Vyhledávání

Karel Richta a kol.

Přednášky byly připraveny s pomocí materiálů, které vyrobili Marko Berezovský, Petr Felkel, Josef Kolář, Michal Píše a Pavel Tvrdík

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

© Karel Richta a kol., 2013

Datové struktury a algoritmy, A7B36DSA
09/2013, Lekce 10

https://service.felk.cvut.cz/courses/A7B36DSA

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Vyhledávání (Searching)

***Definice*:**

- Vstup: množina *n* záznamů obsahujících klíče a hledaný klíč *k*
- Výstup: Záznamy s klíčem *k* nebo informace, že žádný takový neexistuje

***Implementace*:**

- Implementace pomocí pole:
  - Sekvenční vyhledávání
  - Binární vyhledávání
- Binární vyhledávací stromy (BVS, nebo BST – Binary Search Trees):
  - Reprezentace uzlů a hran
  - Operace nad BVS
  - Vyvažování BVS

Typické operace při vyhledávání

- Připomeňme si operace související s vyhledáváním:
  - vložení záznamu s klíčem
  - odstranění záznamu s klíčem
  - vyhledání záznamu podle klíče
  - minimum a maximum
  - předchůdce a následník
  - a další …

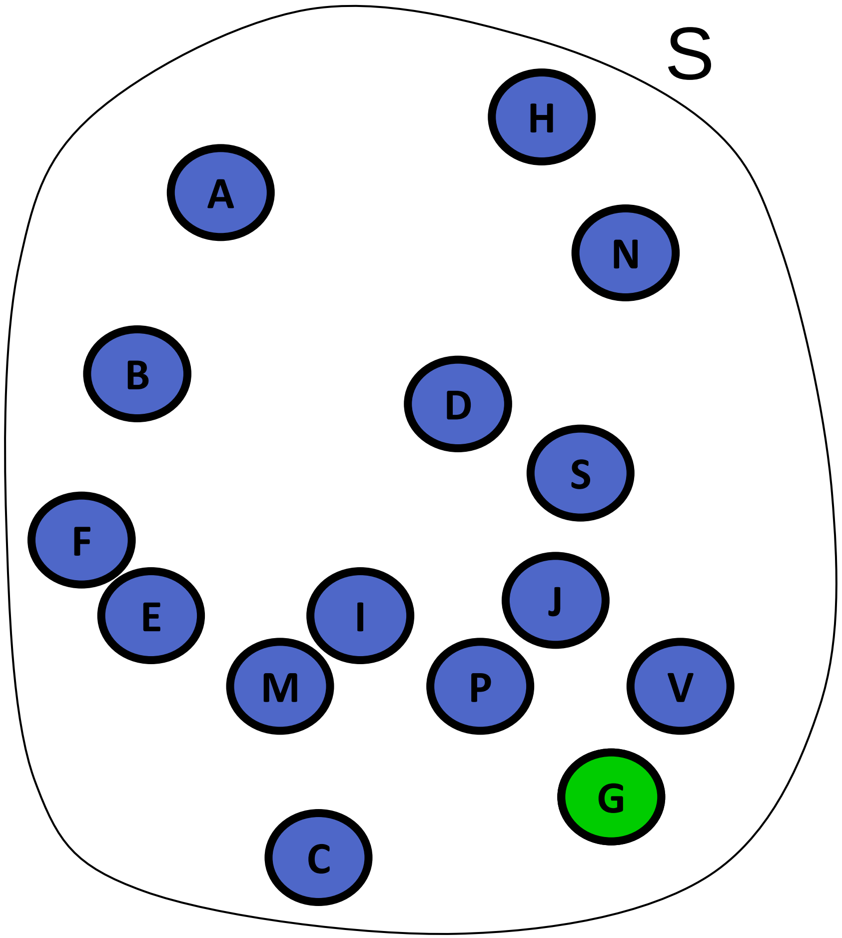
Vyhledávání

Vstup: množina *n* klíčů a hledaný klíč *k*

Popis problému: Kde je *k?*

G?

- Hledání G v S bylo úspěšné



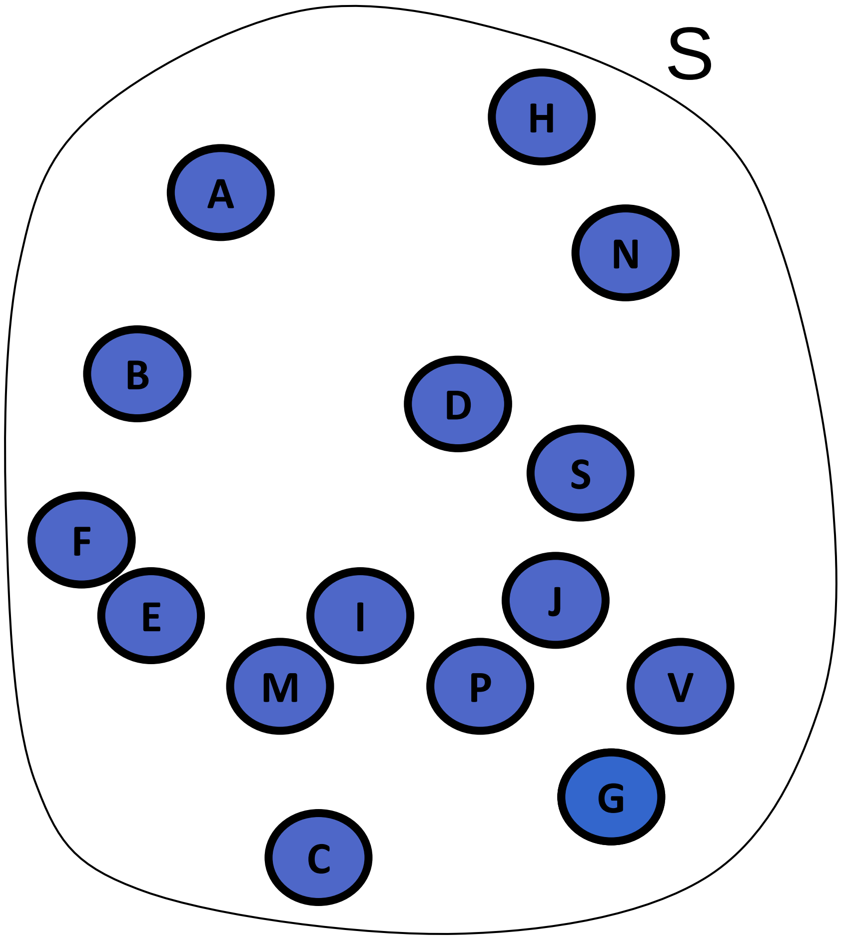
Vyhledávání

Vstup: množina *n* klíčů a hledaný klíč *k*

Popis problému: Kde je *k?*

L?

- Hledání L v S nebylo úspěšné

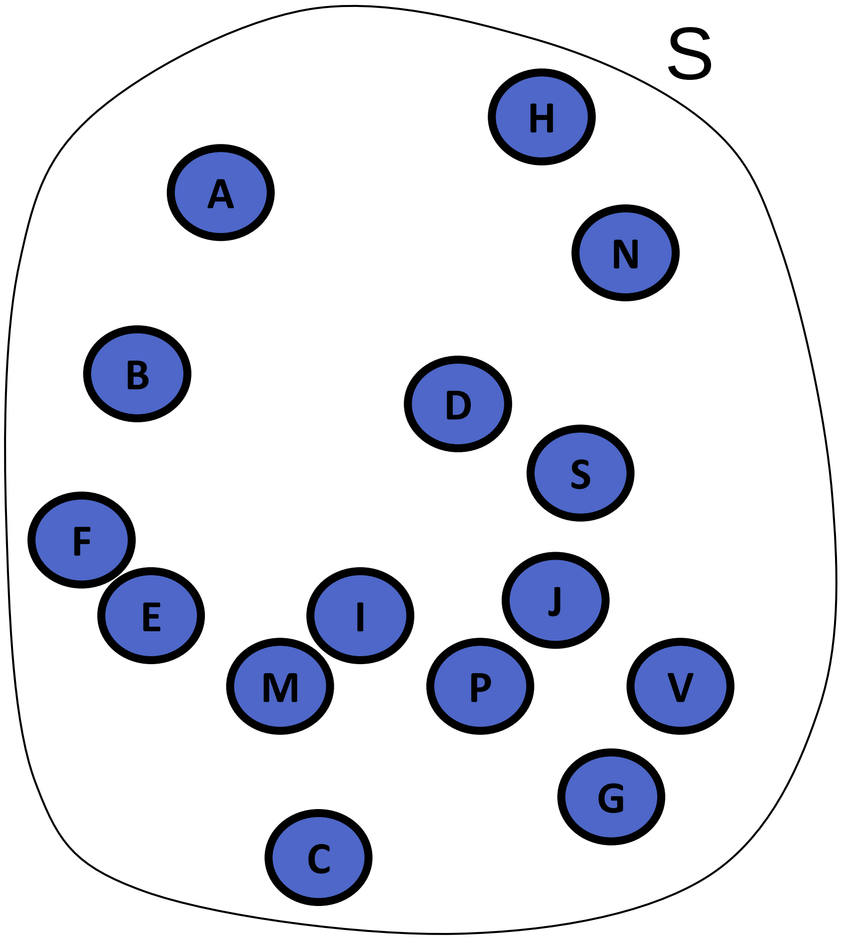


Prostor pro vyhledávání

Prohledávaný prostor S (search space)

= množina klíčů, ve které hledáme

- přesněji: množina záznamů, ve které hledáme podle klíče
- unikátní klíče
- tabulka, soubor, …



