B-Stromy

Karel Richta a kol.

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
05/2017, Lekce 11

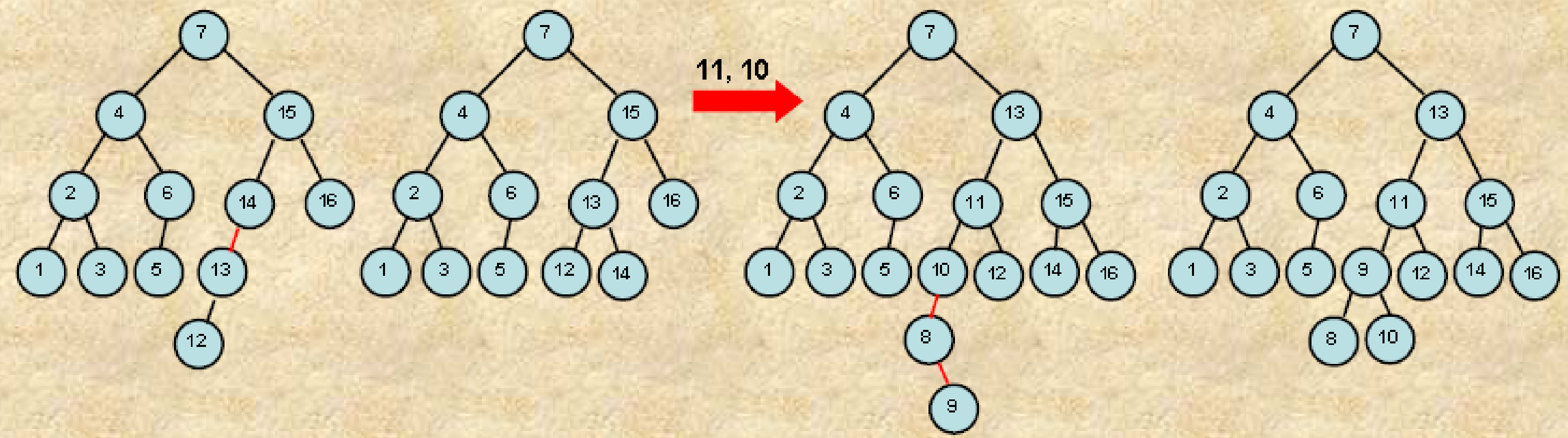
https://moodle.fel.cvut.cz/course/view.php?id=1238

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Opakování: skončili jsme AVL stromy

Příklad vytvoření AVL stromu

Vkládáme postupně 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 8, 9



Shrnutí postupu: Po vložení uzlu najdeme nejbližšího předka x, kde došlo k rozvážení. Příčinou může být jedna z následujících 4 alternativ:

1. **vložení do levého podstromu levého potomka uzlu x** ⇒ **rotace vpravo**
2. **vložení do pravého podstromu levého potomka uzlu x** ⇒ **dvojitá LR rotace**
3. **vložení do levého podstromu pravého potomka uzlu x** ⇒ **dvojitá RL rotace**
4. **vložení do pravého podstromu pravého potomka uzlu x** ⇒ **rotace vlevo**

Obsah

- Červeno-černé stromy (Red-Black trees – RB)
  - Insert
  - Delete
- B-stromy (B-Trees)
  - Motivace
  - Search
  - Insert
  - Delete

Založeno na:
[Cormen, Leiserson, Rivest: Introduction to Algorithms, Chapter 14 and 19, McGraw Hill, 1990]
[Whitney: CS660 Combinatorial Algorithms, San Diego State University, 1996]
[Frederic Maire: An Introduction to Btrees, Queensland University of Technology,1998]
http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~martin/ds/main.pdf

Červeno-černé (RB) stromy

(s využitím http://en.literateprograms.org/Red-black_tree_%28Java%29)

RB stromy:

- zaručují O(lg N) složitost svých operací v nejhorším případě
- mají poněkud náročnější implementaci svých operací

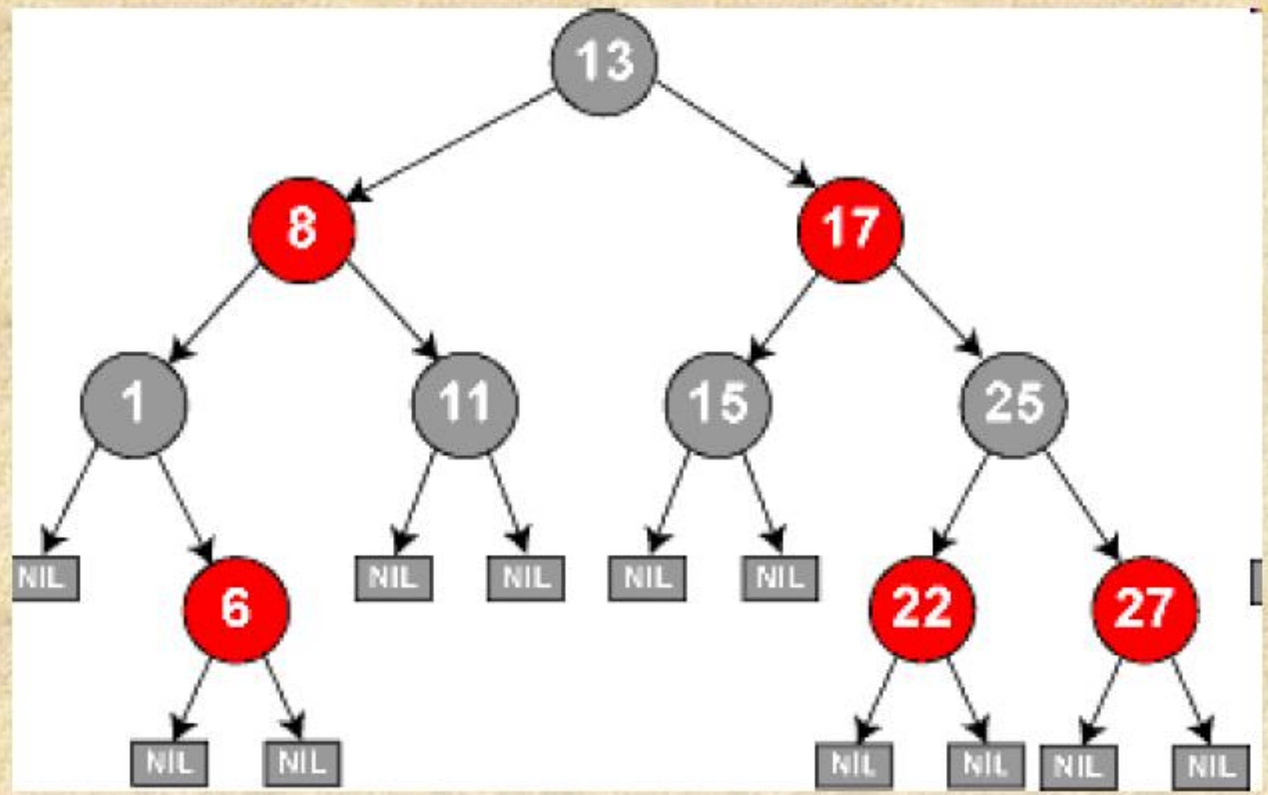
Definice RB stromu - RB strom je BVS s následujícími vlastnostmi:

1. každý uzel je obarven buď červeně nebo černě
2. kořen stromu je obarven černě
3. každý list (vnější uzel NIL) je černý
4. červený uzel má oba své potomky černé
5. všechny listy (vnější uzly NIL) mají stejnou tzv. černou hloubku (tj. cesty k nim od kořene obsahují stejný počet černých uzlů)

Předpokládané složky uzlu v RB stromu:

`color, item (key, ...), left, right, parent`

Příklad RB stromu



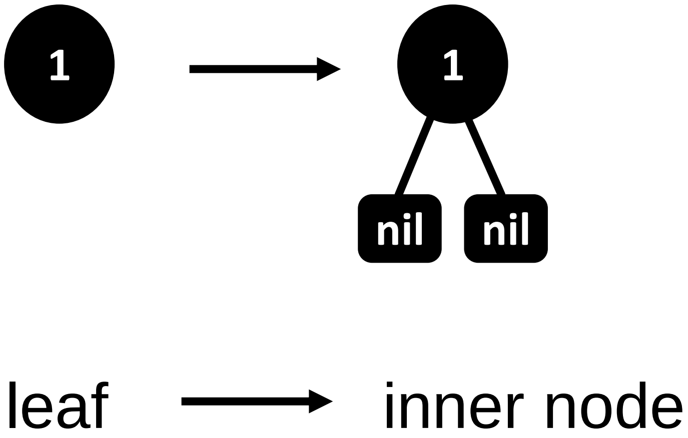
POZOR: NIL bude reprezentován jako společný "normální" uzel s černou barvou.

Vlastnosti červeno-černých stromů

- Jedná se o přibližně vyvážené BVS – platí:

  $h_{RB} \leq 2x\ h_{BVS}$ (výška ≤ 2x výška perfektně vyváženého stromu)

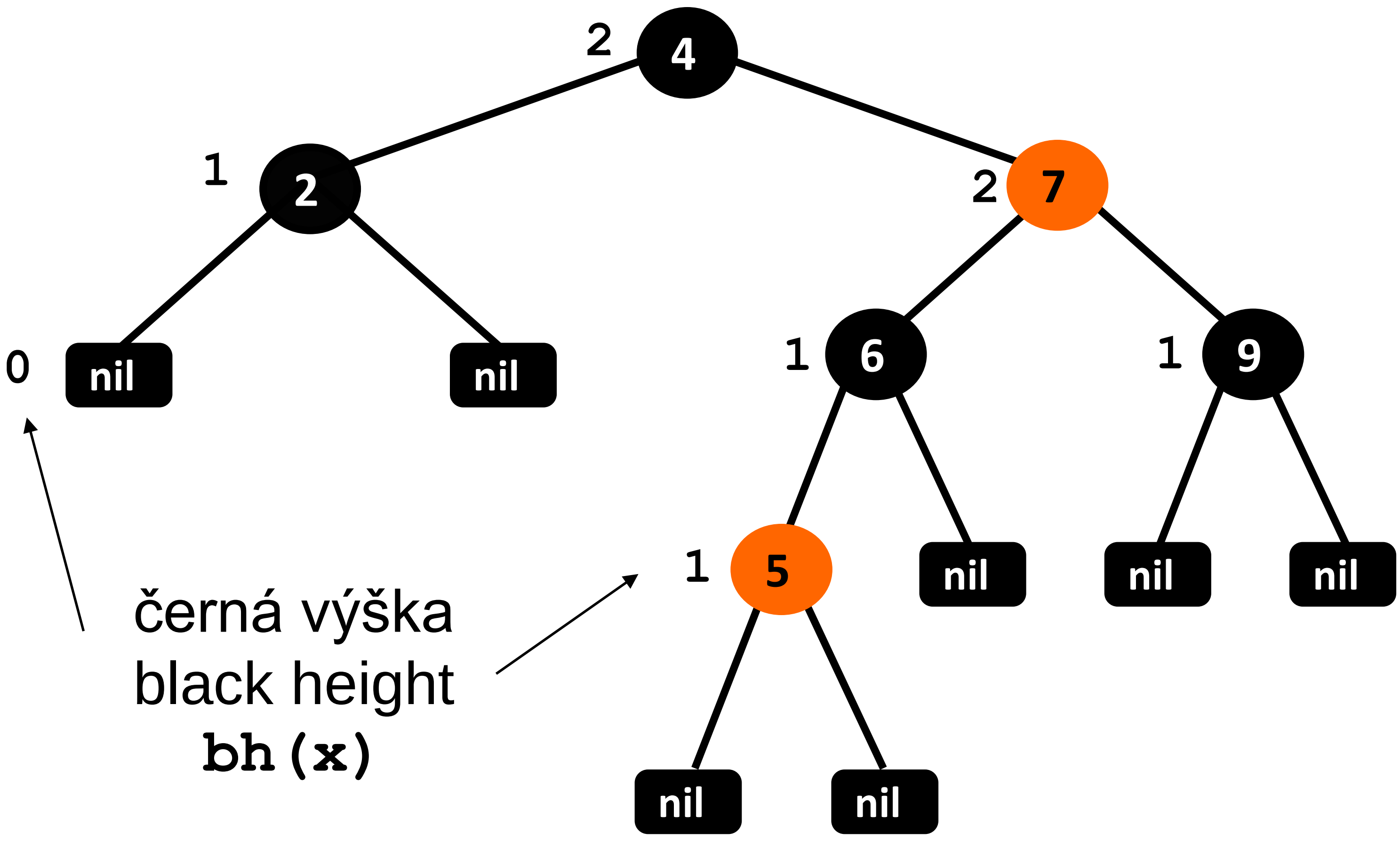
- Každý uzel obsahuje navíc bit pro barvu {red | black}
- Listy jsou doplněny odkazem na **nil** (neexistující potomek) = ukazatelem na nil - listy se stanou vnitřními uzly.



