SORT

- Jedno rekurzivní volání v QUICK-SORT lze nahradit iterací (tail-recursion):

```
QUICKSORT(A, p, r)
if p < r
    q = PARTITION(A, p, r)
    QUICKSORT(A, p, q − 1)
    QUICKSORT(A, q + 1, r)
```

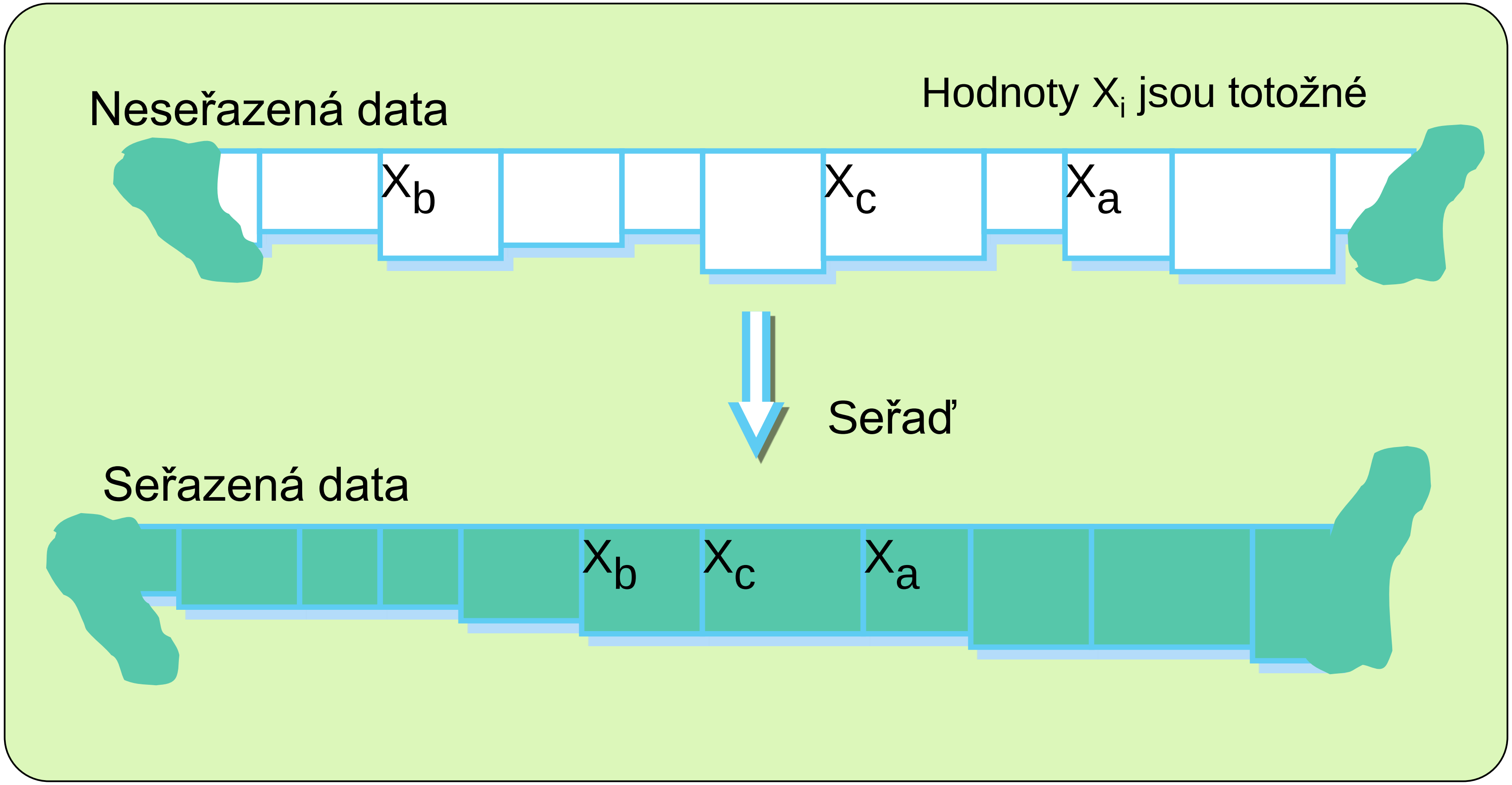
```
TAIL-RECURSIVE-QUICKSORT(A, p, r)
while p < r
    // Partition and sort left subarray.
    q = PARTITION(A, p, r)
    TAIL-RECURSIVE-QUICKSORT(A, p, q − 1)
    p = q + 1
```