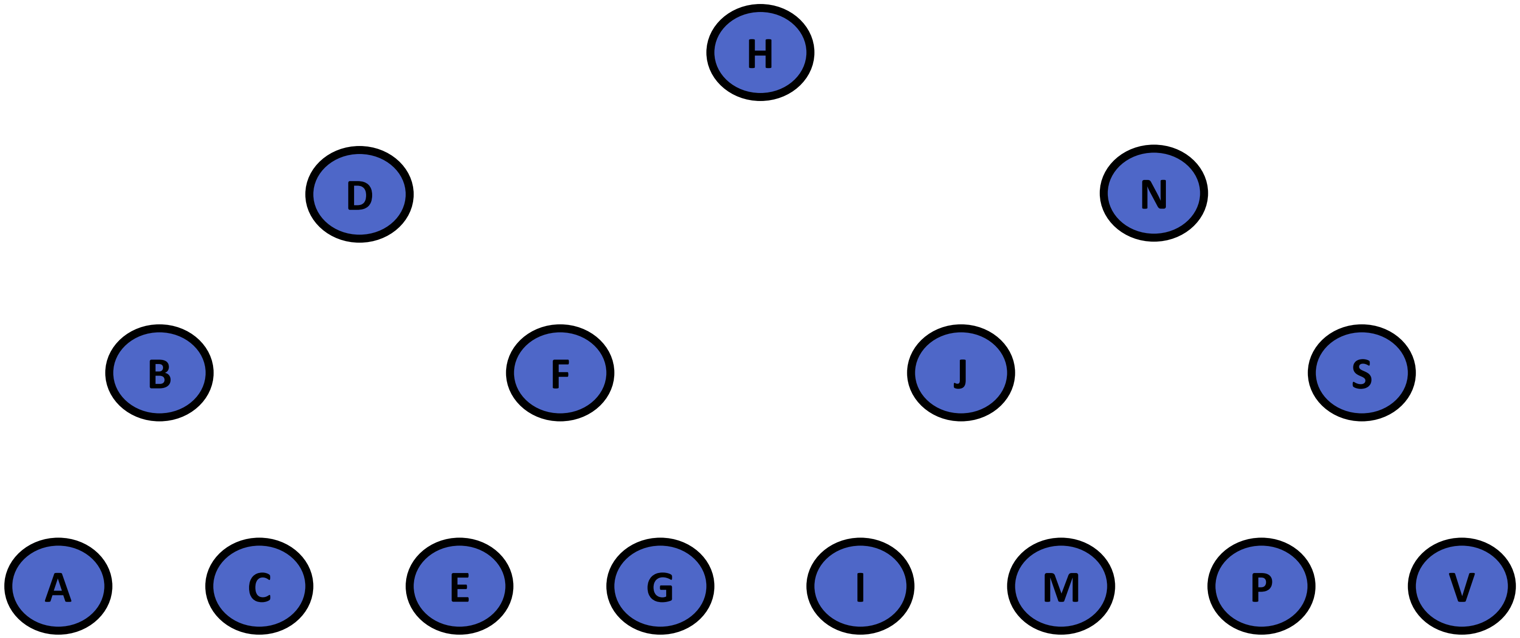
Universum U pro vyhledávací prostor

= množina všech možných klíčů

$S \subset U$

Problémy vyhledávání

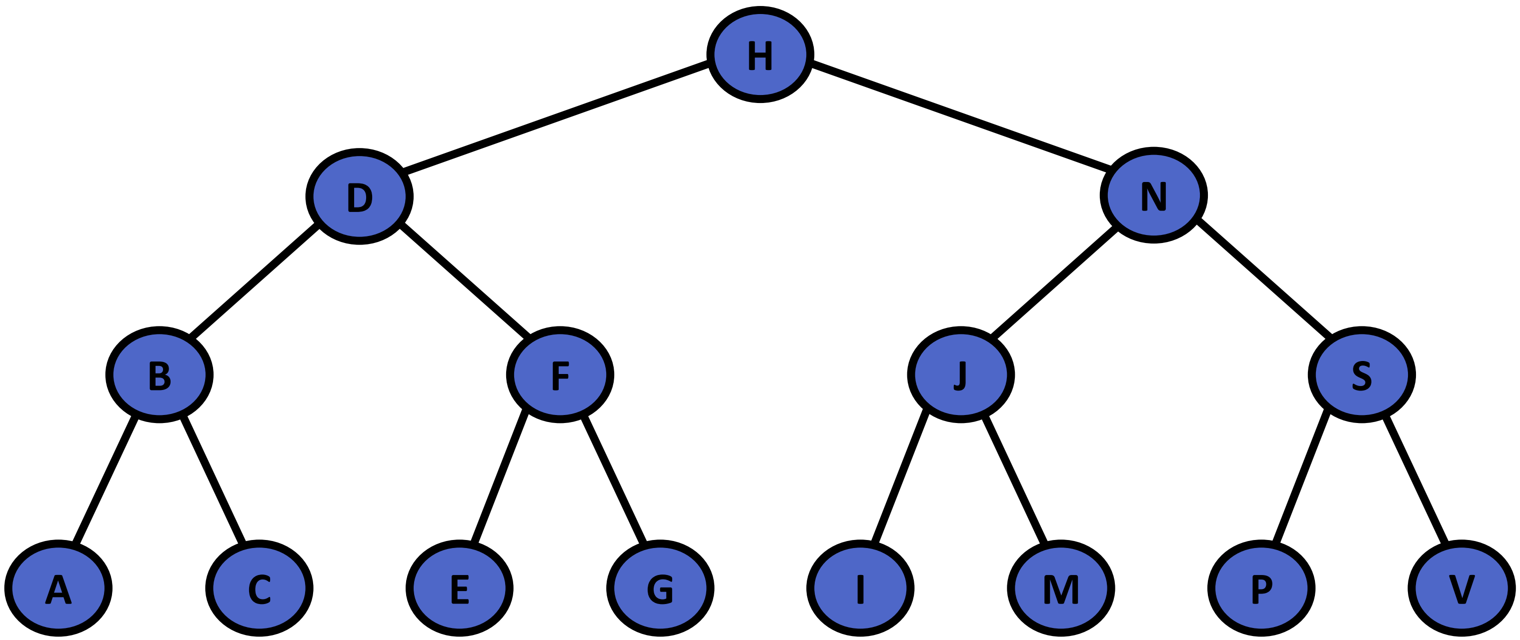
- Rychlost



Problémy vyhledávání

Vstup: množina *n* klíčů a hledaný klíč *k*

Popis problému: Kde je *k*?

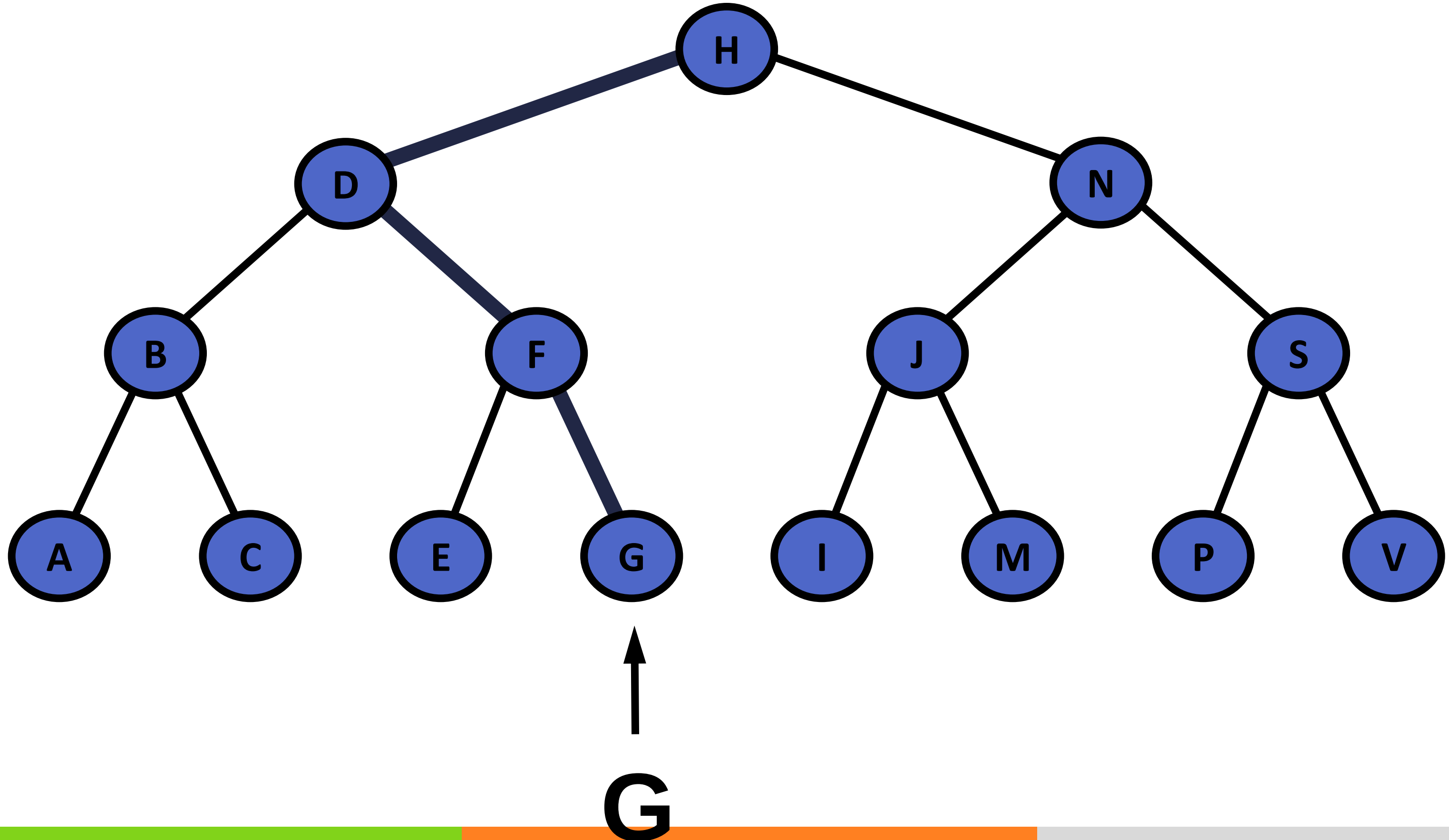


G?