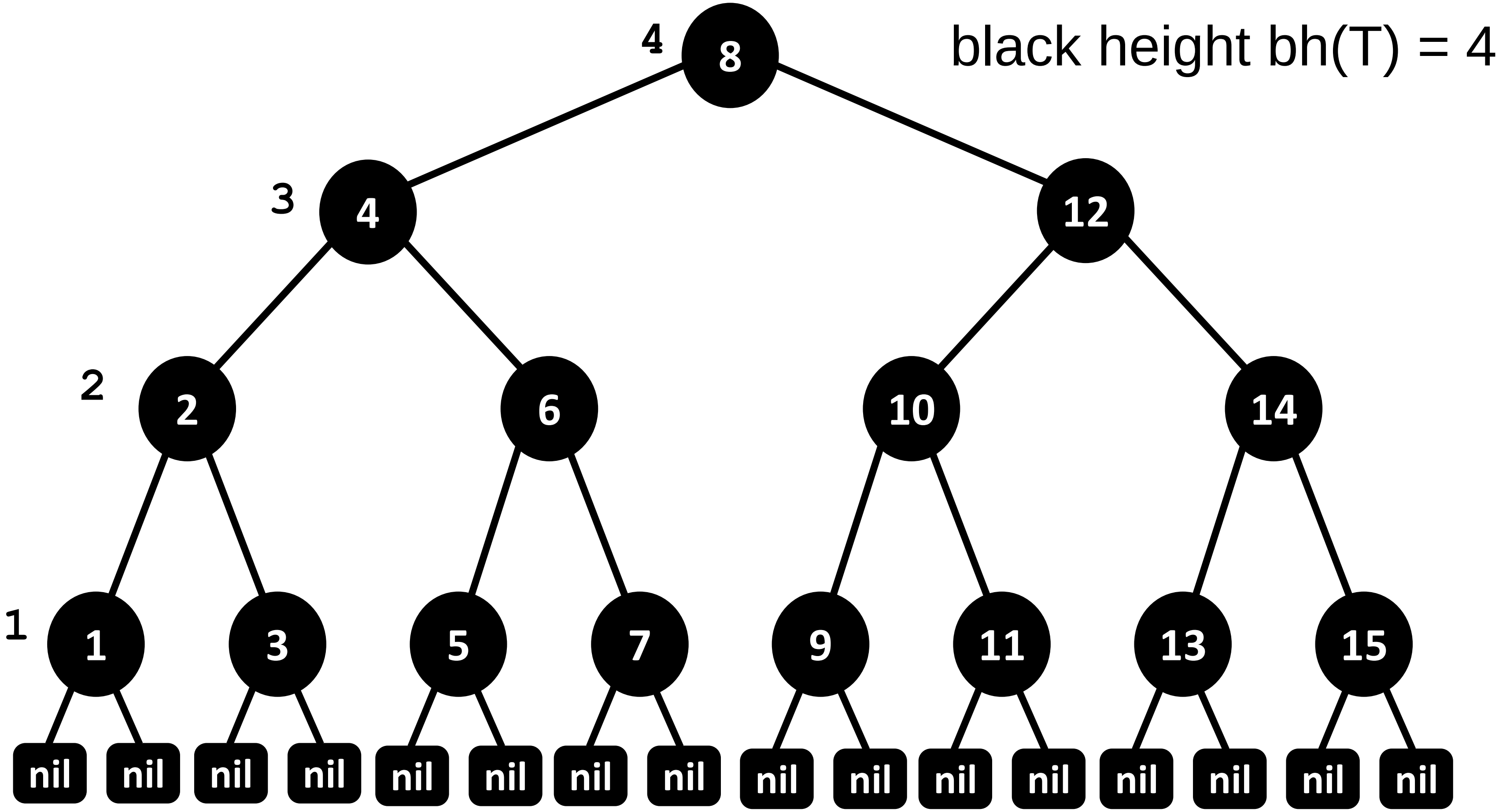
Černá výška v červeno-černých stromech

- Kořen RB-stromu je **černý**.
- Každá větev je zakončena (černým) uzlem **nil**.
- **Černá výška** uzlu **`x`** (**black-height**) se značí **`bh(x)`** a je definována jako počet černých uzlů na libovolné cestě z **`x`** do listu (**`x`** se nepočítá). Pozn.: Všechny cesty jsou stejně dlouhé. Totéž platí pro kořen.
- Černá výška má rozsah od **`h/2`** (kde **`h`** je výška stromu), jestliže polovina uzlů je červených do **`h`**, pokud jsou všechny uzly černé.
- **Výška `h(x)`** stromu s kořenem v **`x`** je maximálně dvakrát větší, než výška optimálně vyváženého stromu.
- $\mathbf{h} \leq 2\lg(n+1)$ .... $\mathbf{h} \in \Theta(\lg(n))$
- **`bh(x)`** je v rozsahu od $\lg(n+1)$ do $2\lg(n+1)$

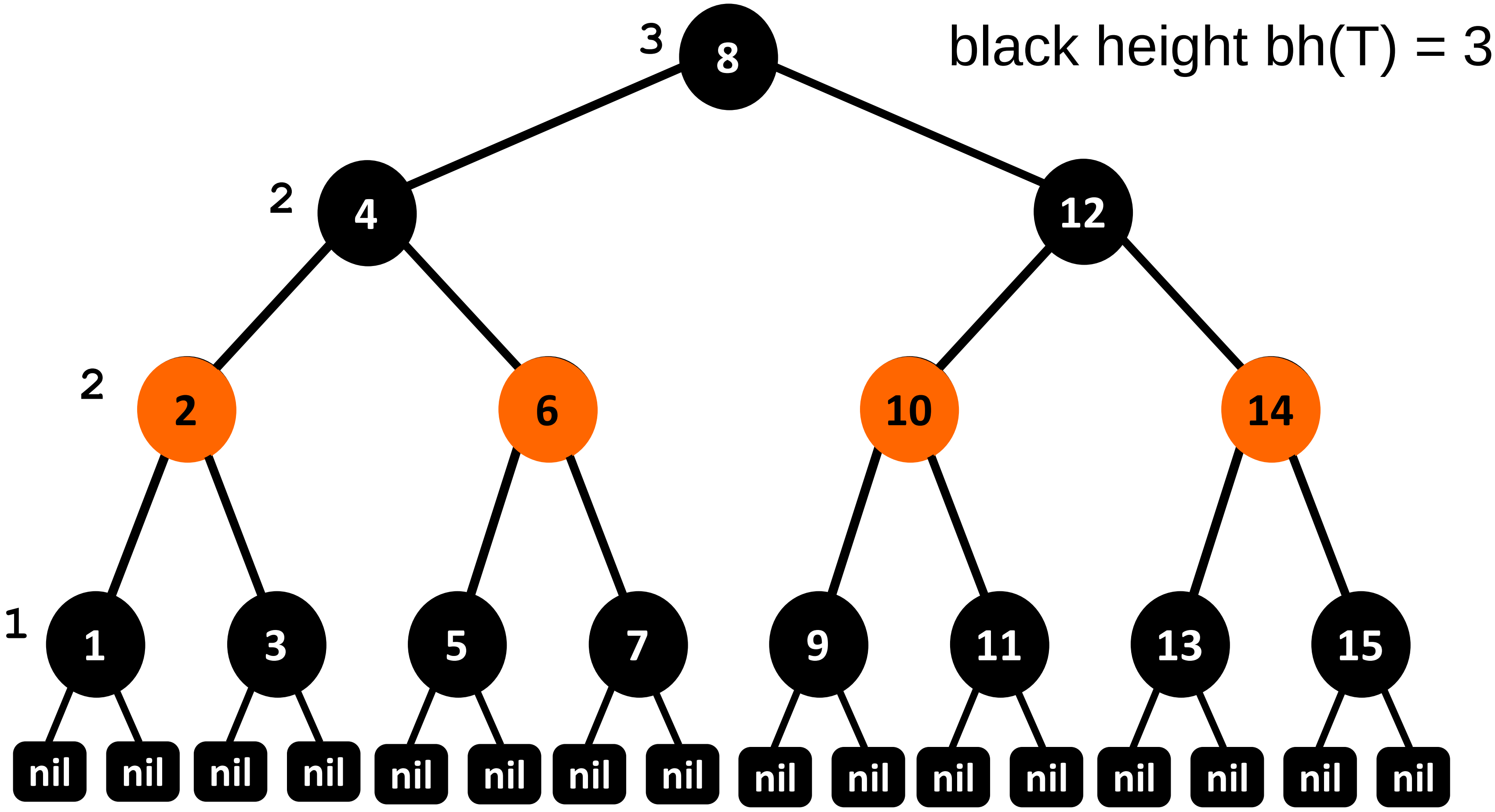
Příklad černé výšky



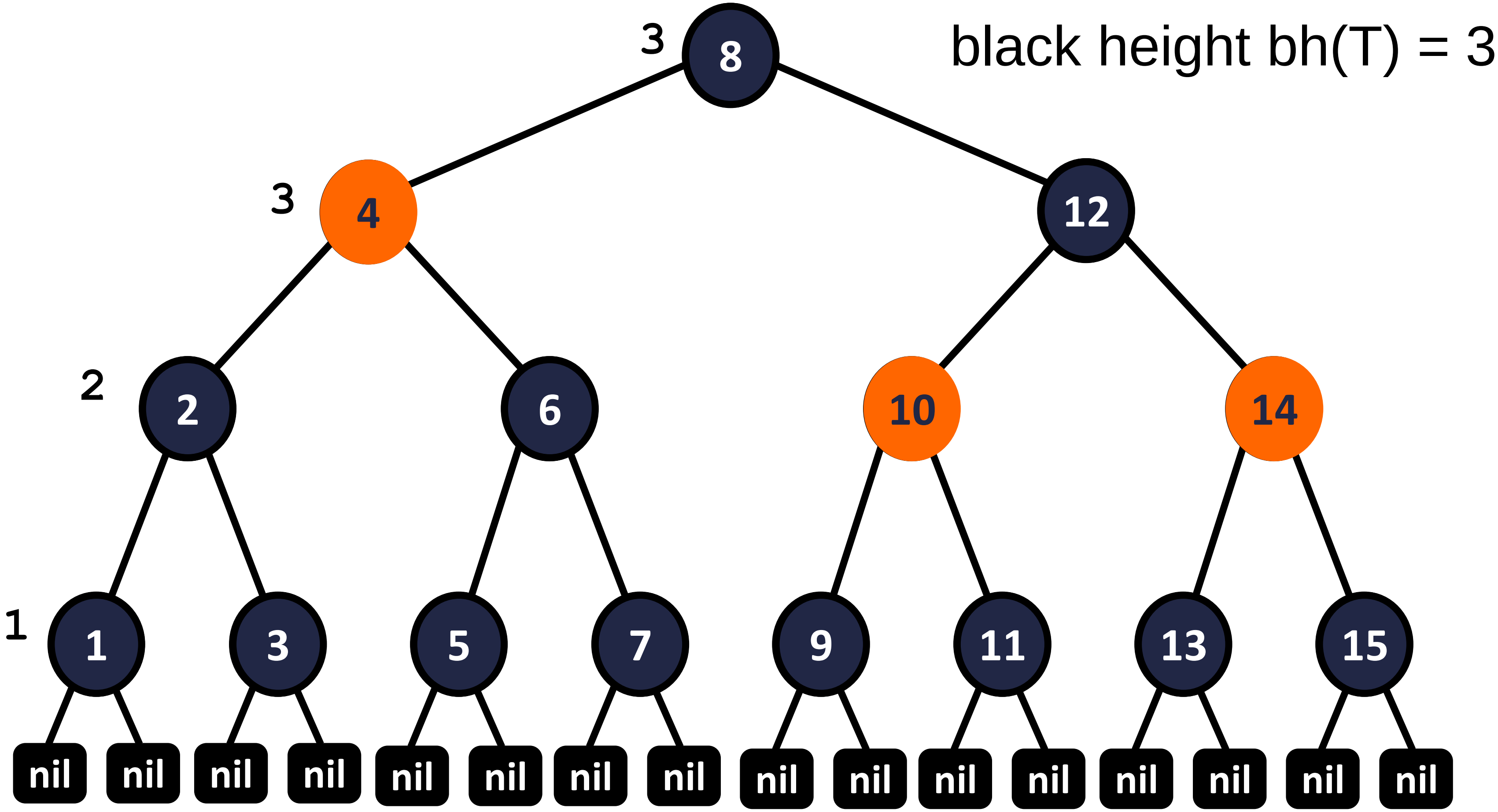
Transformace BVS na RB-strom



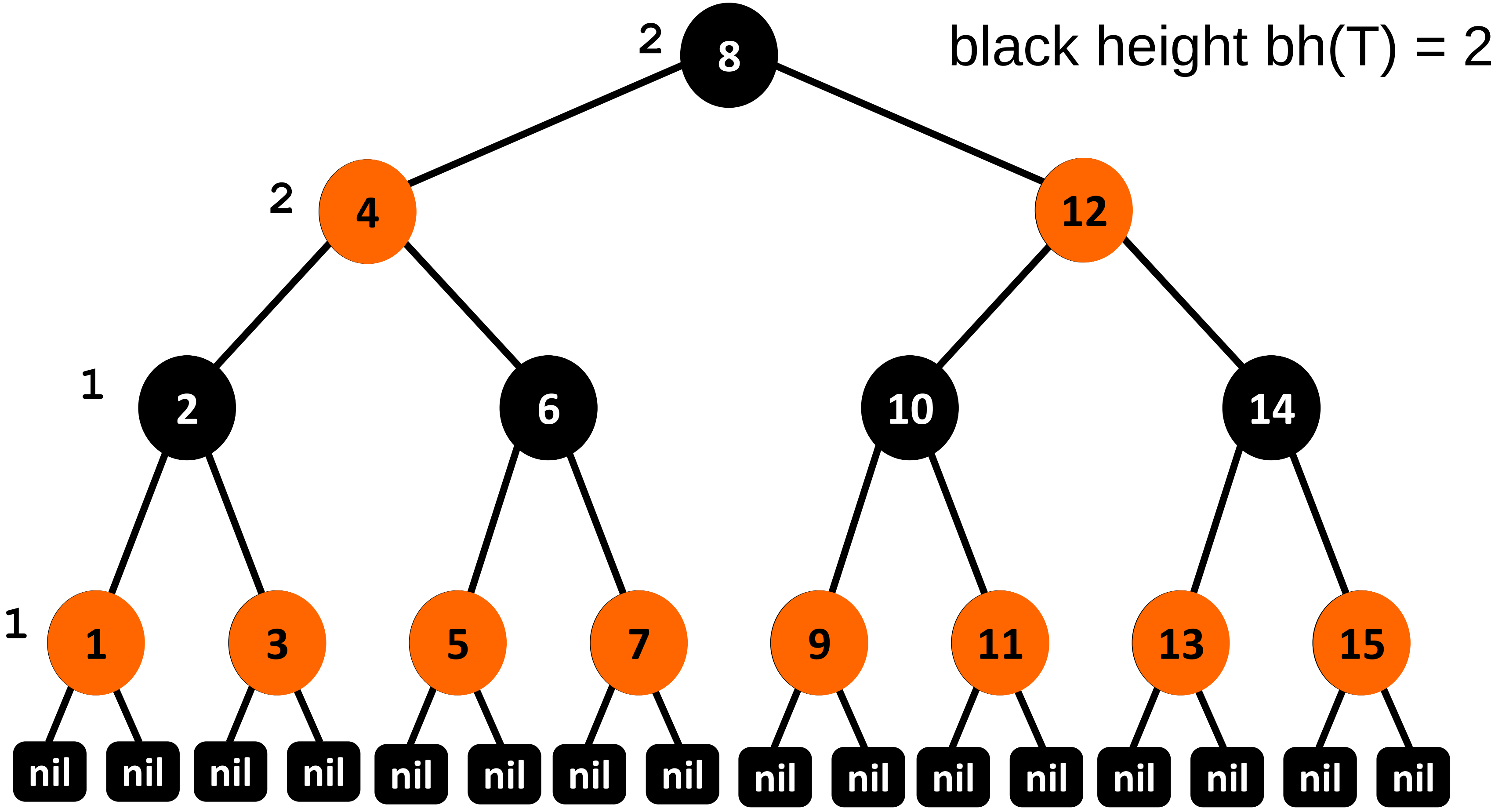
Transformace BVS na RB-strom



Transformace BVS na RB-strom

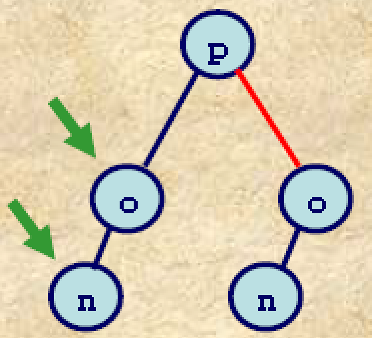


Transformace BVS na RB-strom



Rotace v RB stromech

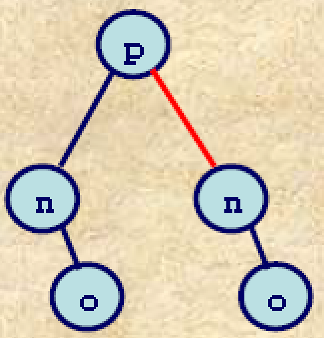
Existence odkazu na rodiče trochu komplikuje implementaci rotací.
Je třeba změnit odkaz v rodiči na uzel vytažený rotací nahoru.