# Porovnání efektivity řazení

| N | $N^2$ | $N \times \log_2(N)$ | $\frac{N^2}{N \times \log_2(N)}$ | zpoma-lení (1~1sec) |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **0** | | |
| **10** | **100** | **33.2** | **3.0** | **3 sec** |
| **100** | **10 000** | **6 64.4** | **15.1** | **15 sec** |
| **1 000** | **1 000 000** | **9 965.8** | **100.3** | **1.5 min** |
| **10 000** | **100 000 000** | **132 877.1** | **752.6** | **13 min** |
| **100 000** | **10 000 000 000** | **1 660 964.0** | **6 020.6** | **1.5 hod** |
| **1 000 000** | **1 000 000 000 000** | **19 931 568.5** | **50 171.7** | **14 hod** |
| **10 000 000** | **100 000 000 000 000** | **232 534 966.6** | **430 042.9** | **5 dnů** |

# Stabilita řazení

Stabilní řazení nemění pořadí prvků se stejnou hodnotou.



# Stabilní řazení

záznam: | Jméno | Příjmení |

Vstup: seznam seřazen pouze podle jména

| | |
|---|---|
| Andrew | Cook |
| Andrew | Amundsen |
| Andrew | Brown |
| Barbara | Cook |
| Barbara | Brown |
| Barbara | Amundsen |
| Charles | Amundsen |
| Charles | Cook |
| Charles | Brown |

stabilní řazení

seřaď záznamy pouze podle příjmení

Výstup: seznam seřazen podle jména i příjmení

| | |
|---|---|
| Andrew | Amundsen |
| Barbara | Amundsen |
| Charles | Amundsen |
| Andrew | Brown |
| Barbara | Brown |
| Charles | Brown |
| Andrew | Cook |
| Barbara | Cook |
| Charles | Cook |

**Pořadí záznamů se stejným příjmením se nezměnilo**

# Nestabilní řazení

záznam: | Jméno | Příjmení |

Vstup: seznam seřazen pouze podle jména

Výstup: původní pořadí jmen je ztraceno

seřazeno

| | |
|---|---|
| Andrew | Cook |
| Andrew | Amundsen |
| Andrew | Brown |
| Barbara | Cook |
| Barbara | Brown |
| Barbara | Amundsen |
| Charles | Amundsen |
| Charles | Cook |
| Charles | Brown |