Problémy vyhledávání

Vstup: množina *n* klíčů a hledaný klíč *k*

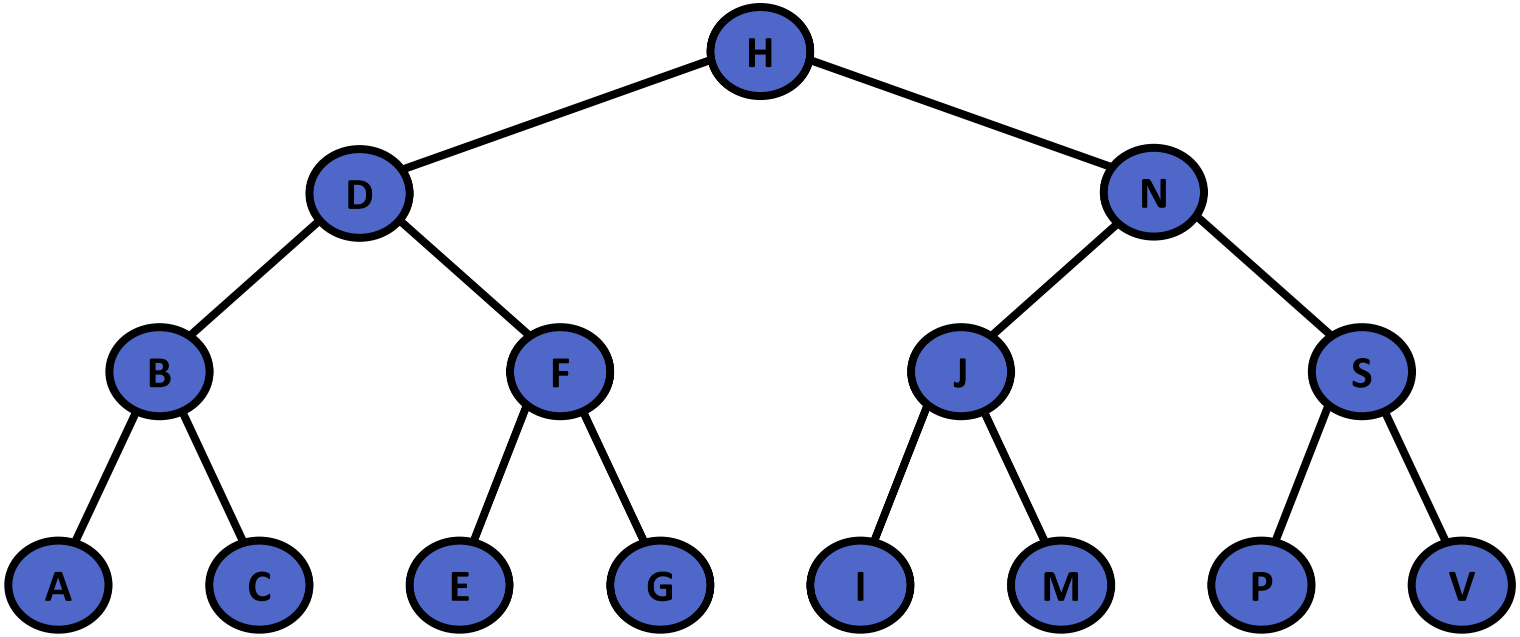
Popis problému: Kde je *k*?



Problémy vyhledávání

Vstup: množina *n* klíčů a hledaný klíč *k*

Popis problému: Kde je *k*?

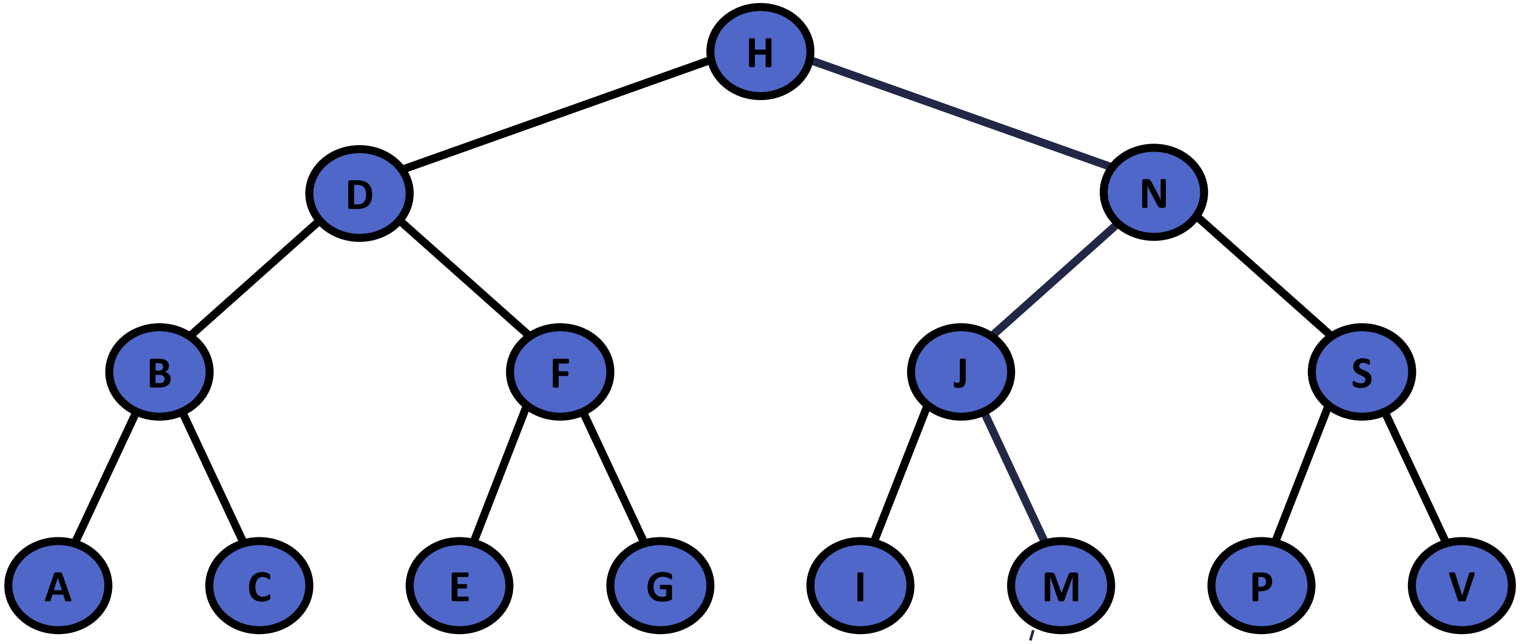


L?

Problémy vyhledávání

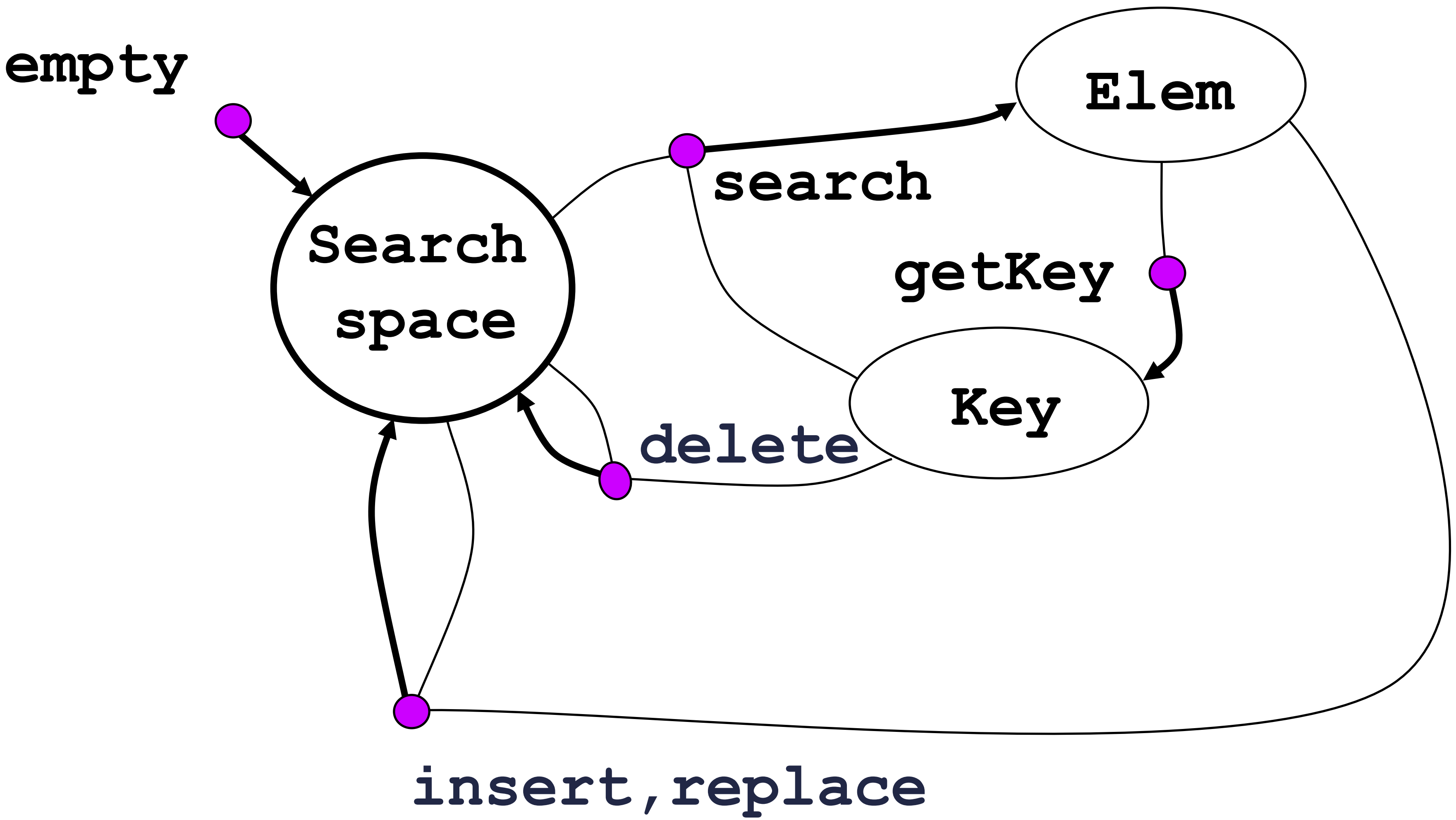
Vstup: množina *n* klíčů a hledaný klíč *k*

Popis problému: Kde je *k*?