Platí:
`p = o.parent, p.left = o`
`(nebo p.right = o)`

Bude platit:
`p = n.parent, p.left = n`
`(nebo p.right = n)`

Zvláštní případy: `p=NIL, n=NIL`




```
private void replaceNode ( Node o, Node n )
  { Node p = o.parent;
    if ( p == NIL ) head = n;            // o can be the root
    else if (o == p.left ) p.left = n;
    else p.right = n;
    if ( n != NIL ) n.parent = p;        // n can be external node NIL
```

Rotace v RB stromech

Změny odkazů zařídíme explicitně, operace tedy nebudou vracet hodnotu.

```
void rotateRight ( Node oo )
  { Node nn = oo.left;
    replaceNode(oo, nn);
    oo.left = nn.right;
    if ( nn.right != NIL )
      nn.right.parent = oo;
    nn.right = oo;
    oo.parent = nn;
  }
```

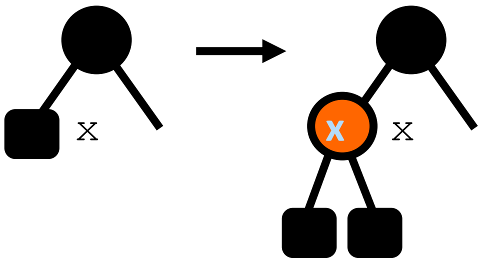
```
void rotateLeft ( Node oo )
  { Node nn = oo.right;
    replaceNode(oo, nn);
    oo.right = nn.left;
    if ( nn.left != NIL )
      nn.left.parent = oo;
    nn.left = oo;
    oo.parent = nn;
  }
```

Operaci `insert` navrhneme standardním způsobem s tím, že:

- vložený uzel bude červený
- prověříme splnění požadavků RB stromu a provedeme náležité úpravy na cestě vzhůru

Operace INSERT pro RB-stromy

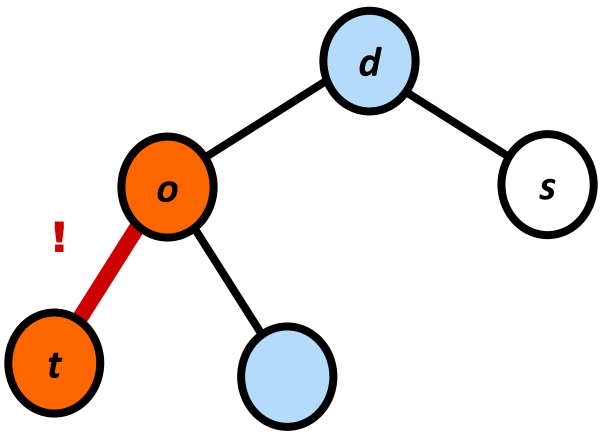
1) Nový uzel bude červený.
2) Vložíme uzel do stromu jako do standardního BVS.
3) Jestliže je předek černý, jsme hotovi → strom je Červeno-Černý.



4) Jestliže nikoliv, mohou nastat 3 následující případy.

Poruchy při vkládání

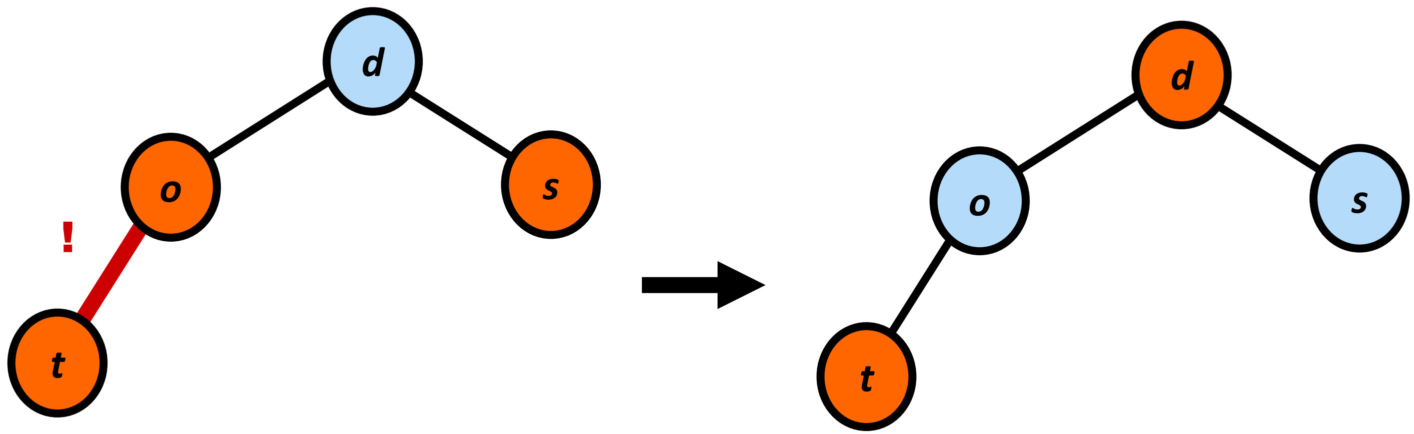
- Pokud je vrchol *t* červený a jeho otec je také červený, pak řekneme, že vložením *t* nastala porucha.
- Pokud nastala porucha, pak ji musíme nějak opravit. Situace je na obrázku - nejprve záleží na tom, jakou barvu má *s*, strýc *t*:



Poruchy při vkládání (2)

1. *s* je červený. Pak pouze přebarvíme *o*, *d* a *s* podle obrázku.

Nyní *d* může být porucha, ovšem posunutá o 2 hladiny výše.

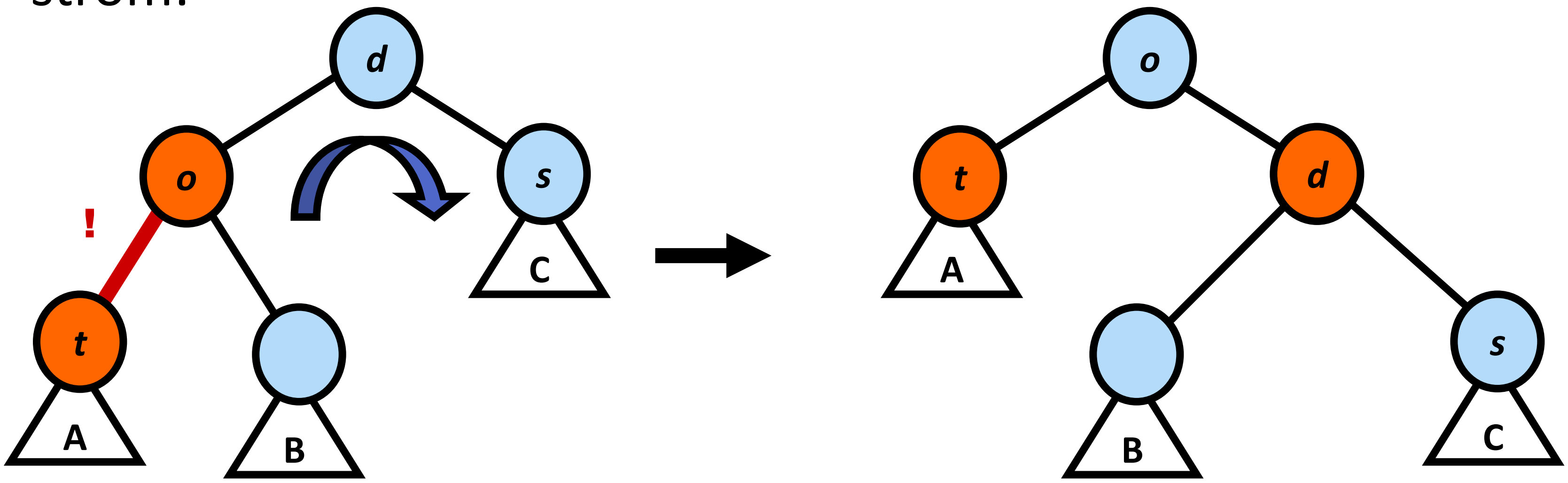


Pro splnění poslední podmínky je ještě nutné přebarvit kořen (*d*) na černo.

Poruchy při vkládání (3)

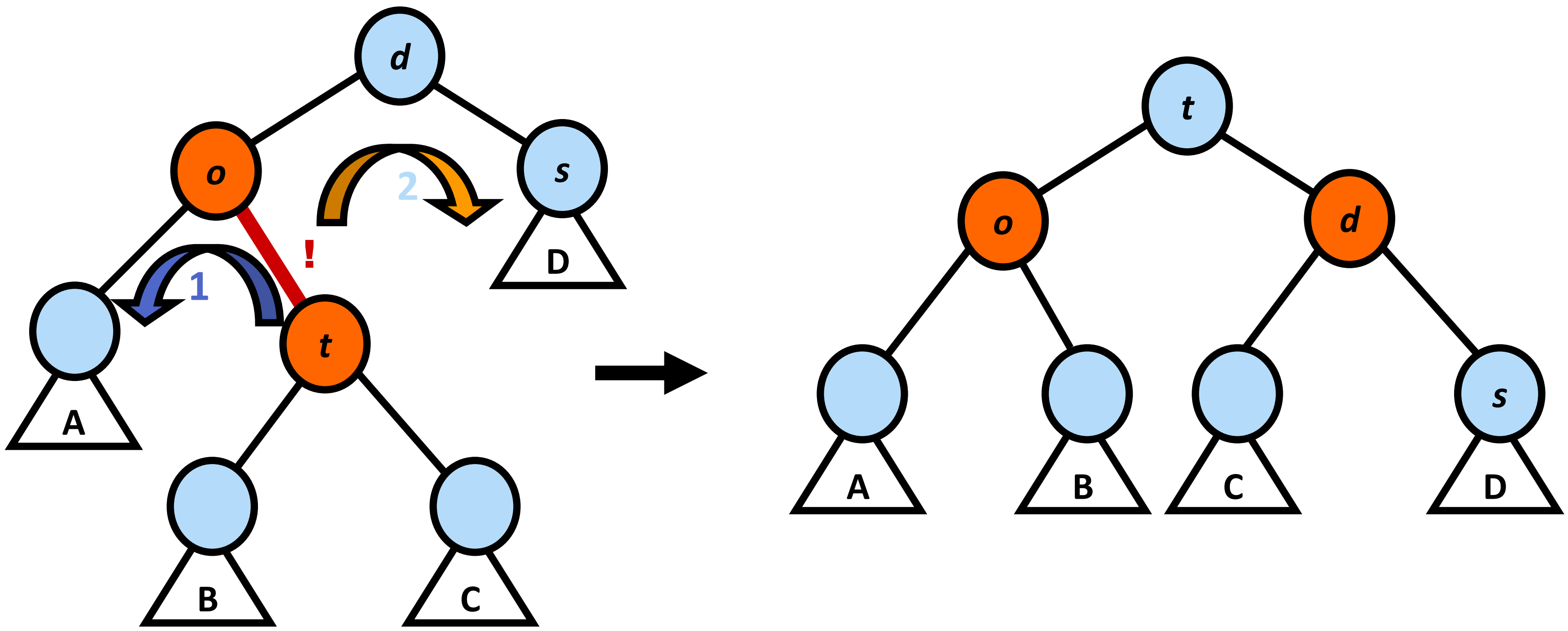
2. *s* je **černý**. Pak záleží na tom, zda hodnota *t* leží mezi hodnotami *o* a *d* nebo ne. Jinými slovy, zda cesta *t-o-d* obsahuje zatáčku.

(a) Bez zatáčky: Provedeme rotaci a přebarvíme podle obrázku. Splněny budou podmínky 1, 2 i 3, tedy máme červeno-černý strom:



Poruchy při vkládání (4)

(b) Se zatáčkou. Provedeme dvojitou (*LR*) rotaci a přebarvíme podle obrázku. Splněny budou podmínky 1, 2 i 3, opět máme rovnou červeno-černý strom.



RB stromy – insert (1)

```
void insertRB ( Node h, Elem x )
  { Node insertedNode = new Node(x);        // assumed RED, links to NIL
    if (h == NIL) head = insertedNode;      // first node
    else {
      while (true) {                        // start searching the place
        if ( x.key == h.item.key )
           { h.item = x; return;            // same key, change value
        } else if ( x.key < h.item.key ) { // left subtree
           if (h.left == NIL)
              { h.left = insertedNode; break; }
           else h = h.left;
        } else {                            // right subtree
           if (h.right == NIL)
              { h.right = insertedNode; break; }
           else h = h.right;
        }                         // end of the last else
      }                           // end of while loop
      insertedNode.parent = h;
    }
    checkCase1(insertedNode);     // check and assure RB tree properties
  }
```

RB stromy – `insert` (2)

Budou se nám hodit (pro přehlednost) následující pomocné funkce:

- `grandParent()` – určí prarodiče uzlu
- `sibling()` – určí sourozence uzlu
- `uncle()` – určí strýce, tj. pravého/levého sourozence rodiče uzlu

```
Node grandParent () // we assume parent != NIL and parent.parent != NIL
  { return parent.parent; }

Node sibling ()     // we assume parent != NIL, root has no sibling
  { if ( this == parent.left )
          return parent.right;
    else return parent.left;
  }

Node uncle ()       // we assume parent != NIL and parent.parent != NIL

  { return parent.sibling(); }
```

RB stromy – insert (3)

- první test **checkCase1** zajistí, aby kořen byl vždy přebarven na černo
- druhý test **checkCase2** zkontroluje, zda je rodič vloženého uzlu černý

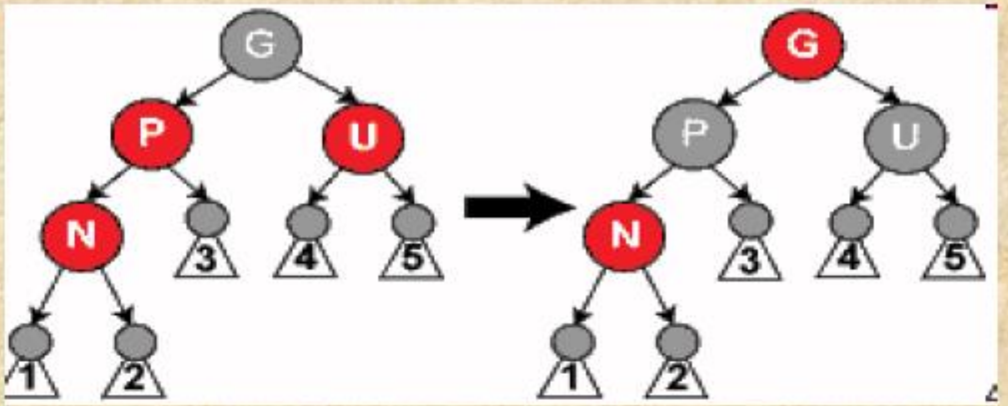
```
private void checkCase1 ( Node n )
  {
    if (n.parent == NIL) n.color = BLACK; // the root was tested
    else checkCase2(n);
  }

private void checkCase2 ( Node n )
  {
    if (n.parent.color == BLACK) return;  // tree is still valid
    else checkCase3(n);
  }
```