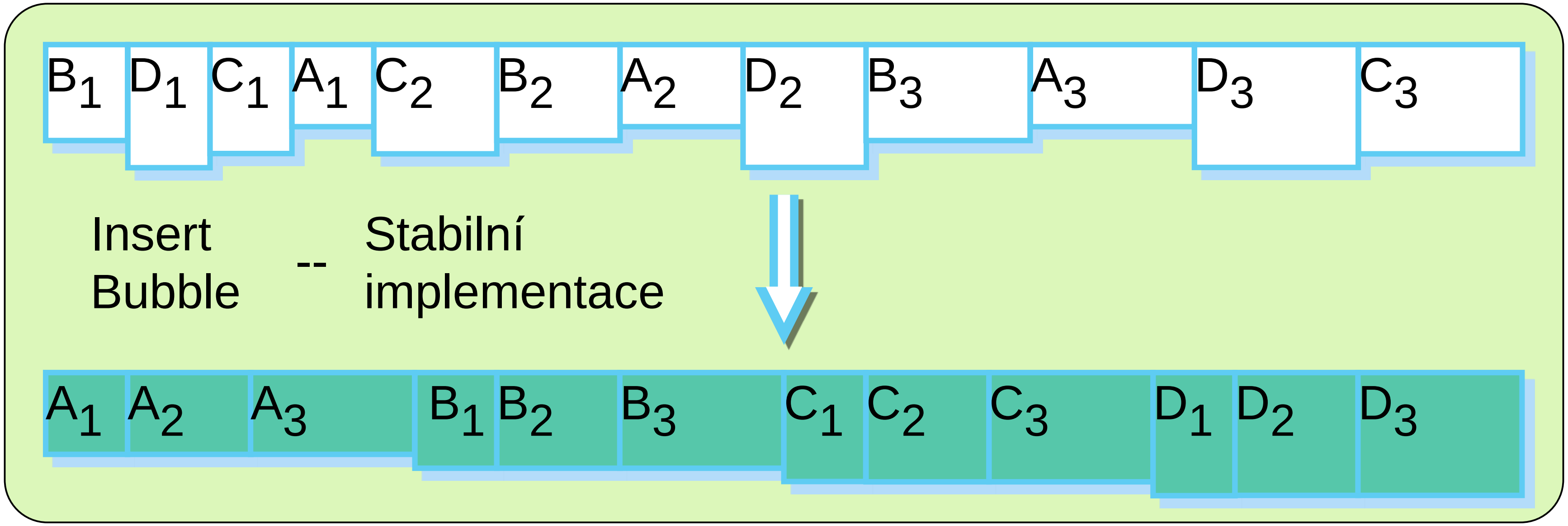
QuickSort

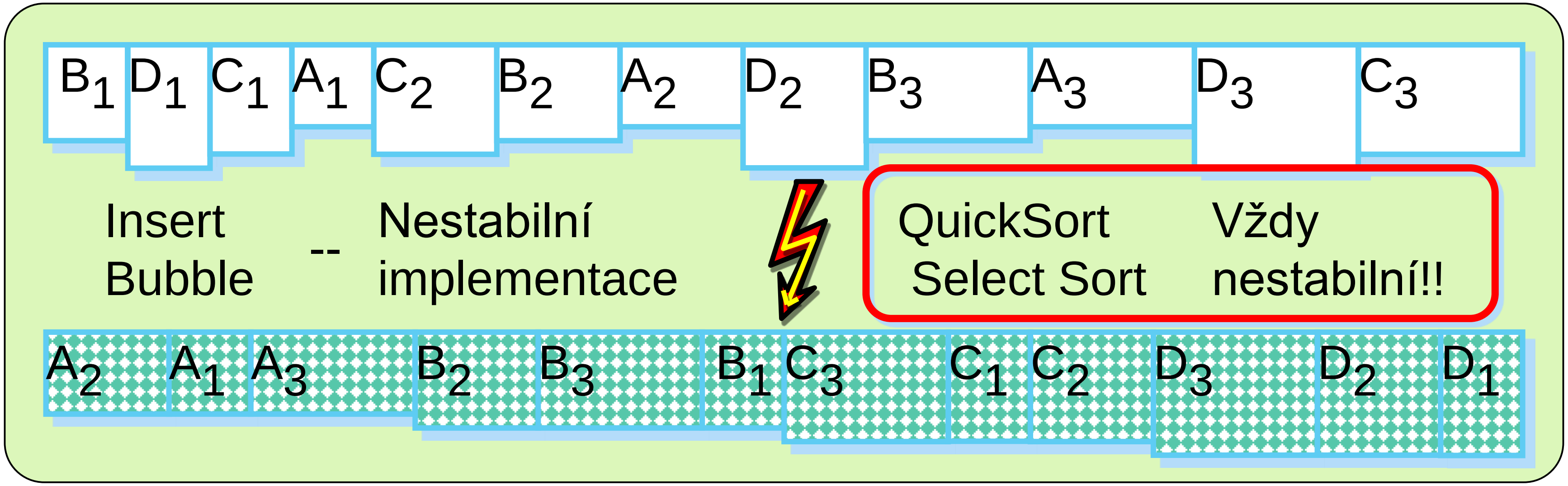
seřaď záznamy pouze podle příjmení

| | |
|---|---|
| Barbara | Amundsen |
| Andrew | Amundsen |
| Charles | Amundsen |
| Barbara | Brown |
| Charles | Brown |
| Andrew | Brown |
| Charles | Cook |
| Andrew | Cook |
| Barbara | Cook |

Pořadí záznamů se stejným příjmením se změnilo

# Stabilita někdy závisí na implementaci



# The End