L nebylo nalezeno

Signatura operací pro vyhledávání



Taxonomie pro vyhledávání

Prohledávaný prostor

– **Statický** - prohledávaný prostor je fixní

-> jednodušší implementace

-> změna znamená novou verzi

-> příklad: telefonní seznam, tištěný adresář

– **Dynamický** - prohledávaný prostor se může měnit v čase

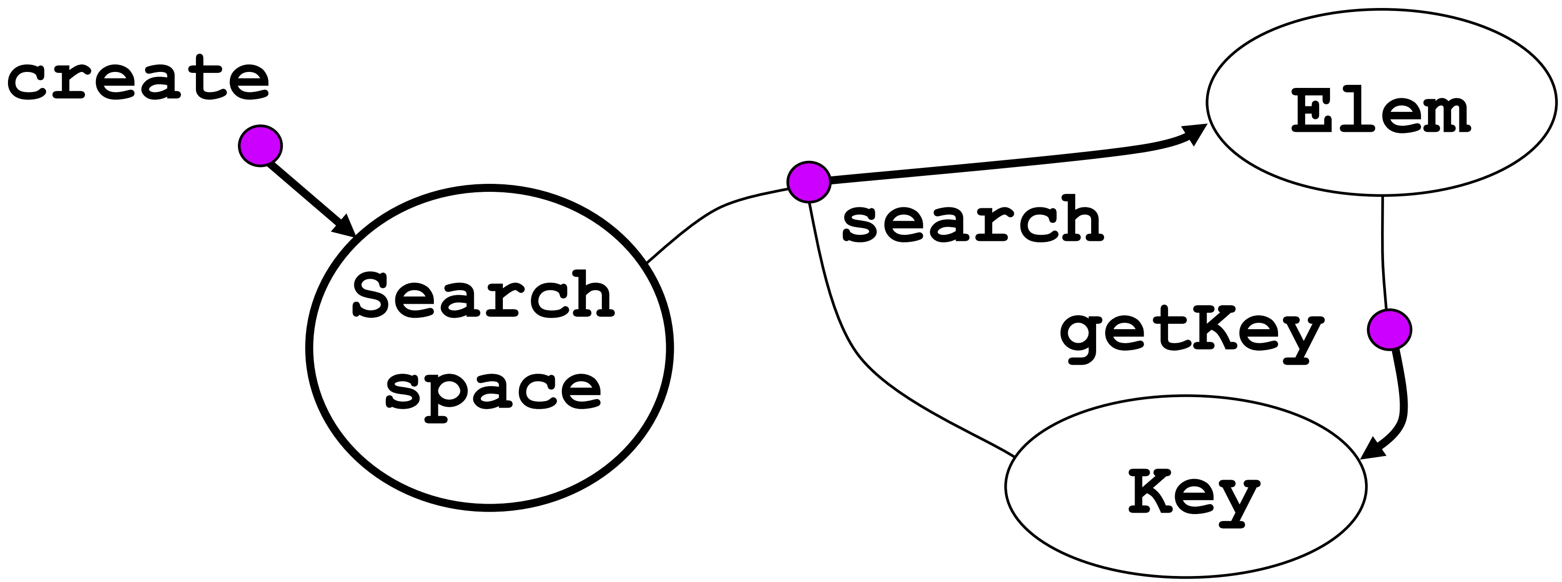
-> složitější implementace

-> změny se provádějí pomocí opearcí:

`insert,delete,replace`

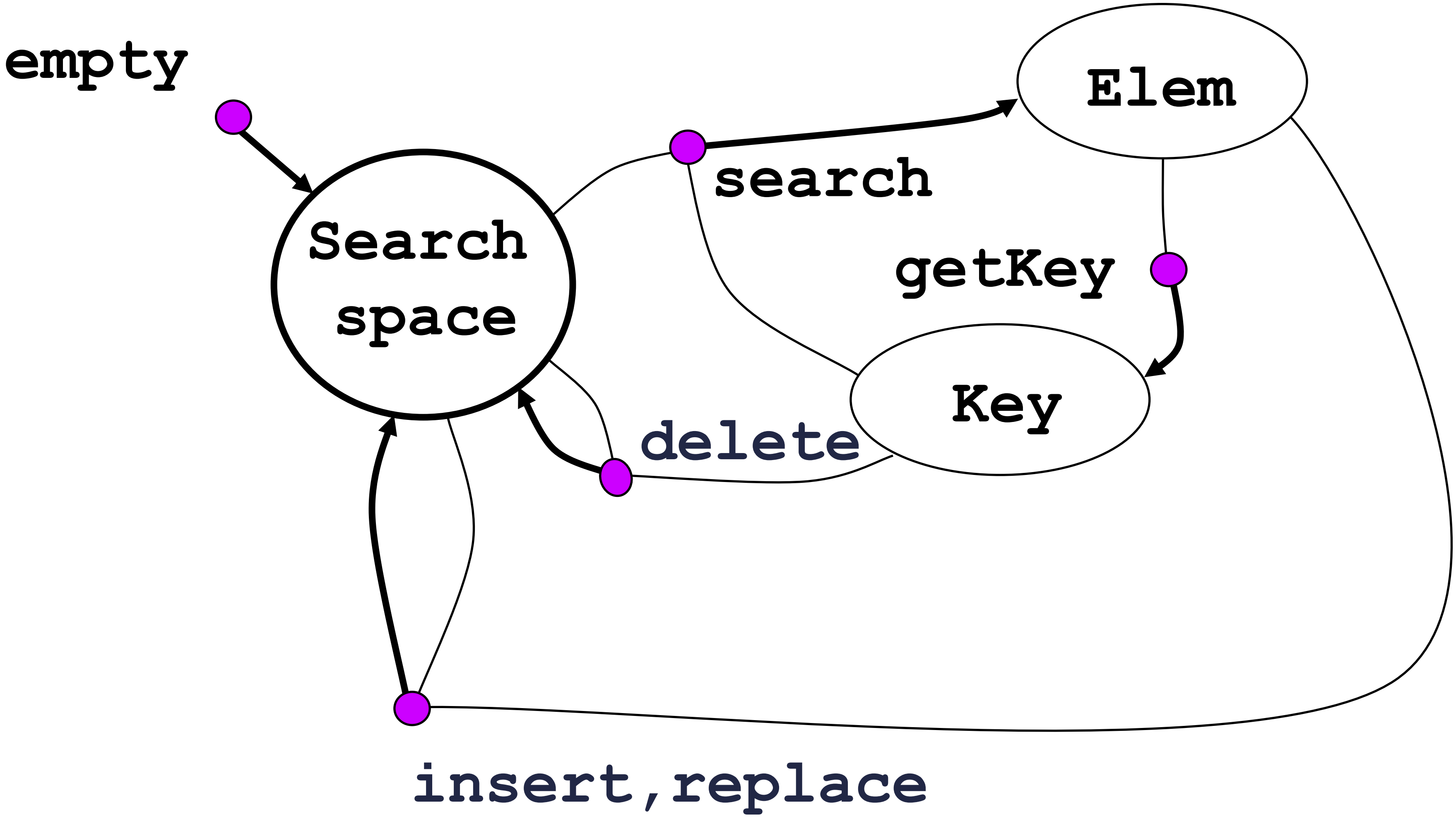
-> příklad: tabulka symbolů v kompilátoru

Statický prohledávaný prostor



Dynamický prohledávaný prostor

Dynamic search space



Vyhledávací operace

Symboly:

- **`k`** … **`klíč (key)`**
- **`e`** … **`element s klíčem k (element with key k)`**
- **`s`** … **`prohledávaná sada (data set)`**

Operace (informativní seznam):

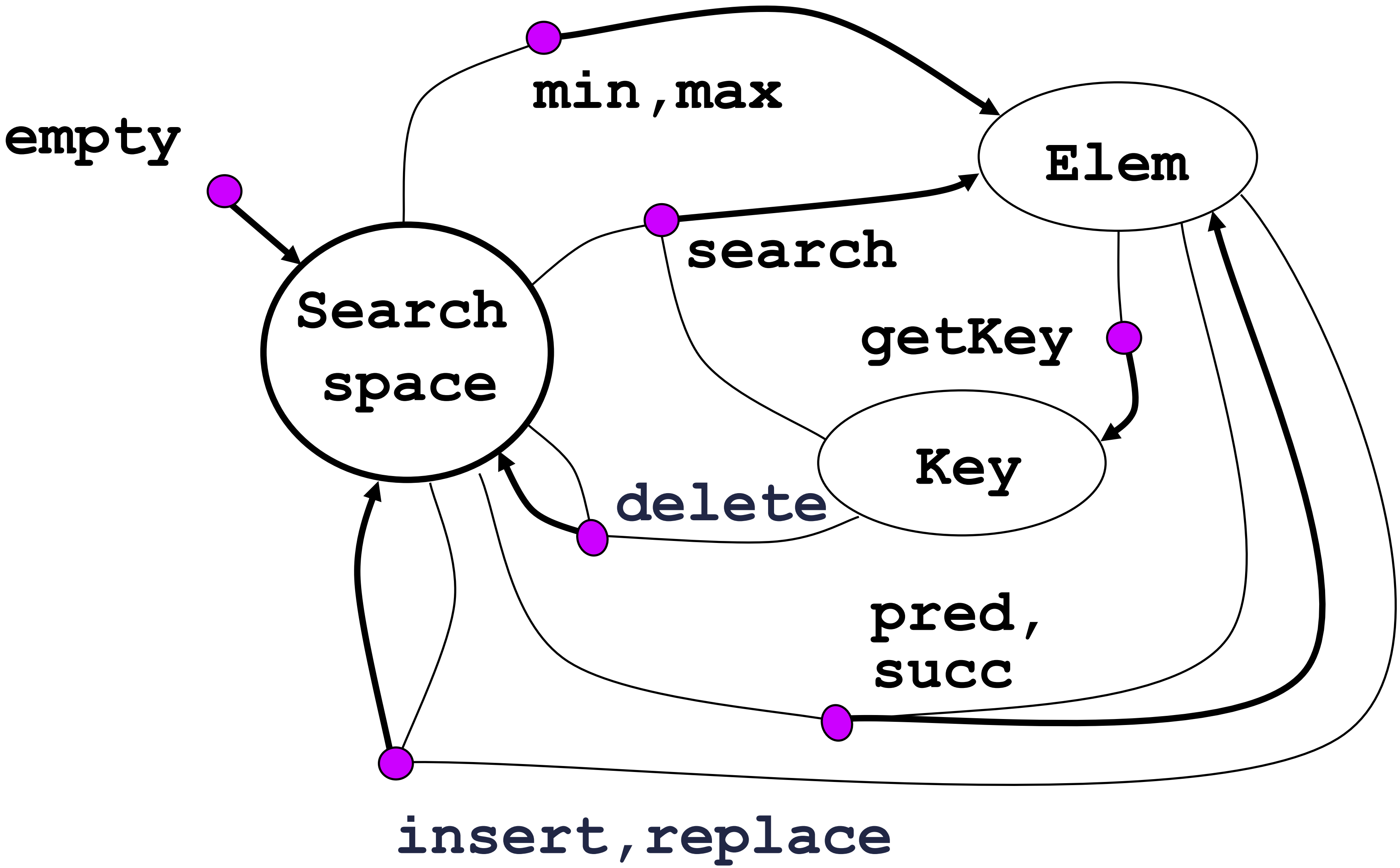
- Selektory:
  - **`search(k,s)`**
  - **`min(s), max(s)`**
  - **`pred(e,s), succ(e,s)`**

extenze

klíč nahrazovaného elementu je součástí nového elementu **`e`**

- Modifikátory:
  - **`insert(e,s), delete(k,s), replace(e,s)`**

Rozšířené vyhledávání



Jiná klasifikace

Adresní vyhledávání

- Adresní vyhledávání - založeno na digitálních vlastnostech klíčů
  - výpočet pozice z klíče pos = f(k)
  - přímý přístup (direct access), hašování
  - pole, tabulka, …
  - přímý přístup => rychlé … O(1)

Asociativní vyhledávání

- Asociativní vyhledávání - založeno na porovnání elementů
  - elementy jsou umístěny podle vztahu k ostatním
  - sekvenční hledání, binární hledání, vyhledávací stromy
  - vyžaduje hledání => pomalejší … O(log n) až O(n)

Ještě jiné klasifikace

Interní nebo externí

- Interní nebo externí
  - Interní – v paměti
  - Externí – na disku (příp. pásce)