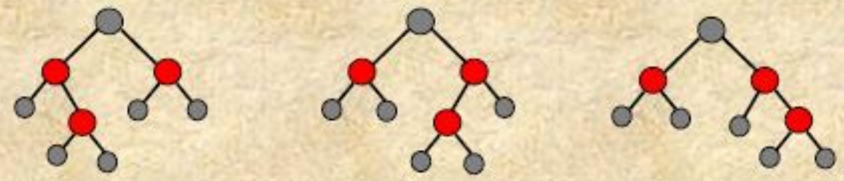
RB stromy – insert (4)

Víme, že uzel n i jeho rodič mají červenou barvu

- je-li také jeho strýc červený, přebarvíme rodiče i strýce na černo, prarodiče na červeno a prověřujeme prarodiče
- jinak pokračujeme dalším testem

POZOR: strýc může být i nalevo od rodiče, uzel n může být levý nebo pravý potomek



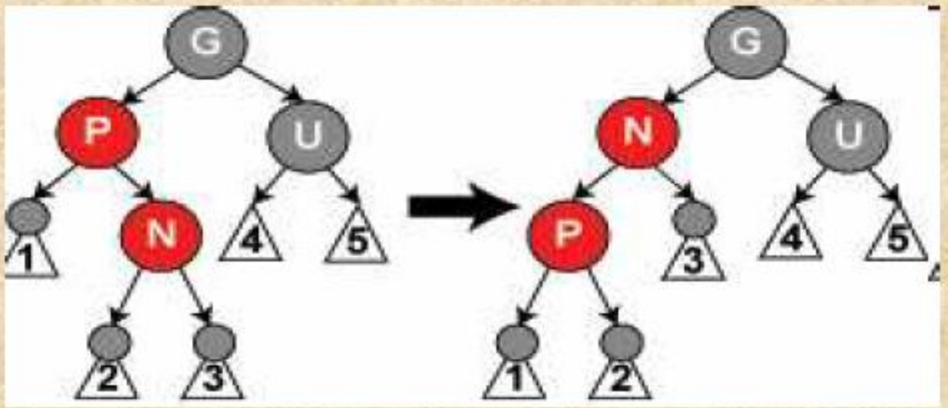


```
void checkCase3 ( Node n )
  { if ( n.uncle().color == RED ) {
      n.parent.color = BLACK; n.uncle().color = BLACK;
      n.grandparent().color = RED;
      checkCase1(n.grandparent());
    } else checkCase4(n);
  }
```

RB stromy – `insert` (5)

Víme, že strýc je černý.

- je-li n pravým synem svého rodiče, který je levým synem jeho prarodiče ⇒ provedeme **rotaci vlevo kolem rodiče** a pokračujeme testem na spodním uzlu
- je-li n levým synem svého rodiče, který je pravým synem jeho prarodiče ⇒ provedeme **rotaci vpravo kolem rodiče** a pokračujeme testem na spodním uzlu

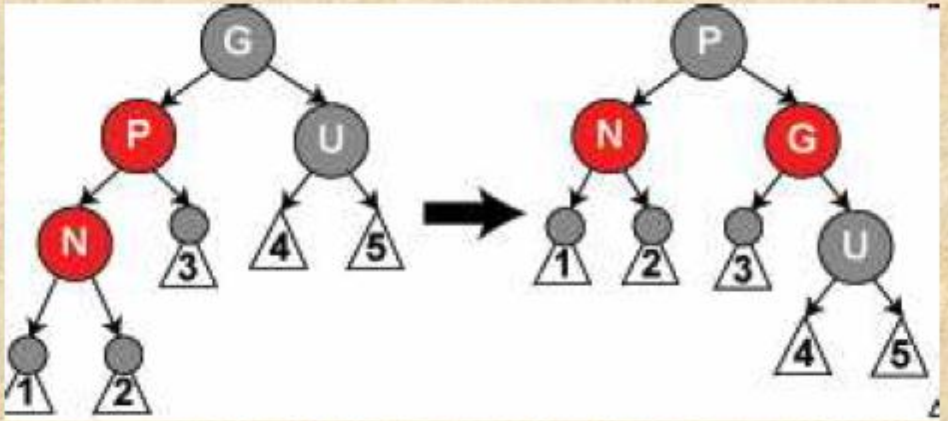



```
void checkCase4  ( Node  n )
  { if  (n == n.parent.right && n.parent == n.grandparent().left)
      { rotateLeft(n.parent); n = n.left; }
    else if  (n == n.parent.left && n.parent == n.grandparent().right)
      { rotateRight(n.parent); n = n.right; }
  insertCase5(n);
  }
```

RB stromy – insert (6)

Uzel n už je na "vnější" straně

- je-li n levým synem svého rodiče, který je levým synem jeho prarodiče ⇒ provedeme **rotaci vpravo kolem prarodiče**
- je-li n pravým synem svého rodiče, který je pravým synem jeho prarodiče ⇒ provedeme **rotaci vlevo kolem prarodiče**

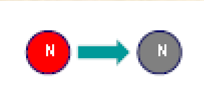


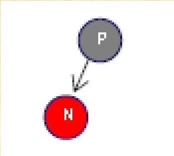

```
void checkCase5 ( Node n )
  { n.parent.color = BLACK;
    n.grandparent().color = RED;
    if ( n == n.parent.left && n.parent == n.grandparent().left)
         rotateRight(n.grandparent());
    else rotateLeft(n.grandparent());
  }
```

RB stromy – `insert` (7)

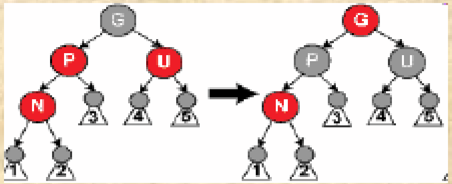
Shrnutí postupu při testování (a úpravě) okolí uzlu n:

- jedná-li se o kořen, obarvíme jej na černo a je hotovo
- jinak, je-li rodič uzlu n černý, je hotovo

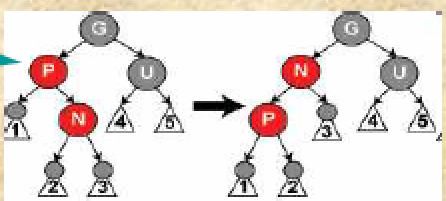




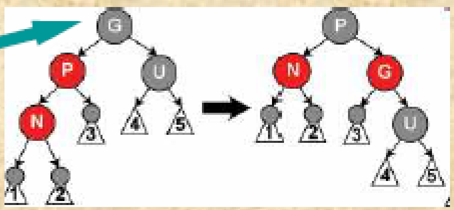
- jinak (víme, že uzel n i jeho rodič mají červenou barvu), je-li také jeho strýc červený, přebarvíme rodiče i strýce na černo, prarodiče na červeno a prověřujeme prarodiče



- jinak, je-li n pravým synem svého rodiče, který je levým synem jeho prarodiče ⇒ provedeme rotaci vlevo kolem rodiče a pokračujeme testováním spodního uzlu
- jinak, je-li n levým synem svého rodiče, který je pravým synem jeho prarodiče ⇒ provedeme rotaci vpravo kolem rodiče a pokračujeme testováním spodního uzlu



- jinak, je-li n levým synem svého rodiče, který je levým synem jeho prarodiče ⇒ provedeme rotaci vpravo kolem prarodiče
- jinak, n je pravým synem svého rodiče, který je pravým synem jeho prarodiče ⇒ provedeme rotaci vlevo kolem rodiče



Vkládání (Insert) v RB-stromech

- Časová složitost je O(log(n)).
- Vyžaduje maximálně dvě rotace.

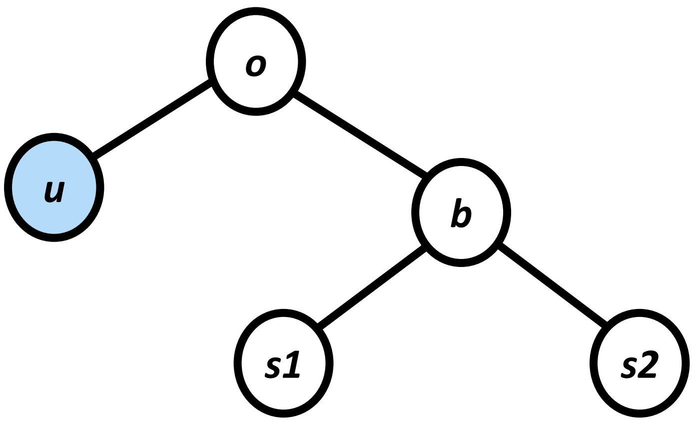
- DEMO:
- http://www.ececs.uc.edu/~franco/C321/html/RedBlack/redblack.html
- (Intuitivní, dobré pro porozumění)
- http://reptar.uta.edu/NOTES5311/REDBLACK/RedBlack.html
- (drobné odlišnosti v pořadí přebarvení a rotací)
- http://www.youtube.com/watch?v=vDHFF4wjWYU

Operace DELETE pro RB-stromy

- Zatímco INSERT se příliš nelišil od své obdoby u AVL stromů, operace DELETE u červeno-černých stromů je oproti AVL stromům složitější mentálně, ovšem jednodušší časově.
- Situace: odstraňujeme vrchol *t* a jeho syna, který je list.
- Druhého syna *t*, *u*, dáme na místo smazaného *t* a začerníme ho. Tím máme splněny podmínky 1 a 2. Pokud byl ale *t* **černý**, chybí nám na cestách procházejících nyní *u* jeden černý vrchol.

Poruchy při mazání

Situace: máme červeno-černý strom, *u* je porucha s otcem *o*, bratrem *b* a synovci *s1*, *s2*, viz obrázek.

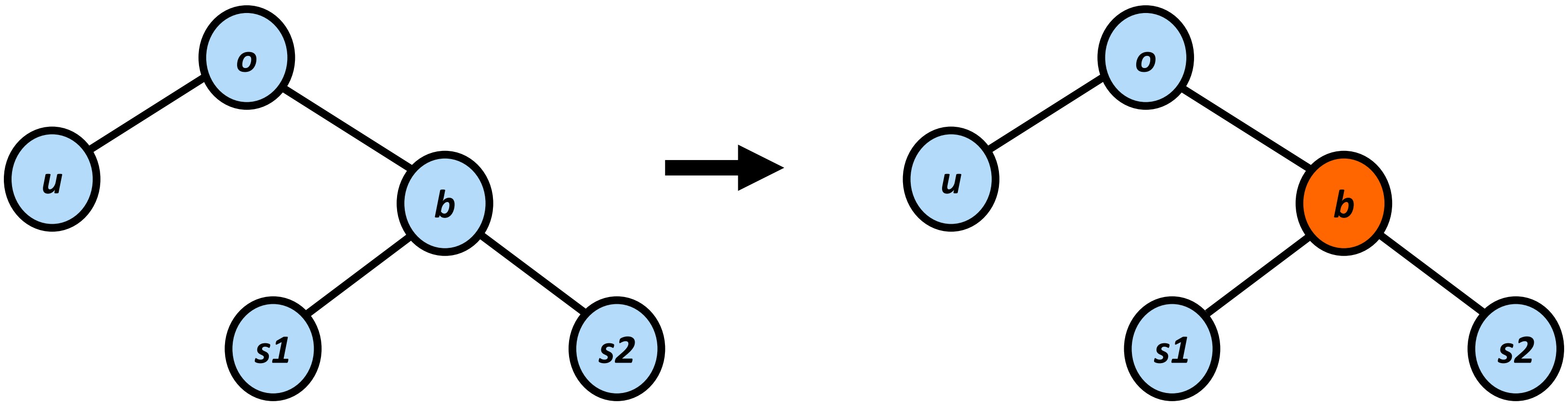


Oprava záleží na ***barvě bratra*** (*b*):

Poruchy při mazání (2)

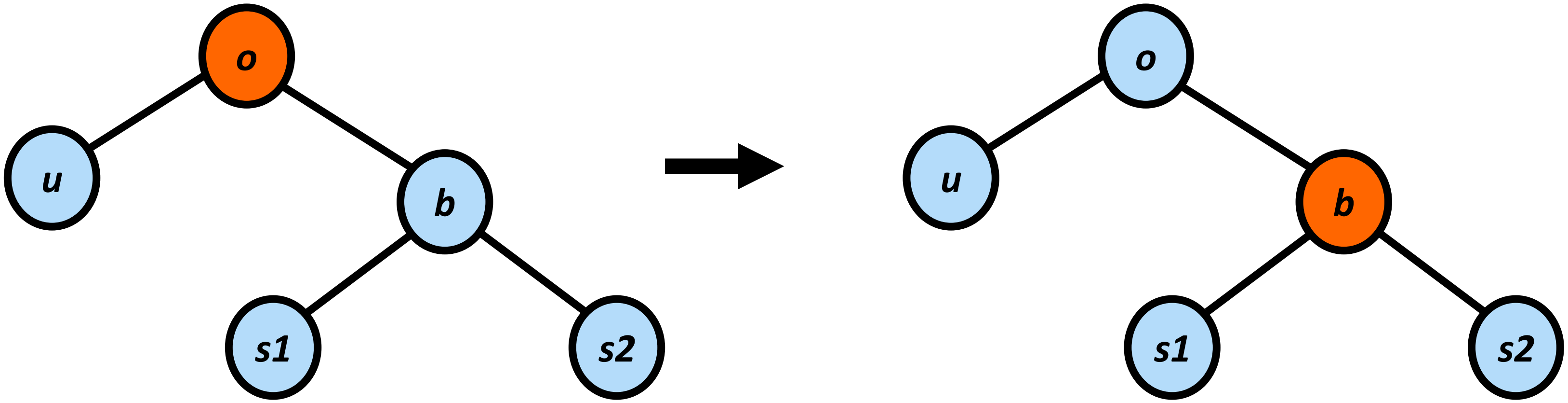
1. Bratr je **černý**. Rozlišujeme dále 4 případy, z nichž jeden způsobí poruchu o hladinu výše a ostatní skončí s červeno-černým stromem.

(a) Otec i synovci jsou **černí**. Přebarvíme *b* na červeno, viz obrázek, a tady porucha je o hladinu výše – provedli jsme tedy jakousi částečnou opravu.



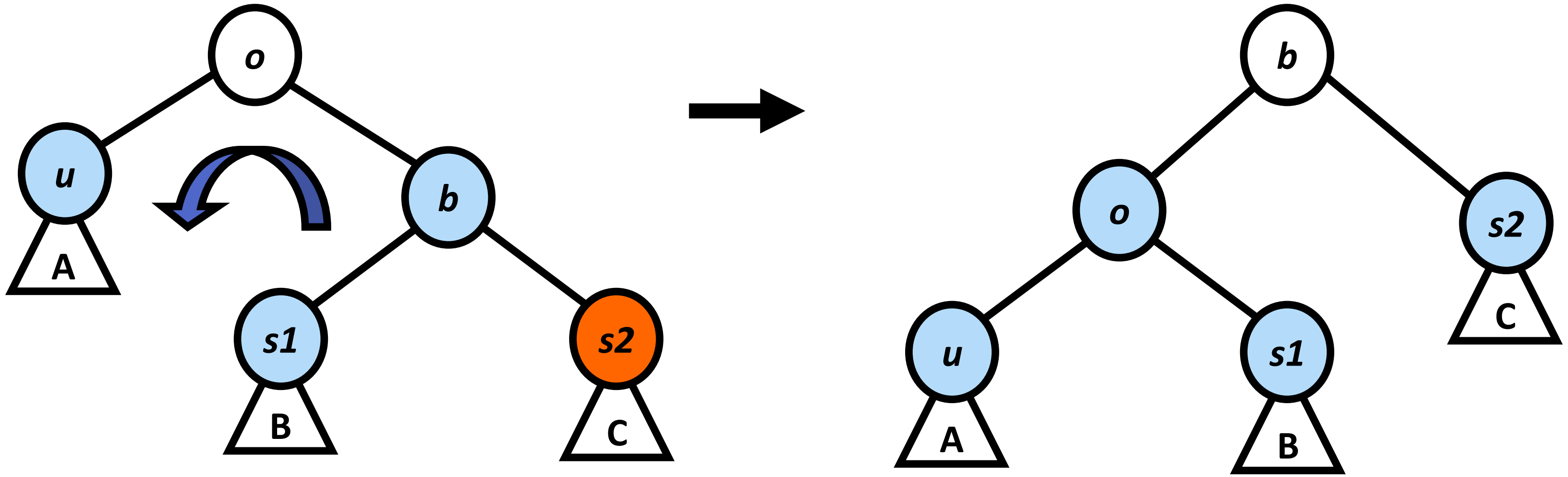
Poruchy při mazání (3)

(b) Otec je **červený**, synovci **černí**. Přebarvíme otce a bratra podle obrázku a dostáváme červeno-černý strom.



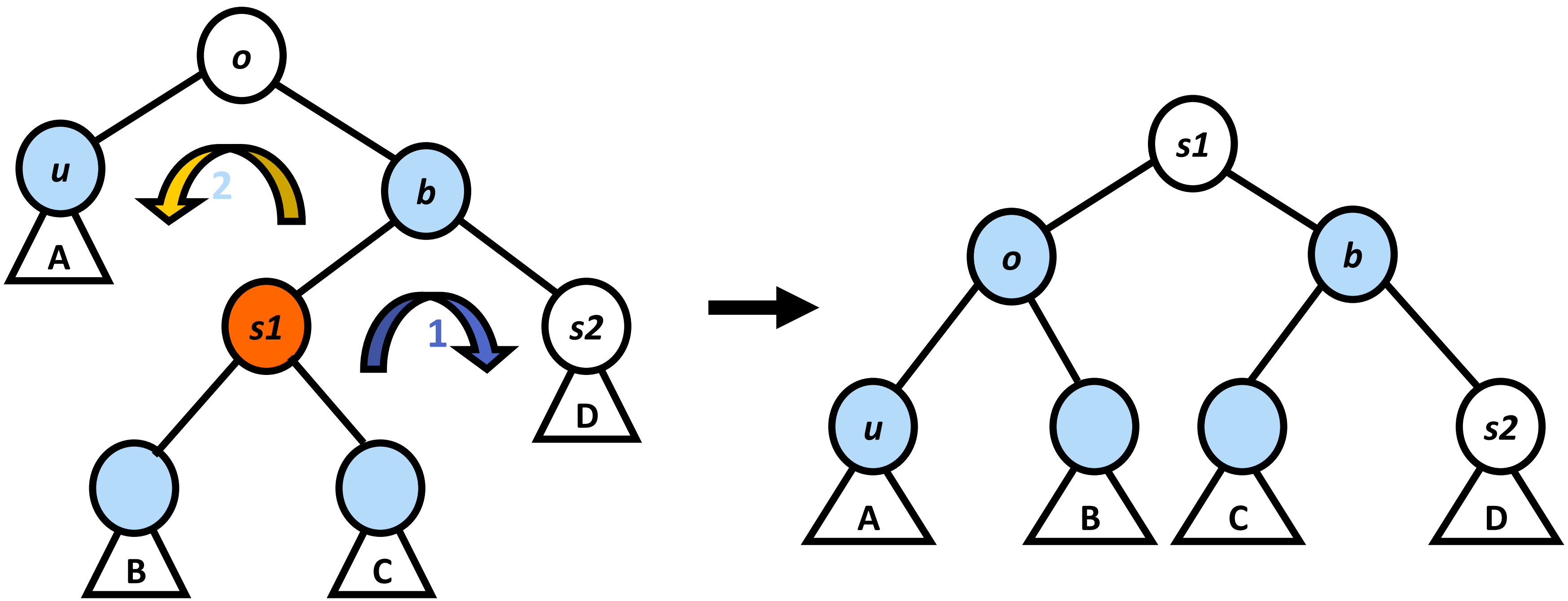
Poruchy při mazání (4)

(c) Synovec *s1*, jehož hodnota leží mezi hodnotami otce a bratra, je **černý**, druhý synovec je **červený**. Přebarvíme a rotujeme podle obrázku, barva otce se nemění (tj., vrchol *b* bude mít barvu, kterou původně měl vrchol *o*). Dostáváme červeno-černý strom.



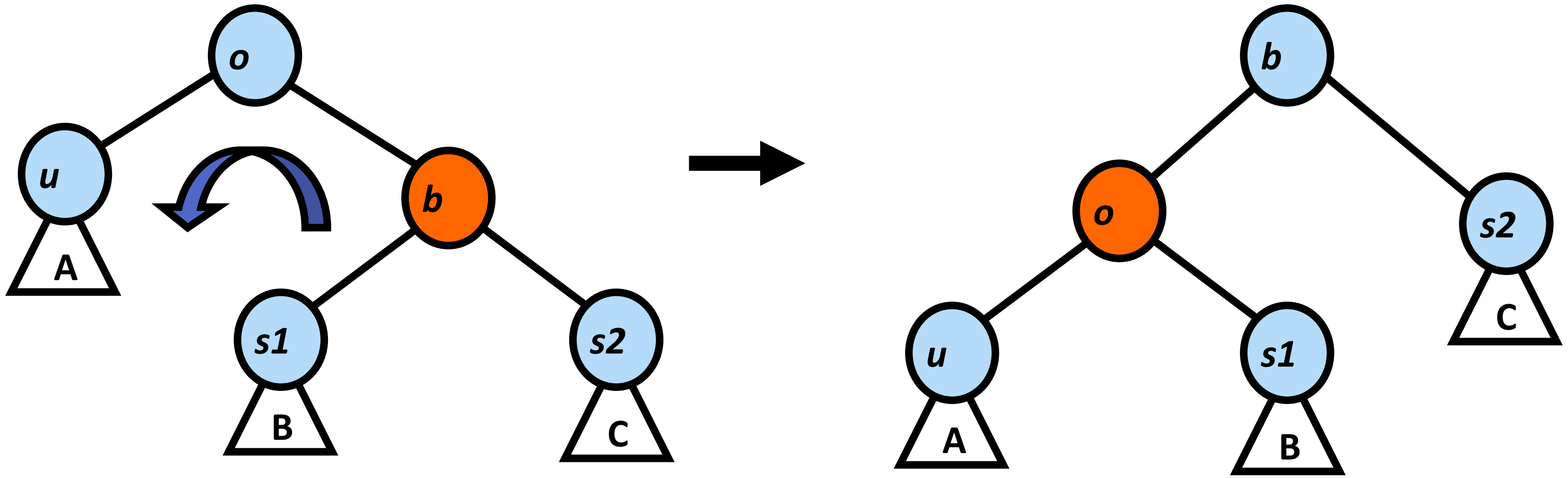
Poruchy při mazání (5)

(d) Synovec *s1*, jehož hodnota leží mezi hodnotami otce a bratra, je **červený**, druhý synovec má libovolnou barvu. Přebarvíme a *RL* rotací upravíme podle obrázku (tj. vrchol *s1* bude mít barvu, kterou měl původně vrchol *o* a barva vrcholu *s2* se nezmění). Dostáváme červeno-černý strom.



Poruchy při mazání (6)

2. Bratr je **červený**. Přebarvíme a rotujeme podle obrázku. Dostáváme červeno-černý strom s poruchou, přičemž porucha je o hladinu níže. I když to tak na první pohled nevypadá, máme vyhráno, protože bratr poruchy je **černý** a otec **červený**, tedy příští oprava bude případ 1b, 1c, nebo 1d a skončíme s červeno-černým stromem.



Mazání v RB-stromě

- Časová složitost je O(log(n)).
- Jsou zapotřebí maximálně tři rotace.

Důkaz výšky RB-stromu

Věta: RB-strom s *n* interními uzly má výšku *h* nejvýše 2lg(*n*+1).

Důkaz:

- Ukažme, že podstrom s kořenem v x obsahuje nejméně $2^{bh(x)}-1$ *interních uzlů*. Indukcí dle výšky podstromu s kořenem v x:
  - Pokud je x list, pak $bh(x) = 0$, $2^{bh(x)}-1 = 0$ interních uzlů (uzel **nil**).
  - Předpokládejme, že výška x je h, potomci x mají výšku h -1:
    - černá výška potomků x je buď $bh(x)-1$ nebo $bh(x)$ (podle barvy),
    - indukční předpoklad je, že potomci x mají nejméně $(2^{bh(x)}-1)-1$ interních uzlů,
    - pak podstrom s kořenem v x obsahuje nejméně:

      $$2^{bh(x)-1} -1 + 2^{bh(x)-1} -1 + 1 = 2^{bh(x)} - 1$$ interních uzlů.
  - Nechť h je výška stromu, který rotujeme v x:
    - $bh(x) \geq h / 2$ (max ½ je červených),
    - pak $n \geq 2h/2 - 1 \Leftrightarrow n + 1 \geq 2h/2 \Leftrightarrow \lg(n+1) \geq h / 2$ a
    - $h \leq 2\lg(n+1)$.

Zhodnocení pro RB-stromy

- Pro binární vyhledávací červeno-černé stromy lze implementovat SEARCH, INSERT a DELETE tak, že vyžadují čas O(log n) a INSERT používá nejvýše jednu (dvojitou) rotaci a DELETE používá nejvýše dvě rotace nebo rotaci a dvojitou rotaci.
- RB-stromy jsou lepší než AVL stromy, které pro DELETE potřebují až log n rotací. Oproti váhově vyváženým stromům i proti AVL stromům jsou červeno-černé stromy sice jen konstantně lepší, ale i to je dobré.
- Při použití binárních vyhledávacích stromů ve výpočetní geometrii nese informaci i rozložení prvků ve stromě, a tato informace se musí po provedení rotace nebo dvojité rotace aktualizovat. To znamená prohledání celého stromu a tedy čas O(n) za každou rotaci a dvojitou rotaci navíc.
- Pro tyto problémy jsou červeno-černé stromy obzvláště vhodné, protože minimalizují počet použitých rotací a dvojitých rotací.

B-stromy (B-trees)

1. Motivace
2. Více-cestné vyhledávací stromy (multiway search trees)
3. Definice B-stromu
4. Search
5. Insert
6. Delete

Motivace pro B-stromy

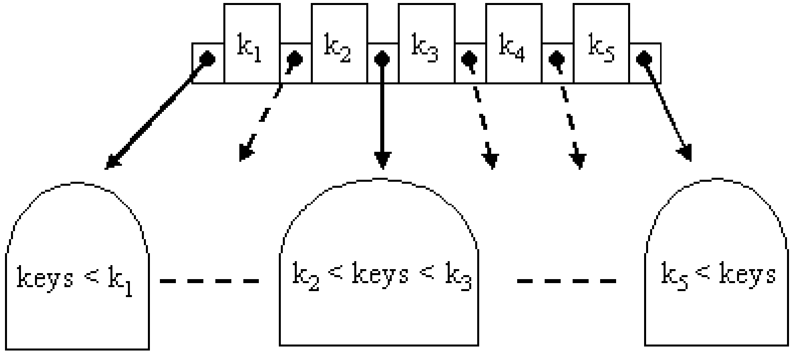
- Velká data se nevejdou do operační paměti -> používáme disky (vnější paměti s přímým přístupem).
- Čas přístupu na disk je určen HW a OS.
- Přístup na disk je MNOHEM pomalejší, v porovnání s přístupem do operační paměti:
  - 1 diskový přístup ~ 13 000 000 instrukcí!!!!
  - Počet diskových operací dominuje v odhadu časové náročnosti.
- Přístup na disk = Disk-Read, Disk-Write
  - Disk je rozdělen do bloků (512, 2048, 4096, 8192 bytes), které se přenášejí jako celek.
  - Proto se může hodit návrh více-cestných vyhledávacích stromů (*multiway search trees*), kde každý uzel stromu „pasuje“ do jednoho bloku na disku.