Dimenze klíčů

- Dimenze klíčů
  - Jedno-dimenzionální - k
  - Multi-dimenzionální - [x,y,z]

Měření kvality (Quality measures)

Prostor pro data

- **P(n)** = paměťová složitost (memory complexity)

Časová náročnost

- **Q(n)**= časová složitost `search, query`
- **I(n)** = časová složitost `insert`
- **D(n)**= časová složitost `delete`

Sekvenční vyhledávání v neseřazeném poli

0	1	2	3	4	5
D	B	A	C		

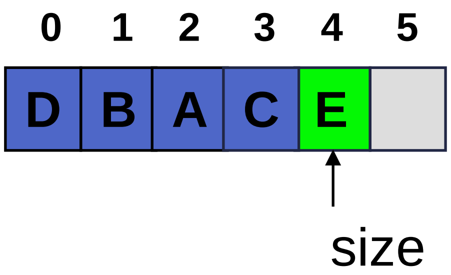
size

- **Neseřazené pole** P(n) = O(n)
- sekvenční hledání Q(n) = O(n)
- insert I(n) = O(1)
- delete D(n) = O(n)
- min, max in O(n)

```
nodeT seqSearch( key k, nodeT a[] ) {
      int i = 0;
      while( (i < a.size) && (a[i].key != k) )
            i++;
      if( i < a.size ) return a[i];
      else return NODE_NOT_FOUND;
}
```

Java-like pseudo code

Vylepšené vyhledávání v neseřazeném poli



Neseřazené pole se zarážkou (sentinel)

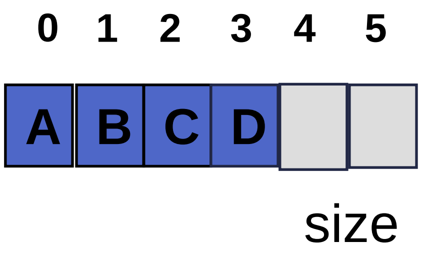
Sekvenční hledání je stále Q(n) = O(n)

```
search("E", a)
```

```
nodeT seqSearchWithSentinel( key k, nodeT a[] ) {
      int i = 0;
      a[a.size] = createArrayElement(k); // add sentinel
      while( a[i].key != k ) // save one test per step
            i++;
      if( i < a.size ) return a[i];
      else return NODE_NOT_FOUND;
}
```

Java-like pseudo code

Binární hledání v seřazeném poli



Seřazené pole	P(n)	= O(n)
Binární hledání	Q(n)	= O(log(n))
insert	I (n)	= O(n)
delete	D(n)	= O(n)
min, max		O(1)

```
nodeT binarySearch( key k, nodeT sortedArray[] ) {
  int pos = bs( k, sortedArray, 0, sortedArray.size - 1 );

  if( pos >= 0 ) return sortedArray[pos];
  else           return NODE_NOT_FOUND;
                 // bs can return  -(pos+1), i.e.
                  // position to insert the node with key k
}
```

Java-like pseudo code

Binární hledání – rekurze/iterace

```
//Recursive version
int bs( key k, nodeT a[], int first, int last ) {
  if( first > last ) return -(first + 1);  // not found
  int mid = ( first + last ) / 2;
  if( k < a[mid].key ) return bs( k, a, first, mid - 1);
  if( k > a[mid].key ) return bs( k, a, mid + 1, last );
  return mid;     // found!
}
```

Java-like pseudo code

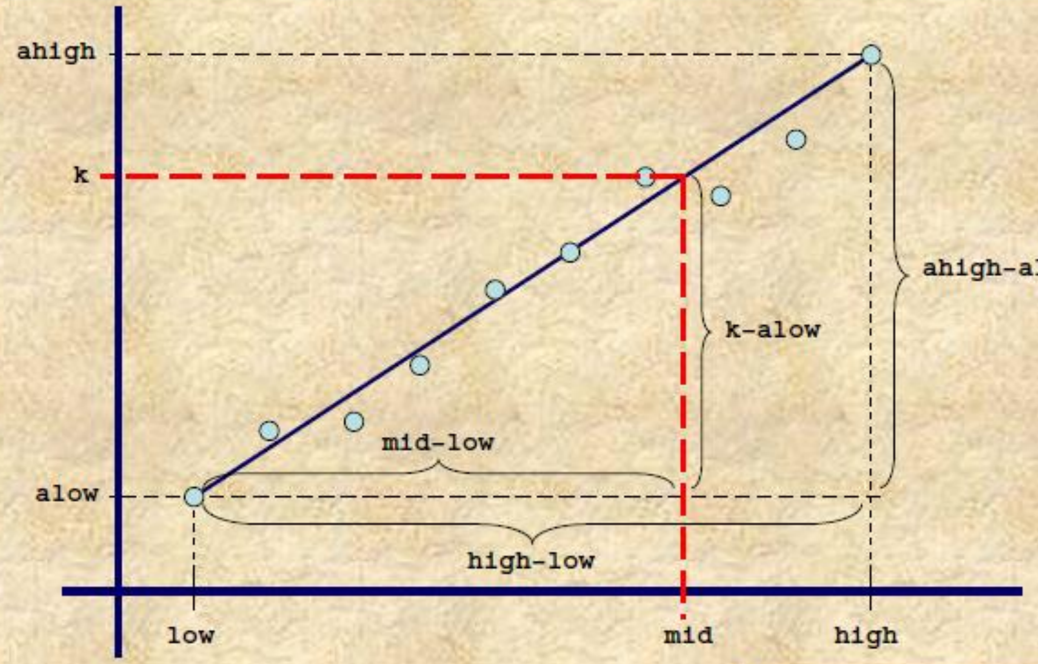
```
// Iterative version
int bs(key k, nodeT a[], int first, int last ) {
       while (first <= last) {
              int mid = (first + last) / 2; // mid point
              if (k > a[mid].key) first = mid + 1;
              else if (key < a[mid].key) last = mid - 1;
                   else return mid; // found
       } return -(first + 1); // failed to find key
}
```

Java-like pseudo code

Interpolační vyhledávání

Jak hledáme ve slovníku nebo v tlf seznamu? Určitě ne půlením …

Předpokládejme rovnoměrné rozložení (číselných) klíčů, umístění klíče odhadujeme podle jeho hodnoty interpolací:




```
   (k-alow) / (ahigh-alow) =
= (mid-low) / (high-low)
```

```
mid = low + (k-alow)*(high-low)/(ahigh-alow)
```

Porovnání binární/interpolační hledání

Binární hledání - O(log n)

```
mid = ( first + last ) / 2;
```

Interpolační hledání - O(log log n)

```
                  (last - first)
pos = first +    ----------------   (x - a[first])
                 a[last] - a[first]
```

```
Elem searchInterpol( Elem[] a, int low, int high, Key k) {
  if (low > high) return null;
  int mid = low + (k-a[low].key)*(high-low)/(a[high].key-a[low].key);
  if (a[mid].key == k) return a[mid];
  if (a[mid].key < k)
       return searchInterpol(Elem[] a, mid+1, high, k );
  else return searchInterpol(Elem[] a, low, mid-1, k );
}
```

Kořenový binární vyhledávací strom (BVS)

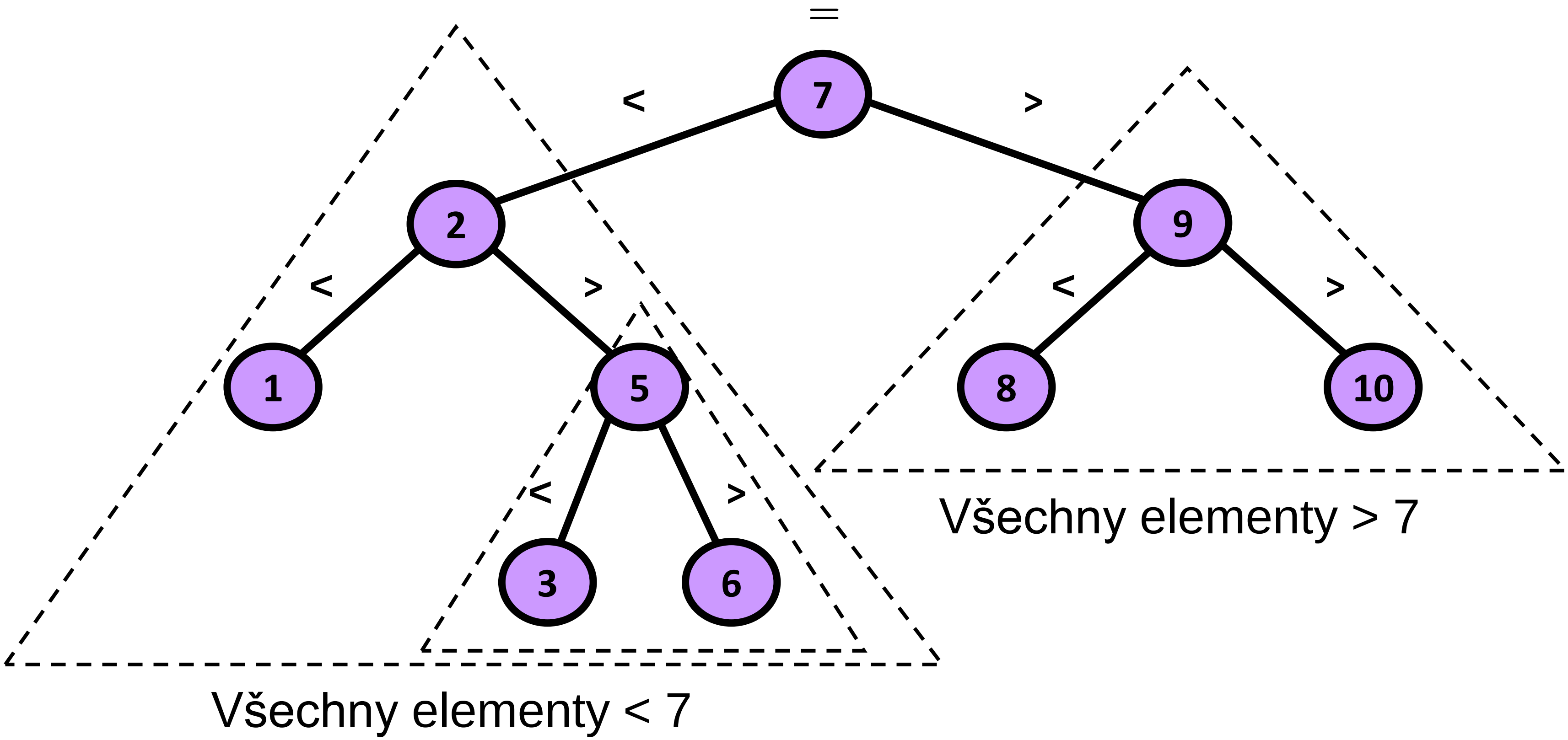
- *Kořenový binární strom*
  - uzel má 0, (1), 2 následníky (nemusí být pravidelný)