DISK : 16 ms
Seek 8ms + rotational delay 7200rpm 8ms

Instruction:
800 MHz 1,25ns

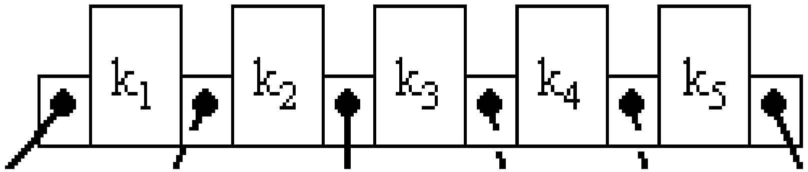
Více-cestné vyhledávací stromy

- Zobecnění binárních vyhledávacích stromů, kde počet následníků byl *m*=2.
- Každý uzel více-cestného stromu má nejvýše *m* potomků (*m*>2).
- Interní uzly obsahující *n* klíčů mají *n*+1 následníků, *n* < *m* (výjimkou může být kořen stromu).
- Listy nemají následníky.
- Strom je uspořádán.
- Klíče v uzlech vymezují intervaly v podstromech - viz obrázek:



Listy více-cestného vyhledávacího stromu

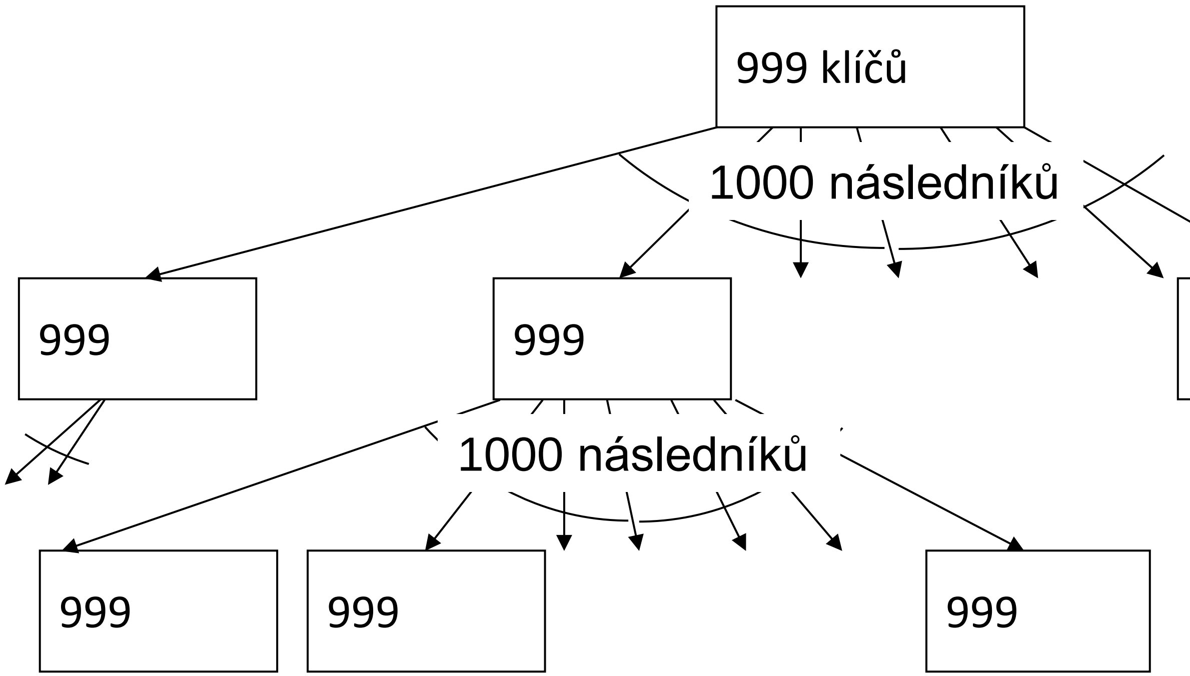
- Listy více-cestného vyhledávacího stromu nemají žádné následníky a neobsahují žádné ukazatele na podstromy. Obvykle obsahují vlastní hodnoty.
- Platí: $k_1 < k_2 < \ldots < k_5$



B-stromy (B-trees)

- **B-strom** je více-cestný vyhledávací strom stupně *m*, který splňuje další podmínky:
- Všechny listy mají stejnou výšku (B-strom je vyvážený - vybalancovaný).
- Pro všechny interní uzly platí:
  - <u>mají nejméně</u> *m*/2 neprázdných potomků (precizně později) a
  - <u>mají nejvýše</u> *m* neprázdných potomků.
- Kořen může mít 0 nebo 2 až *m* potomků:
  - 0 - **list**
  - *m* - tzv. **plný uzel** (**full node**)

Příklad B-stromu



1 uzel má 999 klíčů

1000 uzlů má
999 000 klíčů

1 000 000 uzlů má
999 000 000 klíčů

B-strom stupně *m*=1000 výšky 2 obsahuje

1 001 001 uzlů (1+1000 + 1 000 000)

999 999 999 klíčů ~ 1 miliarda klíčů

Obsah uzlů B-stromu

- *n* … počet klíčů k_i uložených v uzlu.
- Uzel, kde $n = m$-1 se nazývá **plný uzel** (**full-node**).
- k_i … n klíčů, uložených v neklesajícím pořadí
- $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n$
- *list* … booleovská hodnota, true pro list, false pro ostatní.
- c_i … n+1 ukazatelů na následníky (nedefinováno pro listy).
- Pro klíče k_i v podstromech platí:
- $keys_1 \leq k_1 \leq keys_2 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n \leq keys_{n+1}$

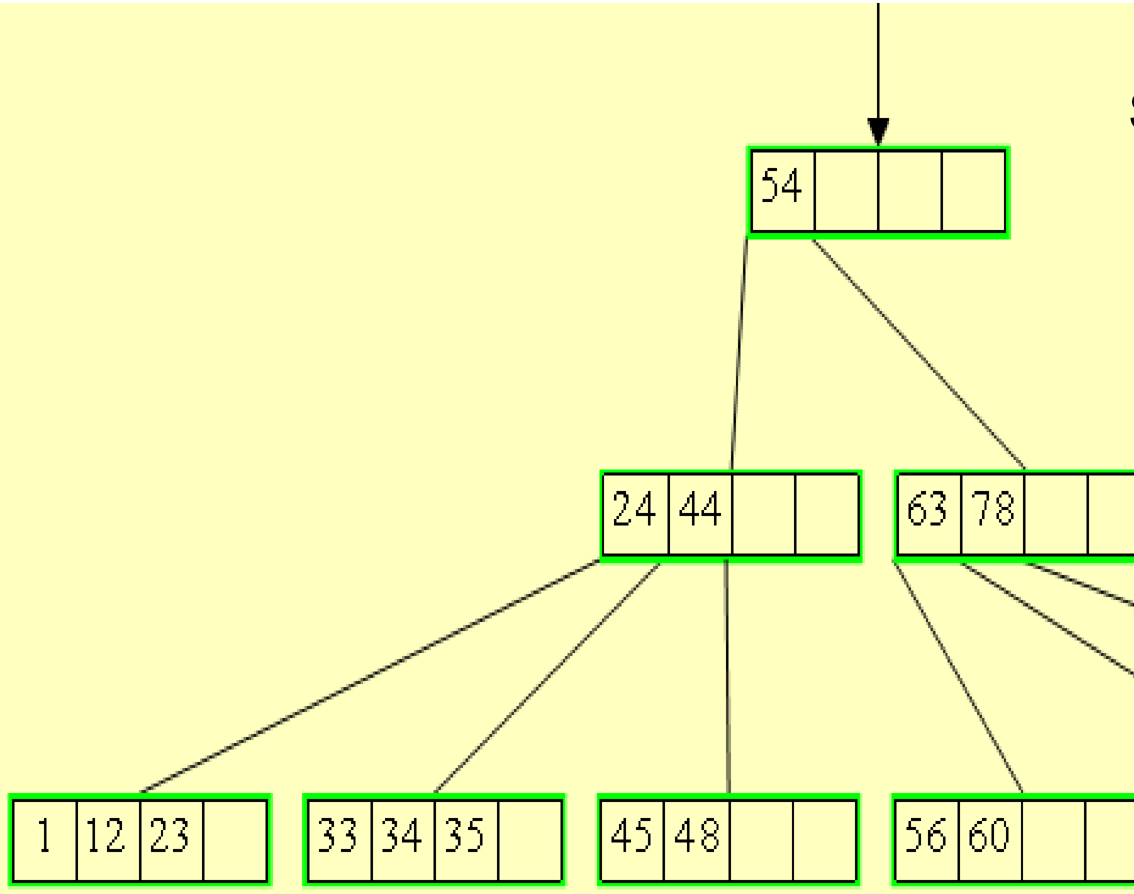
B-stromy (1)

Motivace:

- velmi rozsáhlé datové soubory bývají uložené na vnější paměti (disku)
- přístup na disk (čtení jedné stránky) je typicky o 4 – 5 řádů pomalejší než přístup do vnitřní paměti
- při hledání v datech potřebujeme minimalizovat počet přístupů
- používáme hierarchickou soustavu indexů v podobě k-árních stromů s vysokým stupněm větvení k (uzel může obsahovat až k-1 klíčů a k odkazů na potomky)
- např. pro k=1001 může strom výšky 2 obsahovat až 1 003 003 000 klíčů (v kořeni až 1000, v potomcích kořene až 1001×1000 = 1 001 000, v listech 1001×1001×1000 = 1 002 001 000)
- vnitřní uzly stromu obsahují klíče a odkazy na další uzly
- listy obsahují pouze klíče

POZOR: budeme předpokládat, že asociovaná informace je uložena spolu s klíčem (např. formou odkazu na disk apod.)

B-strom



Stupeň 5 (5-ární strom)

Minimální stupeň t = 3

Based on [Cormen] and [Maire]

B-stromy (2)

B-strom zavedeme jako kořenový strom s těmito vlastnostmi:

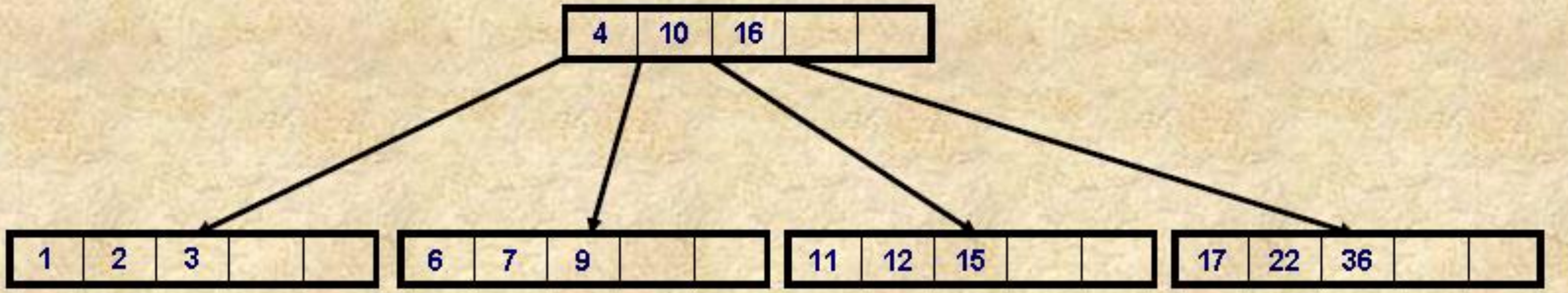
1. každý jeho uzel x obsahuje tyto složky
   - x.n – počet skutečně uložených klíčů v x
   - x.n klíčů uspořádaných vzestupně x.key[1] ≤ x.key[2] ≤ … ≤ x.key[x.n]
   - x.leaf – příznak, zda se jedná o list
2. každý vnitřní uzel x obsahuje x.n+1 odkazů x.c[1], x.c[2], …, x.c[x.n+1] na své potomky, v listech mají tyto odkazy nedefinovanou hodnotu
3. klíče x.key[i] rozdělují rozsahy klíčů uložených v každém podstromu takto: je-li k_i libovolný klíč uložený v podstromu s kořenem x.c[i], pak platí

   $$k_1 \leq x.key[1] \leq k_2 \leq x.key[2] \leq k_3 \leq \ldots \leq x.key[x.n] \leq k_{x.n+1}$$

4. všechny listy jsou ve stejné hloubce od kořene, což je výška **h** daného B-stromu
5. je stanoven minimální a maximální počet klíčů v uzlu pomocí čísla **t ≥ 2** takto:
   – kořen (neprázdného stromu) musí obsahovat alespoň jeden klíč, ostatní uzly **alespoň t-1 klíčů** (tedy alespoň t potomků)
   – každý uzel smí obsahovat **nejvýše 2t-1 klíčů** (tj. nejvýše 2t potomků)

B-stromy (3)

B-strom pro minimální stupeň t = 3, min t-1 = 2, max 2t-1= 5 klíčů



Operace s B-stromy

- Search
- Insert
- Delete

Hledání v B-stromech

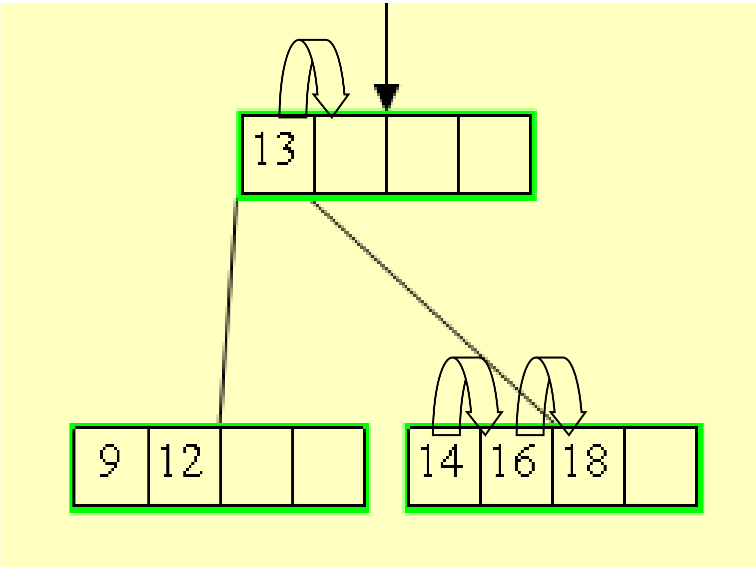
- Obdobné hledání v BVS.
- V rámci uzlů se hledá sekvenčně, nebo binárně.

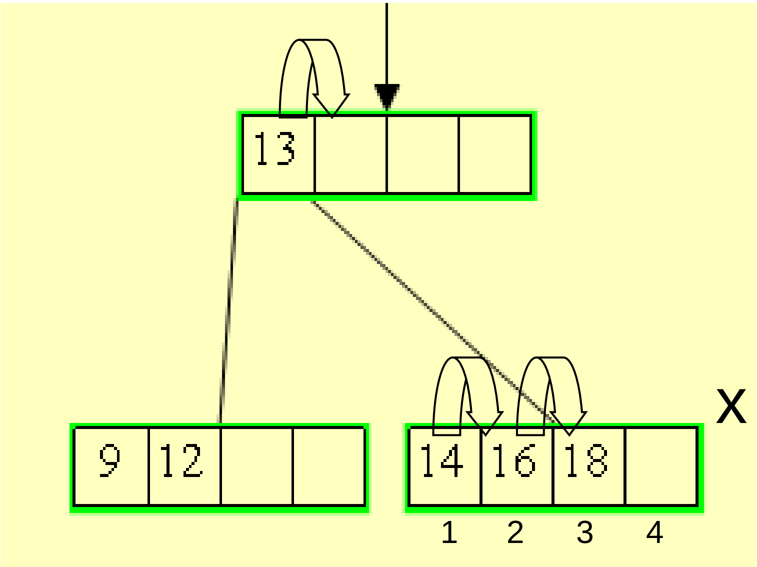
- Vstup: ukazatel na kořen stromu a klíč *k*
- Výstup: uspořádaná dvojice (*y*, *i*), kde *y* je uzel a *i* je index v rámci uzlu takový, že *y*.*k*[*i*] = *k* nebo hodnota NIL, pokud klíč *k* nebyl nalezen.