- Binární vyhledávací strom (BVS)
  - uspořádaný kořenový binární strom
  - u je kořen
  - pro všechny uzly u_L z levého podstromu platí:

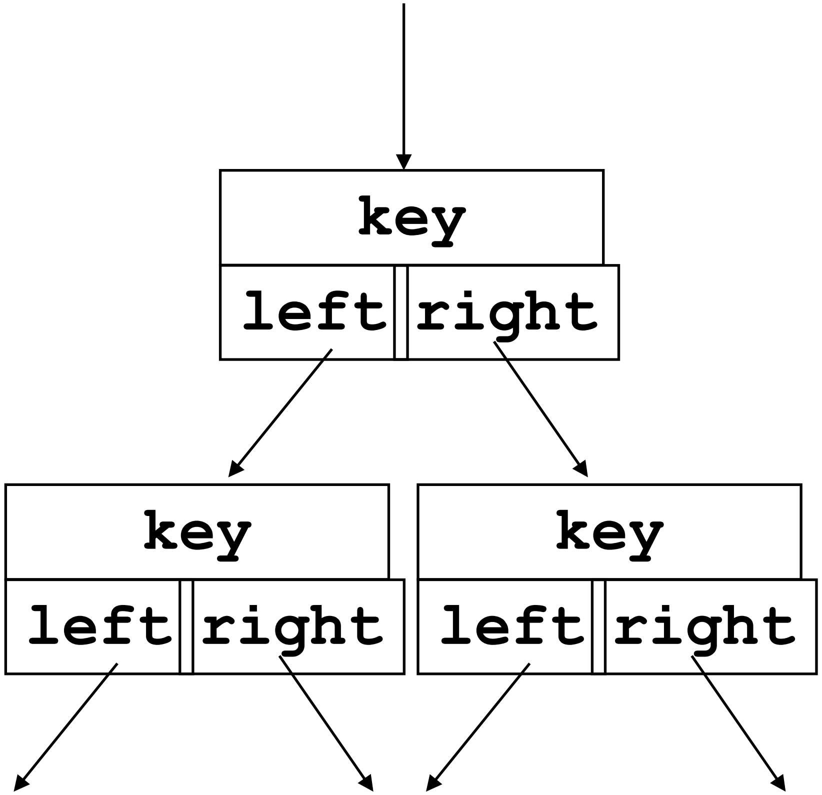
    klíč(u_L) < klíč(u)
  - pro všechny uzly u_R z pravého podstromu platí:

    klíč(u_R) > klíč(u)

Binární vyhledávací strom (BVS)



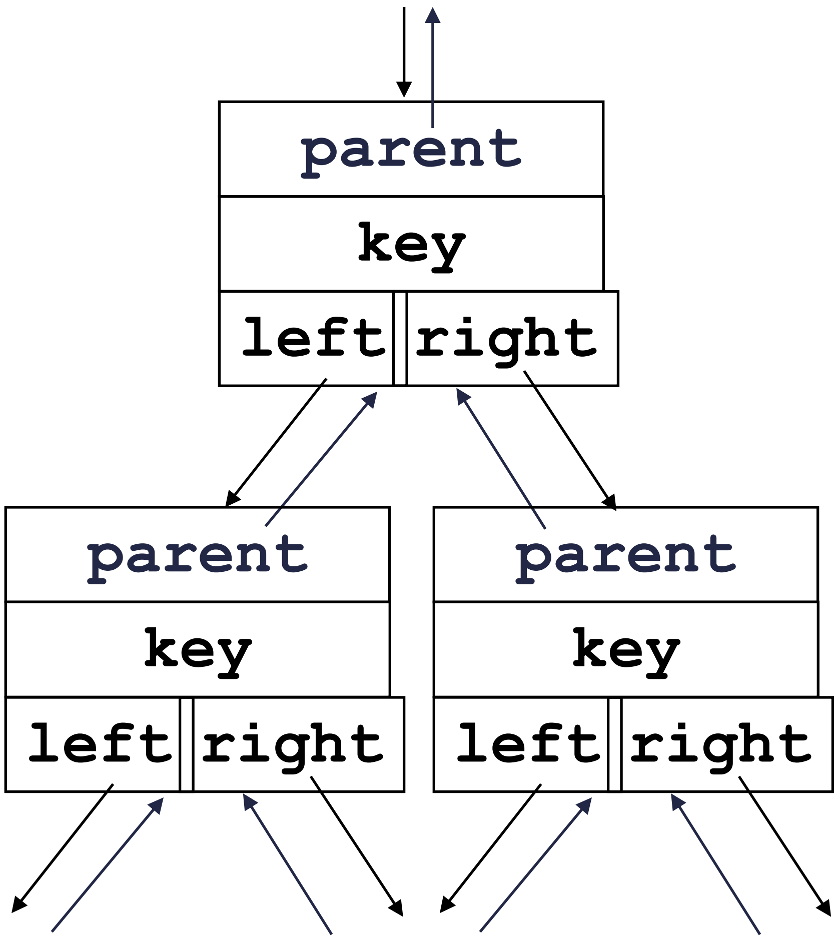
Reprezentace uzlů stromu



Výhodné pro:

- search
- min, max

Reprezentace uzlů stromu II.



Vhodné pro:

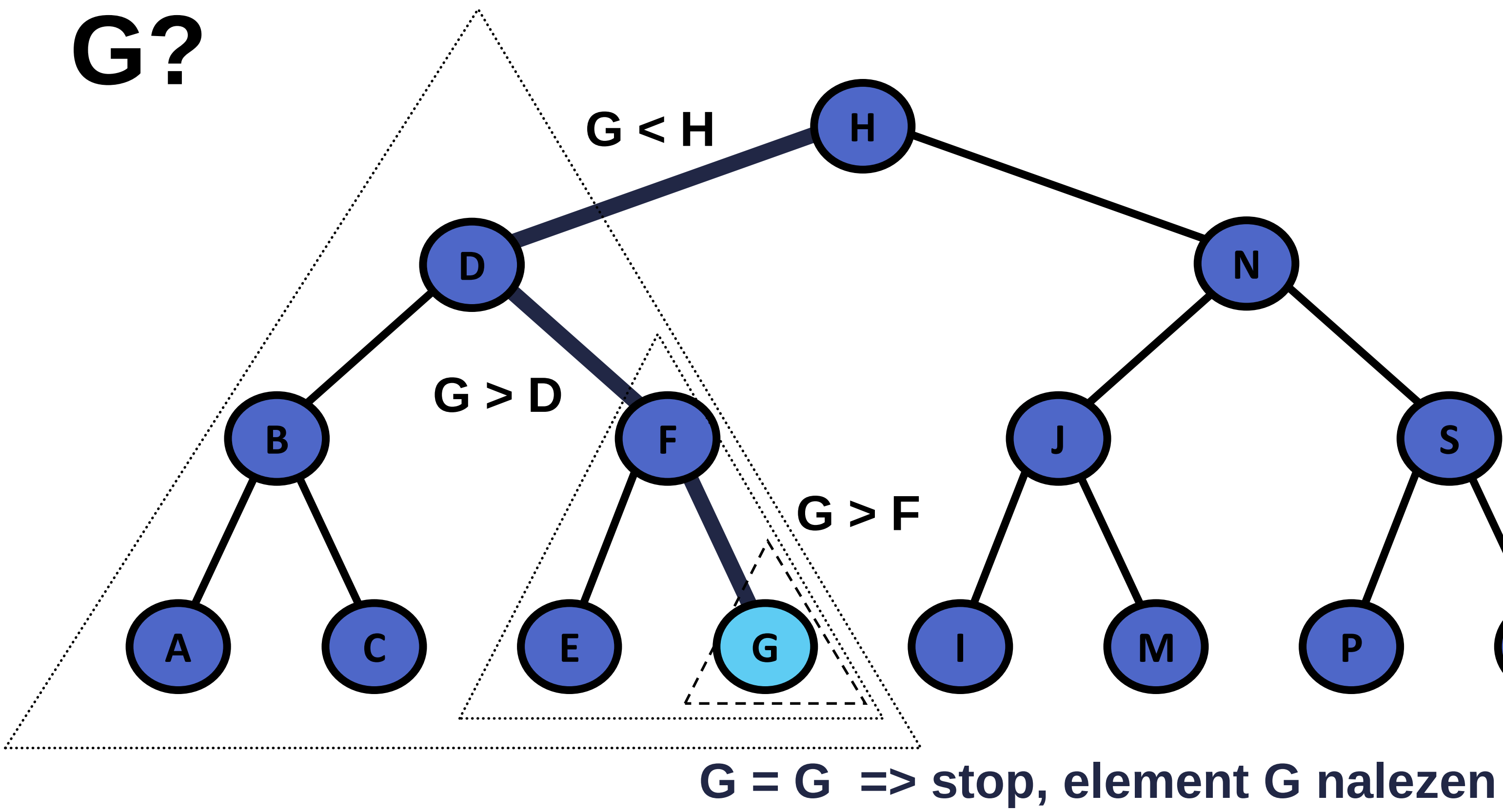
- search
- min, max
- pred, succ

Reprezentace uzlů stromu

```
public class Node {
  public Node left;
  public Node right;
  public int key;
  public Node(int k) {
    key = k;
    left = null;
    right = null;
    data = …;
  }
}
public class Tree {
  public Node root;
  public Tree() {
    root = null;
  }}
```

```
public class Node {
  public Node parent;
  public Node left;
  public Node right;
  public int key;
  public Node(int k) {
    key = k;
    parent = null;
    left = null;
    right = null;
    data = …;
  }
}
public class Tree {
  ...
}
```

Prohledávání BVS



Prohledávání BVS – rekurzivně/iterativně

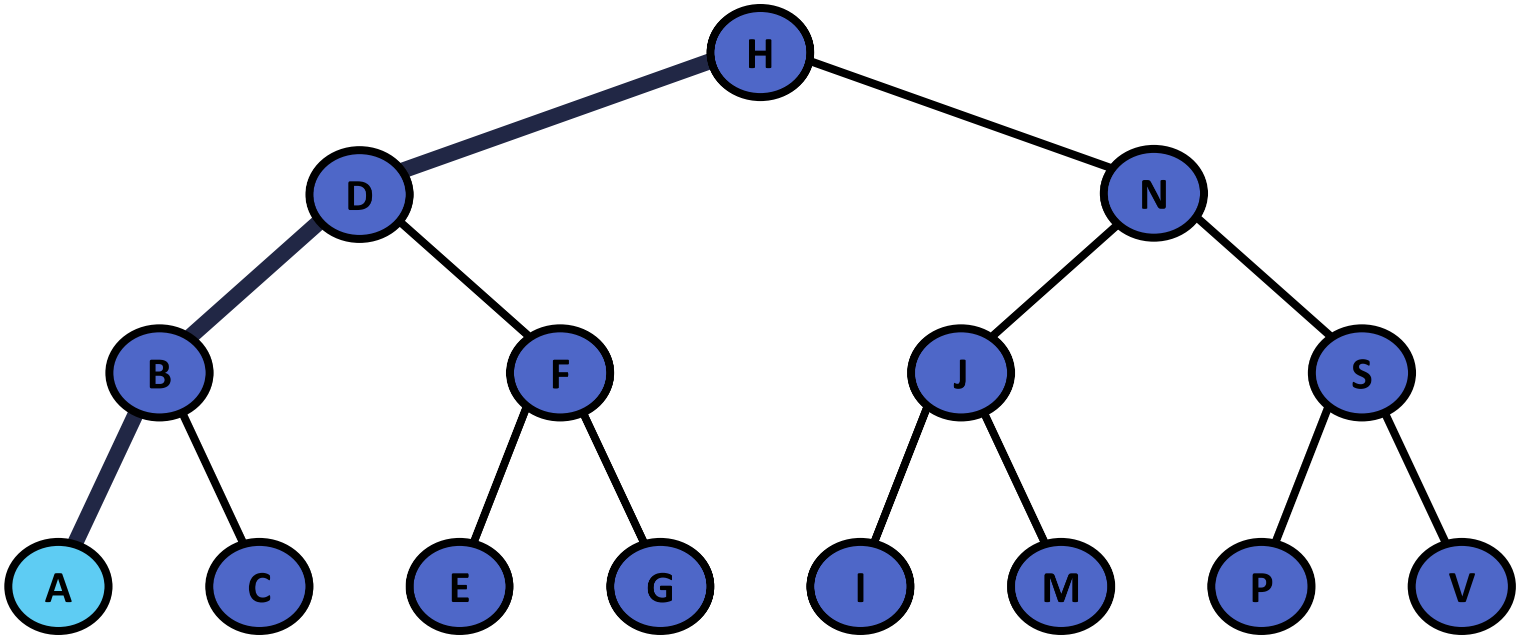
```
//Recursive version
Node treeSearch( Node x, key k )
{
  if(( x == null ) or ( k == x.key ))
    return x;
  if( k < x.key )
    return treeSearch( x.left, k );
  else
    return treeSearch( x.right, k );
}
```

Java-like pseudo code

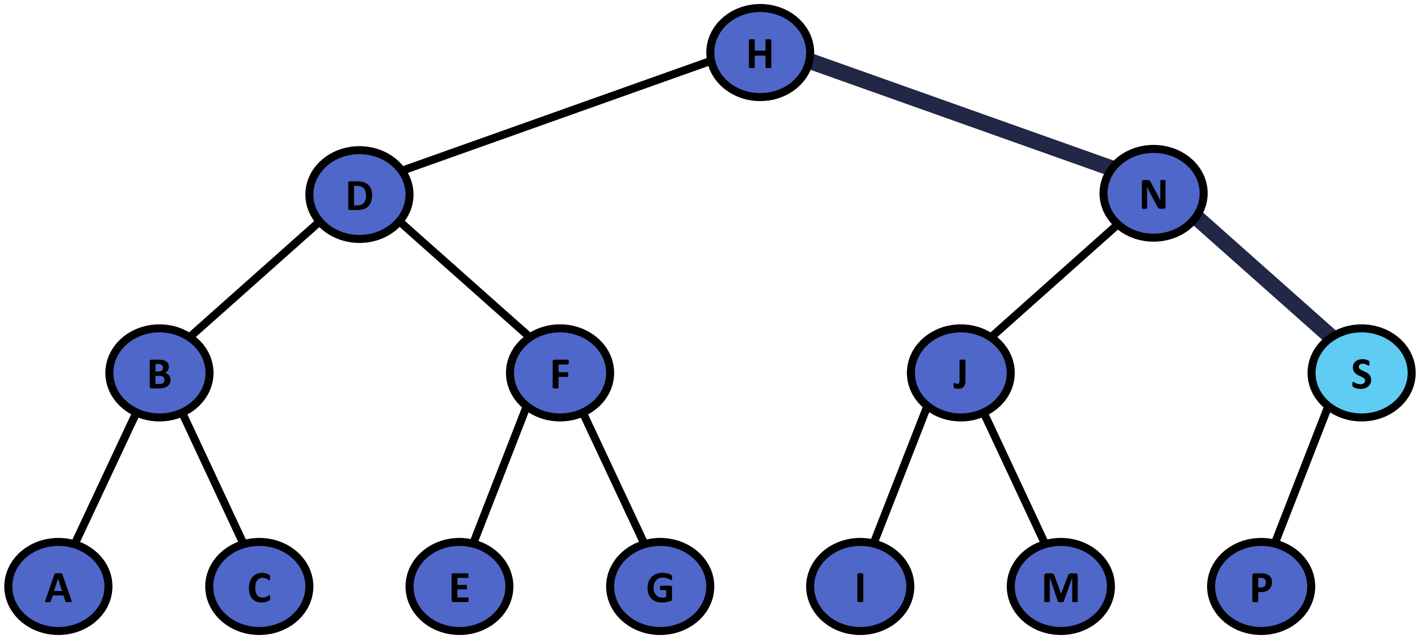
```
//Iterative version
Node treeSearch( Node x, key k )
{
  while(( x != null ) and (k != x.key ))
  {
    if( k < x.key ) x = x.left;
    else            x = x.right;
  }
  return x;}
```

Java-like pseudo code

Minimum pro BVS



Maximum pro BVS



Minimum a mazimum pro BVS – iterativně

```
Node treeMinimum( Node x )
{
  if( x == null ) return null;
  while( x.left != null )
  {
    x = x.left;
  }
  return x;
}
```

Java-like pseudo code

```
Node treeMaximum( Node x )
{
  if( x == null ) return null;
  while( x.right != null )
  {
    x = x.right;
  }
  return x;
}
```

Java-like pseudo code

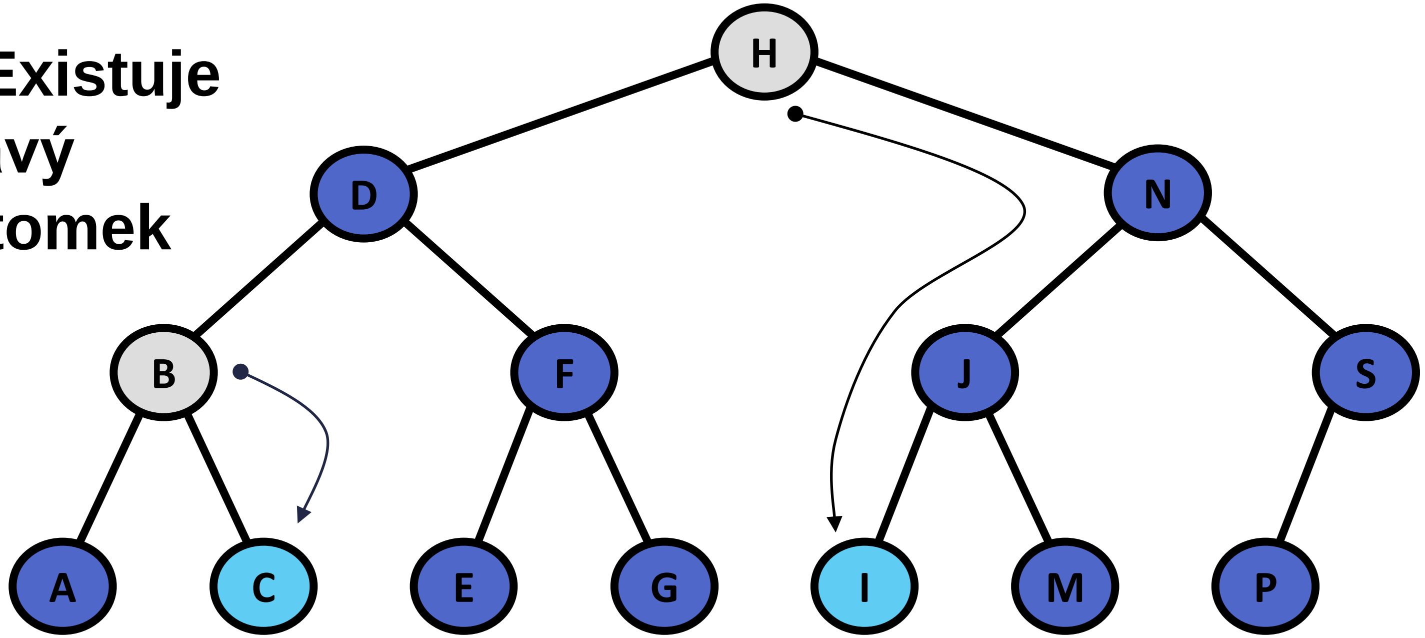
Následník v BVS
podle uspořádání (in-order tree walk)

- Jsou dvě možnosti:
  1. **Existuje pravý potomek**
  2. Neexistuje pravý potomek

Následník v BVS

podle uspořádání (in-order tree walk)