Příklad hledání v B-stromu

- Hledej 17 17

Hledej 18 18





17 not found => return NIL

18 found => return (x, 3)

B-stromy (4)

Hledání v B-stromu je analogické hledání v BVS:

B-Tree-Search (x, k) (volný pseudokód)

```
1.  i = 1;
2.  while ((i ≤ x.n) && (k > x.key[i])) i++;
3.  if ((i ≤ x.n) && (k = x.key[i])) return (x, i);
4.  if (x.leaf) return null;
5.  else {
6.      Disk-Read(x.c[i]); return B-Tree-Search(x.c[i], k);
7.  }
```

Poznámka – předpokládáme, že jednotlivé uzly/stránky se čtou z disku

Vytvoření prázdného B-stromu:

B-Tree-Create (T)

```
1.  x = new BNode();
2.  x.leaf = true; x.n = 0; DISK-WRITE(x);
3.  T.root = x;
```

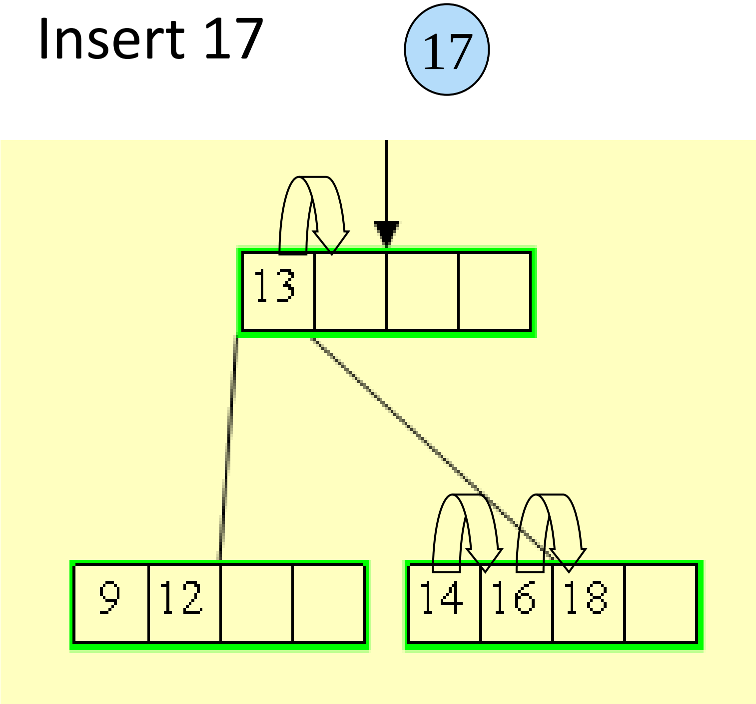
Operační složitost hledání v B-stromu

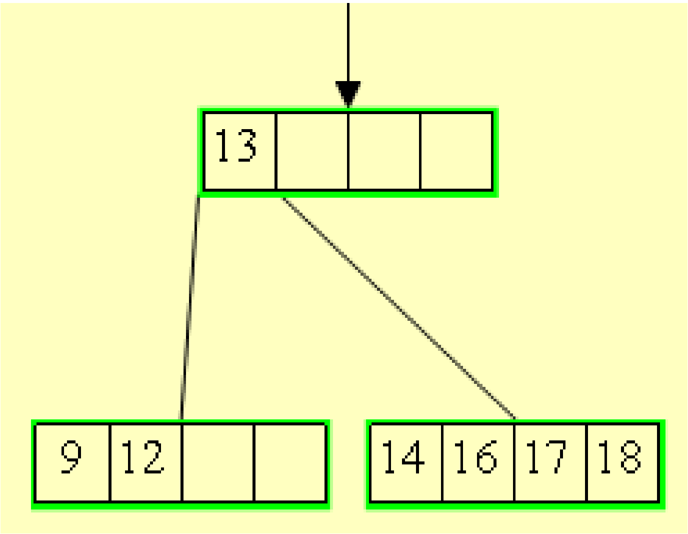
- Počet čtení z disku:
- $\mathrm{O}(h) = \mathrm{O}(\log_m n)$
- kde h je výška stromu a m je stupeň stromu a n je počet uzlů stromu.
- Protože počet klíčů je $x.n < m$, celá smyčka má horní odhad $O(m)$ a celková časová složitost je $O(m \log_m n)$.

B-stromy: insert - 1.vícefázová strategie

Insert do uzlu, který není zcela naplněn (**not full** node)

- Insert 17

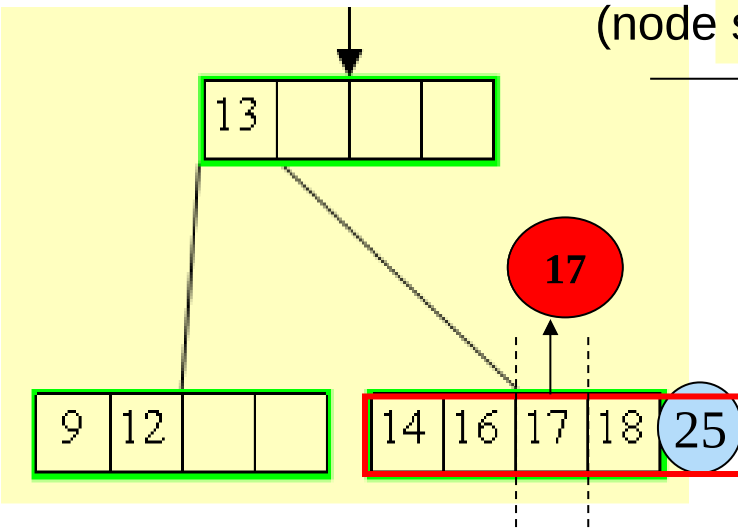




B-stromy: insert - 1.vícefázová strategie

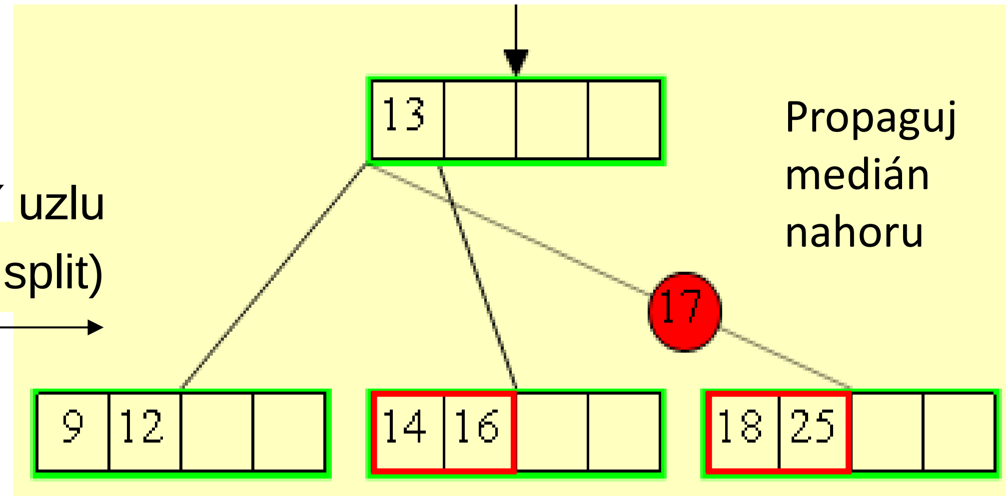
Insert do „**plného uzlu**“

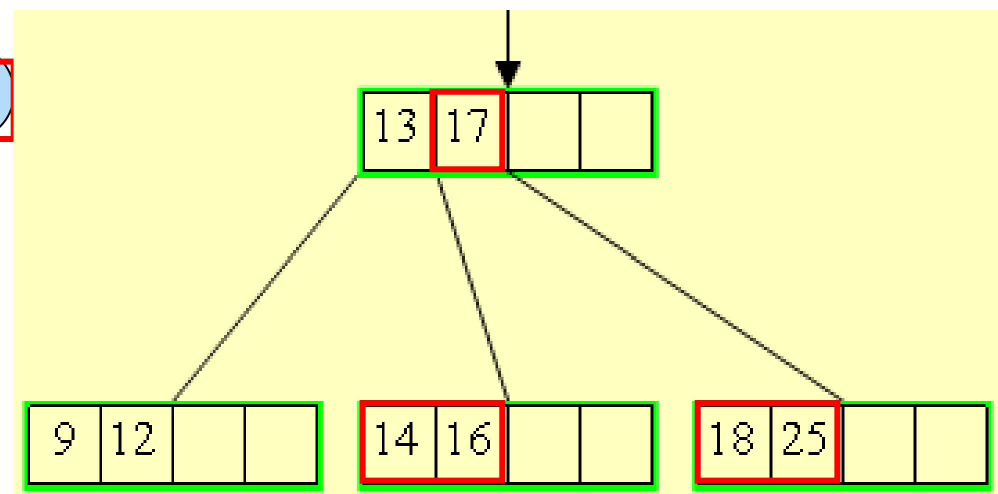
- Insert 25



median

Dělení uzlu (node split)





1.Vícefázová strategie:
“řeš problém, až když se vyskytne”

B-stromy: insert - 1.vícefázová strategie

Insert (x, T) - pseudokód

Fáze top-down

- Najdi list pro *x*
- Pokud uzel není plný, insert *x* a konec
- **while** (je aktuální uzel plný) (node overflow)
- najdi medián (z klíčů po vložení x)
- rozděl uzel (split node) do dvou uzlů
- propaguj medián směrem nahoru
- aktuální uzel = rodič aktuálního uzlu

Fáze bottom-up

B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

Princip: “ignoruj budoucí problémy”

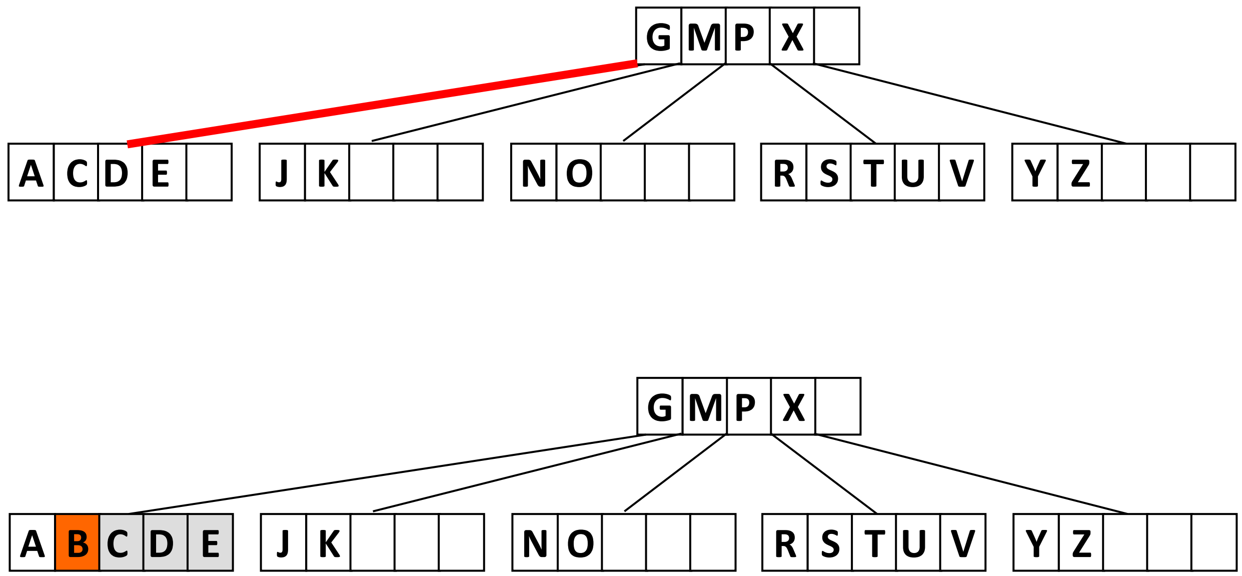
Pouze fáze top-down

- Rozděl při vstupu naplněný uzel.
- Tím si vytvoříš prostor pro budoucí medián z potomků.
- Fáze „bottom-up“ není zapotřebí.

- Rozdělení (splitting of):
  - kořen => strom naroste o úroveň,
  - vnitřní uzel nebo list => rodič obdrží klíč, který je medián

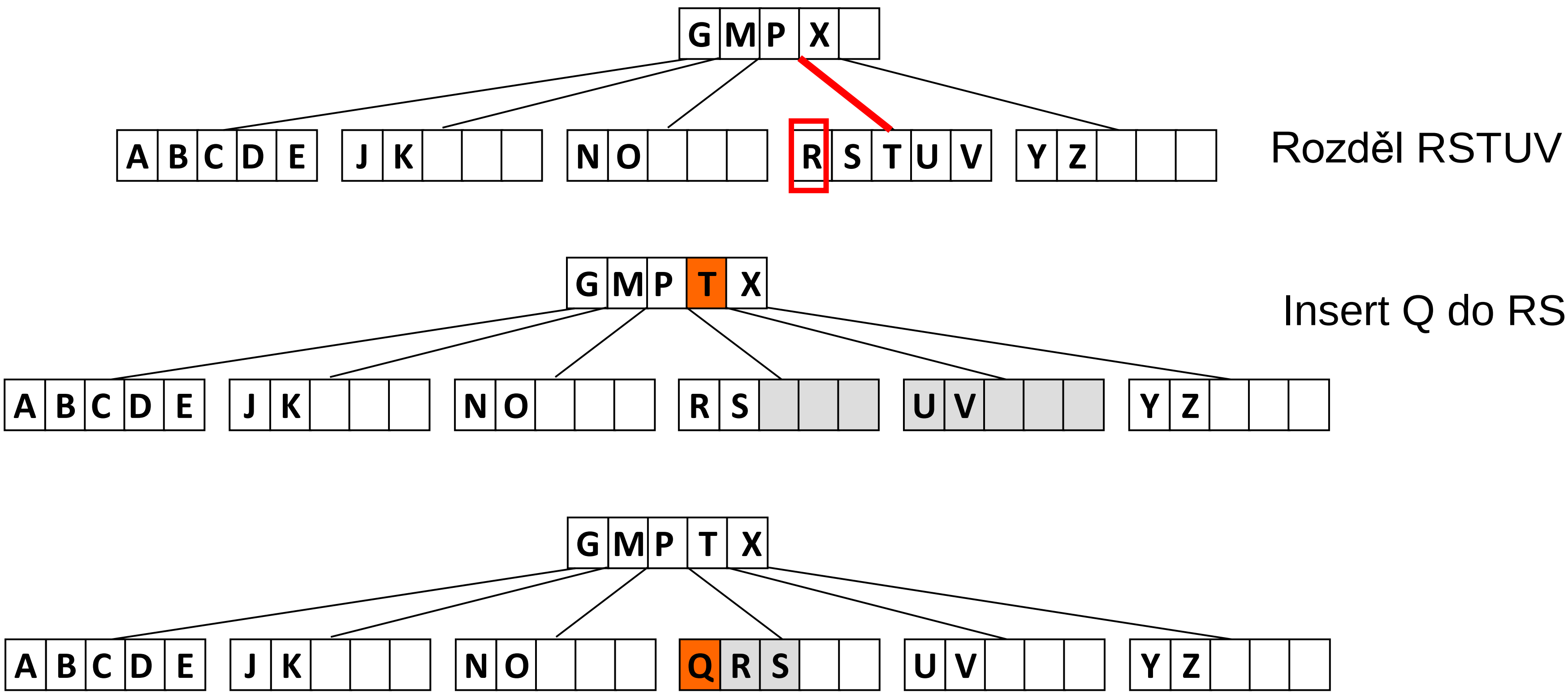
B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

Insert do nenaplněného uzlu (**not full**)



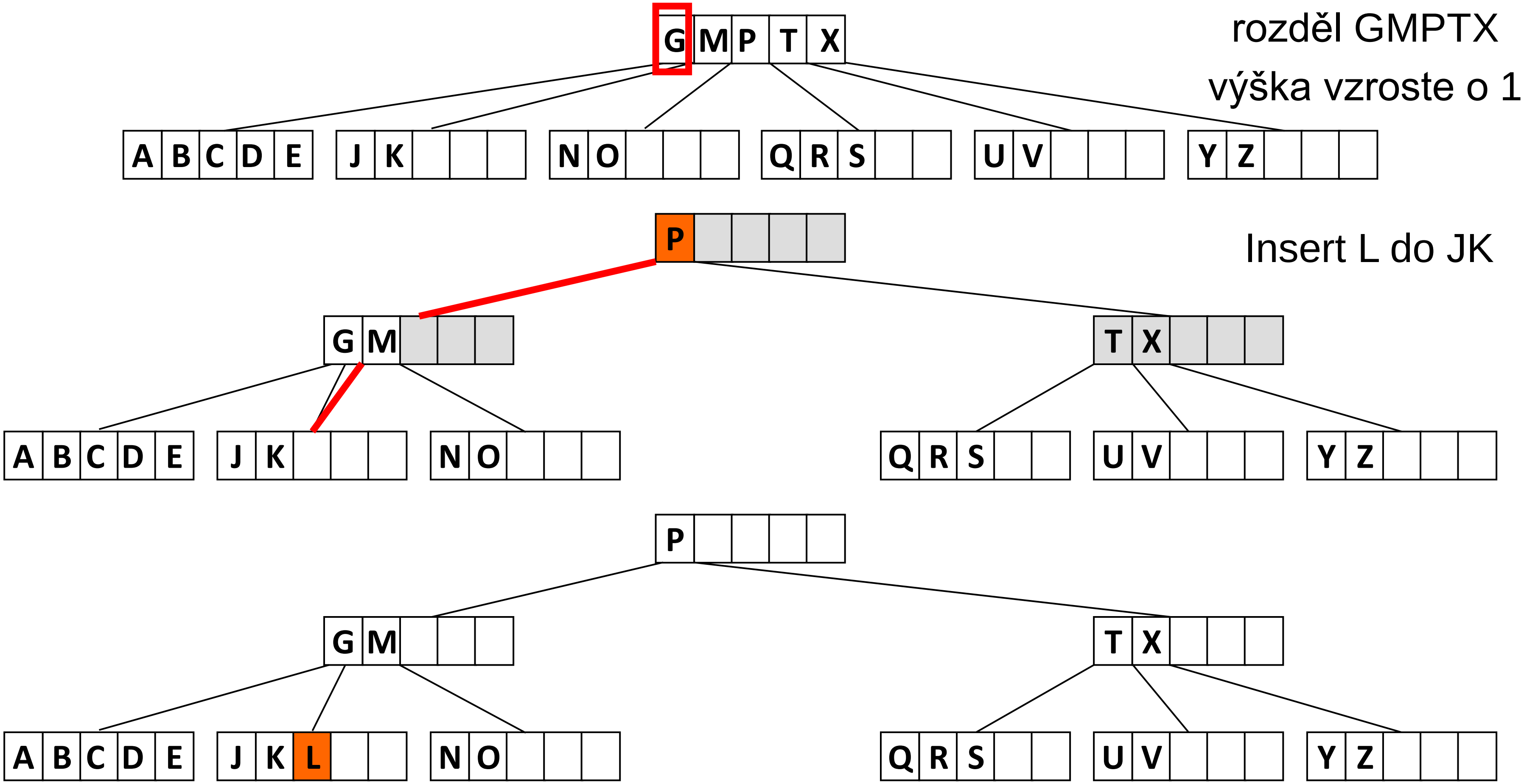
B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

Přeskok „**full node**“ a vložení do „**not full**“



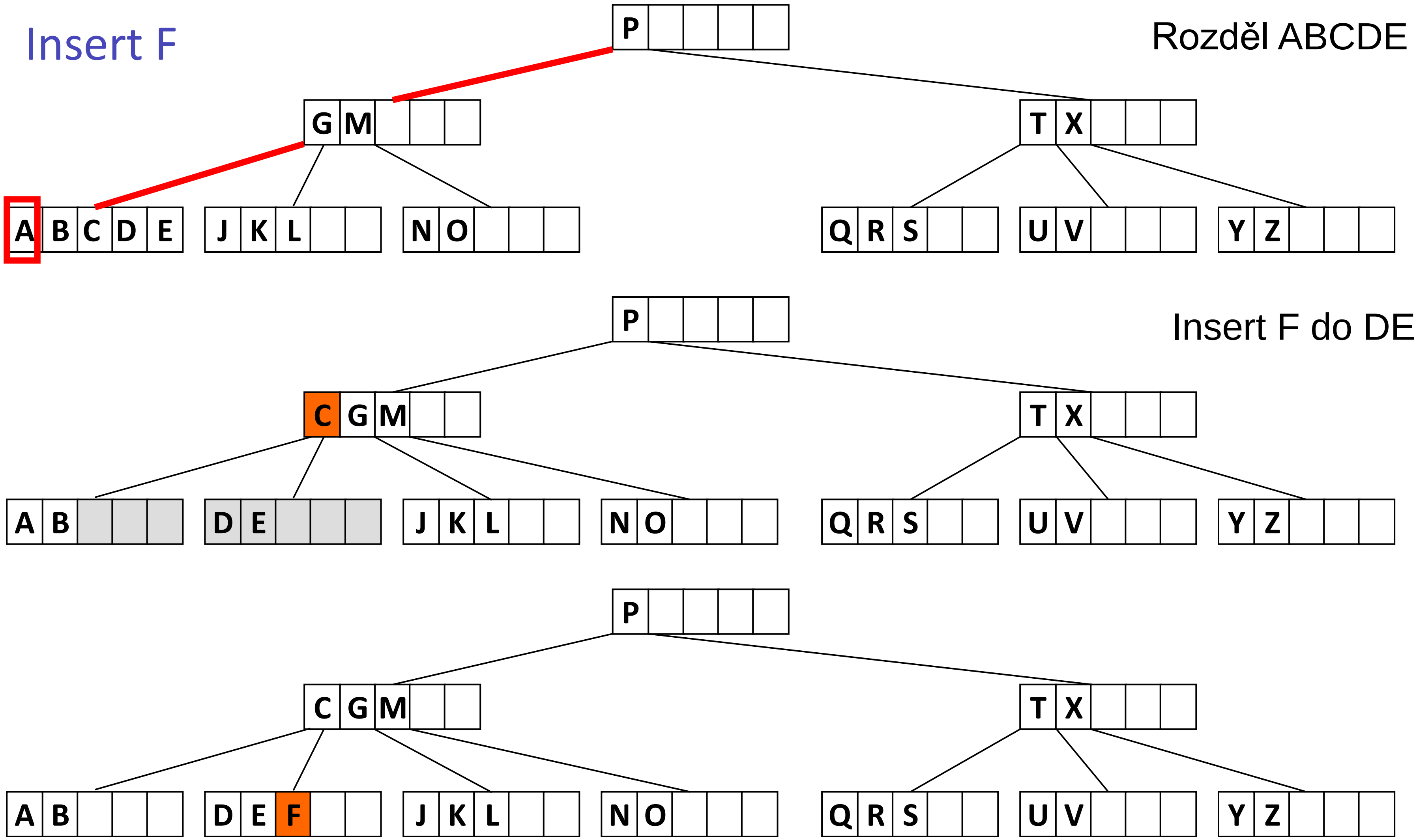
B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

Ignorování „**full node**“ a vložení do „**not full**“ uzlu



B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

- Insert F



B-stromy: insert - 2.jednofázová strategie

Insert (x, T) - pseudokód

Top down phase only

- While hledej listy *x*
- if (je uzel plný)
- najdi medián (mezi klíči naplněného uzlu)
- rozděl (split) uzel na dva
- vlož (insert) medián do rodiče (parent).
- Insert *x* a zastav.

B-stromy (5)

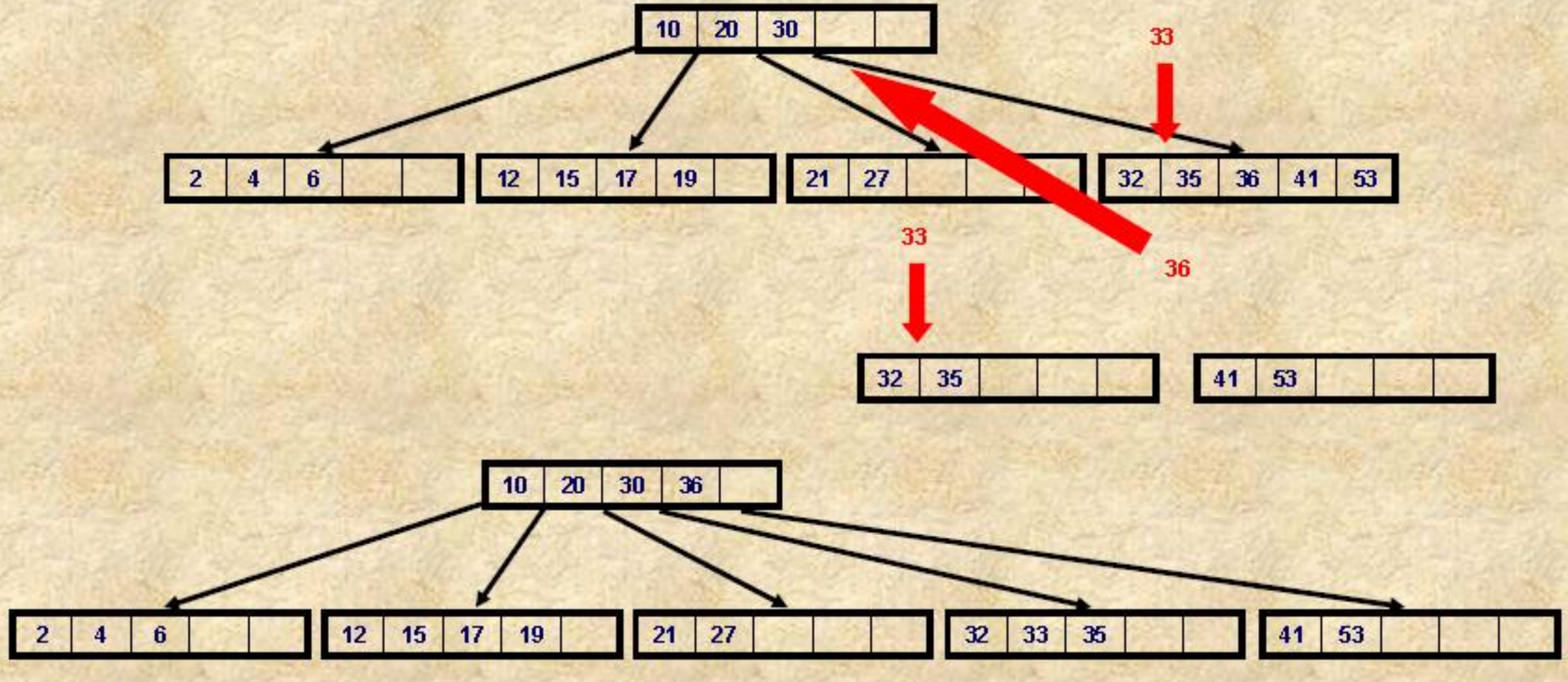
Základní postup vkládání do B-stromu:

- hledáme jako u BVS, kam umístit vkládaný klíč – bude to **vždy v listu**, nemůžeme vytvořit nový list
- pokusíme se vložit klíč do příslušného listu – to nelze provést, pokud je už zcela plný (má ***2t-1*** klíčů)
- provedeme operaci **split** (rozdělení) listu podle jeho klíče-mediánu `y.key[t]` na dva uzly, které mají ***t-1*** klíčů každý
- klíč-medián se **posouvá do rodičovského uzlu**, aby určoval rozdělení mezi dvěma vytvořenými uzly
- pokud je ale rodič plný, pak se **musí také rozdělit**, dříve než se do něj nový klíč vloží
- operace **split** tedy může postupovat (potenciálně) **až do kořene** B-stromu
- postup můžeme navrhnout tak, že se **plné uzly (včetně kořene) rozdělují již cestou dolů** ve stromu, takže pro kterýkoliv plný uzel y už máme zaručeno, že jeho rodič plný není

B-stromy (6)

Vložení klíče 33:

příslušný list je plný, takže medián 36 půjde do rodiče, split plného listu na dva listy, klíč 33 jde do prvního listu



Strategie pro úpravy B-stromu (update)

Dvě principiální strategie

1. Více-fázová strategie:
- “řeš problém, až když se vyskytne”
2. Více-fázová strategie: [Cormen]
- “neřeš budoucí problémy”
- Akce:
- Rozděl plné uzly
- Sluč uzly, které mají minimální obsah (méně než minimum položek).

Delete pro B-stromy

Delete (x, btree) - principy

Pouze více-fázová strategie

- Najdi (search) hodnotu, která se má zrušit.
- Pokud se jedná o jednoduchý uzel, pak jednoduše zruš uzel, jinak použij algoritmus „zrušEntry“ pro listy stromu a jednoduše uzel zruš (corrections of number of elements later).
- Pokud se jedná o vnitřní uzel, pak:
  - Slouží jako separátor pro dva podstromy.
  - Prohodí se buňky pomocí swap s predecessor(x) nebo successor(x) a
  - Zruší se kořen (leaf).
- Pokud má list více než minimální počet položek:
  - Zruš x z listu a STOP.
- Jinak:
  - redistribuj hodnoty na správné místo (to může posunout problém do rodiče, zastaví se to v kořeni, protože nemá omezené minimum položek).

B-tree delete

Delete (x, btree) - pseudokód

Pouze více-průchodů

```
if(x to be removed is not in a leaf)
       swap it with successor(x)
currentNode = leaf
while(currentNode underflow)
       try to redistribute entries from an immediate
sibling into currentNode via its parent
       if(impossible) then merge currentNode with a
       sibling and one entry from the parent
currentNode = parrent of CurrentNode
```

Maximální výška B-stromu

- $h \leq \log_{\lceil m/2 \rceil}((N+1)/2)$

- Dává horní hranici přístupů na disk.
- Viz [Maire] nebo [Cormen] podropbnosti

References

- [Cormen] Cormen, Leiserson, Rivest: Introduction to Algorithms, Chapter 14 and 19, McGraw Hill, 1990
- [Whitney]: CS660 Combinatorial Algorithms, San Diego State University, 1996], RedBlack, B-trees http://www.eli.sdsu.edu/courses/fall96/cs660/notes/redBlack/redBlack.html#RTFToC5
- [Wiki] B-tree. (2006, November 24). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 20:25, December 12, 2006, from http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=B-tree&oldid=89805120
- [Maire] Frederic Maire: An Introduction to Btrees, Queensland University of Technology,1998] http://sky.fit.qut.edu.au/~maire/baobab/lecture/
- [RB tree] John Franco - java applet
- http://www.ececs.uc.edu/~franco/C321/html/RedBlack/redblack.html
- [Jones] Jeremy Jones: B-Tree animation - java applet https://www.cs.tcd.ie/Jeremy.Jones/vivio/trees/B-tree.htm

The End