1. Existuje pravý potomek



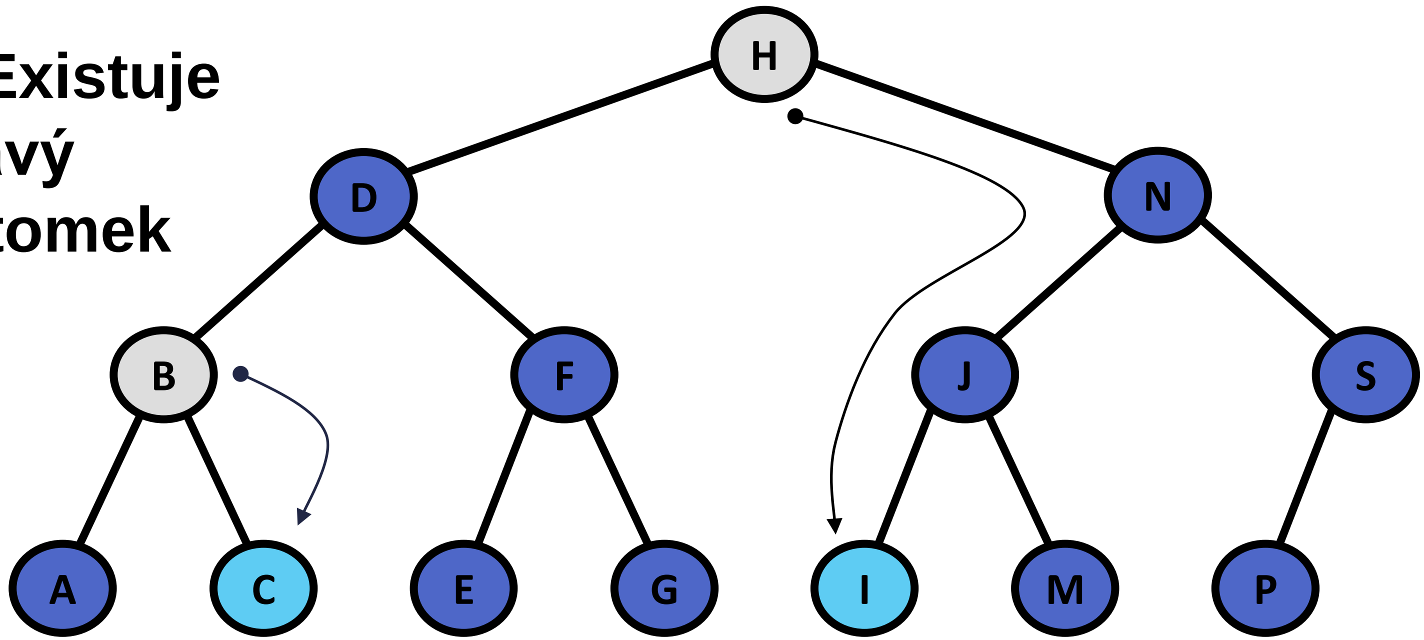

```
succ(B)  -> C
succ(H)  -> I
```

Jak?

Následník v BVS

podle uspořádání (in-order tree walk)

1. Existuje pravý potomek



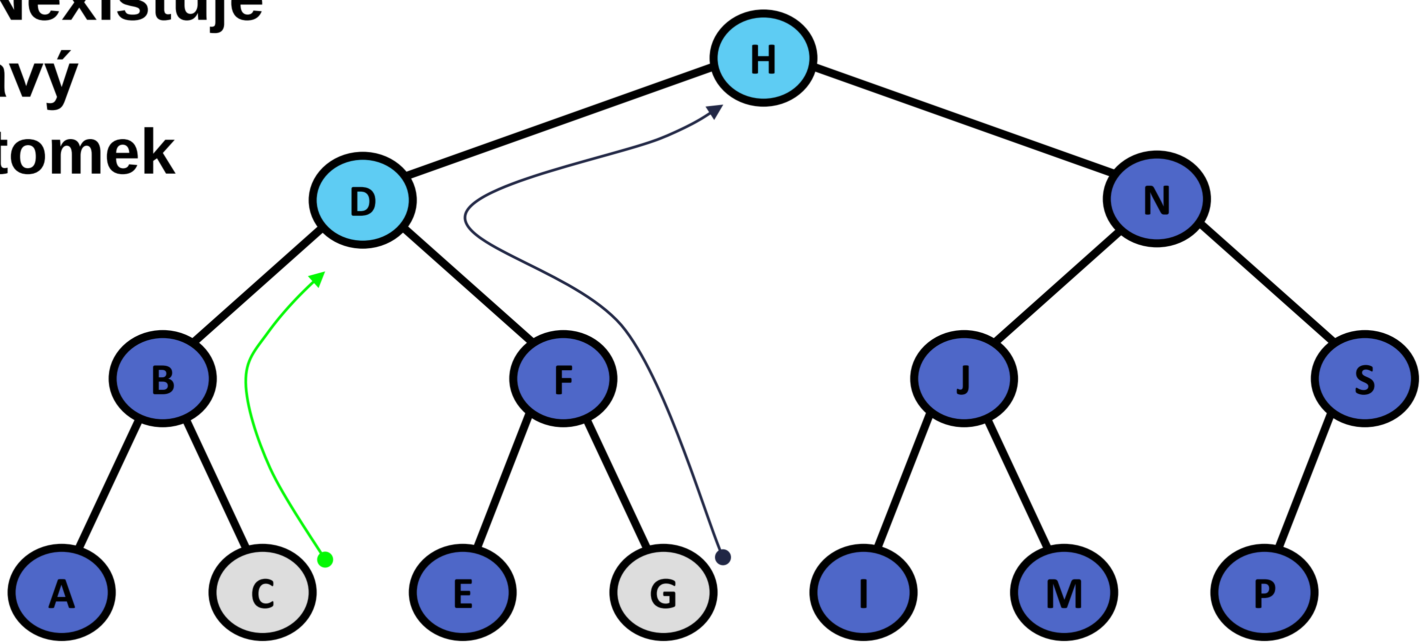

```
succ(B)  -> C
succ(H)  -> I
```

Najdi *minimum* v pravé větvi

= min(x.right)

Následník v BVS
podle uspořádání (in-order tree walk)

1. Nexistuje pravý potomek




```
succ(C)  -> D
succ(G)  -> H
```

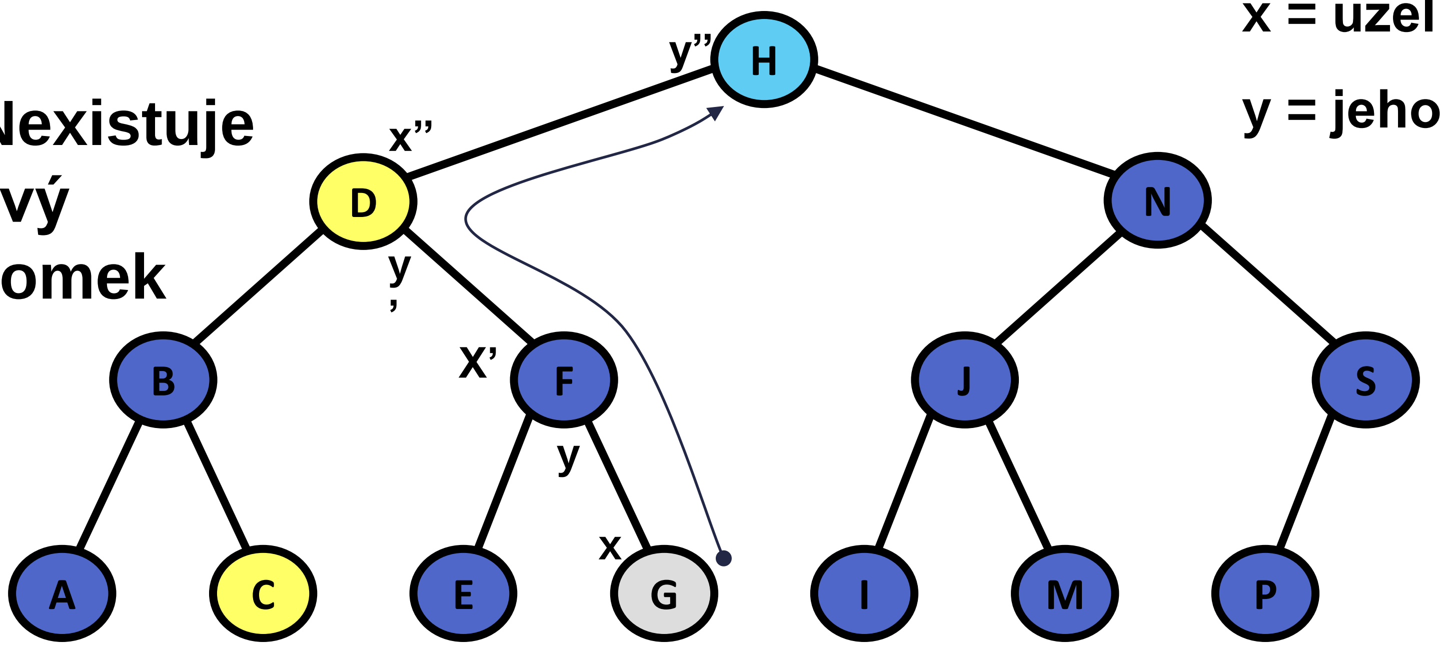
Jak?

Následník v BVS
podle uspořádání (in-order tree walk)

x = uzel na cestě

y = jeho rodič

1. Nexistuje pravý potomek



`succ(G) -> H`

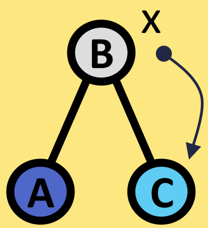
Najdi *minimálního rodiče vpravo* (minimální rodič na cestě do kořene)

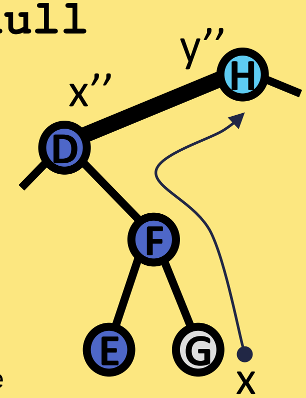
Následník v BVS

podle uspořádání (in-order tree walk)

x = uzel na cestě, y = jeho rodič

```
Node treeSuccessor( Node x )
{
  if( x == null ) return null;

  if( x.right != null )  // 1. right son exists
    return treeMinimum( x.right );

  y = x.parent;                // 2. right son is null
  while( (y != null) and (x == y.right))
  {
    x = y;
    y = x.parent;
  }
  return y;     // first parent x is left from
}
```



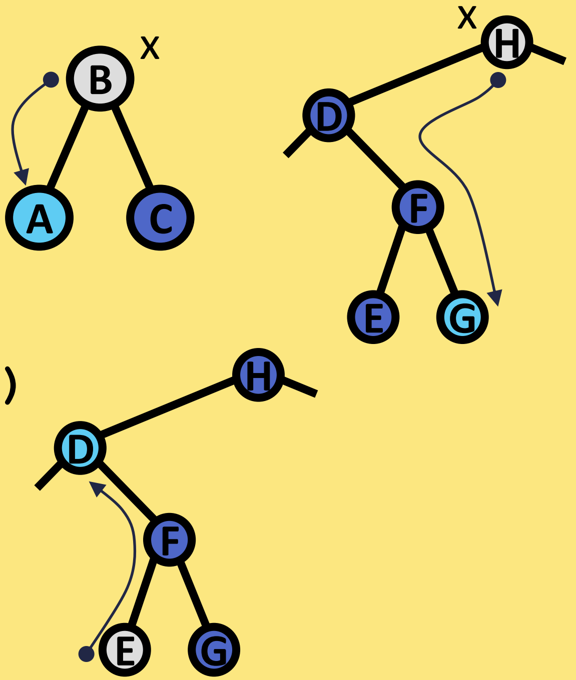


Java-like pseudo code

Předchůdce v BVS
podle uspořádání (in-order tree walk)

x = uzel na cestě, y = jeho rodič

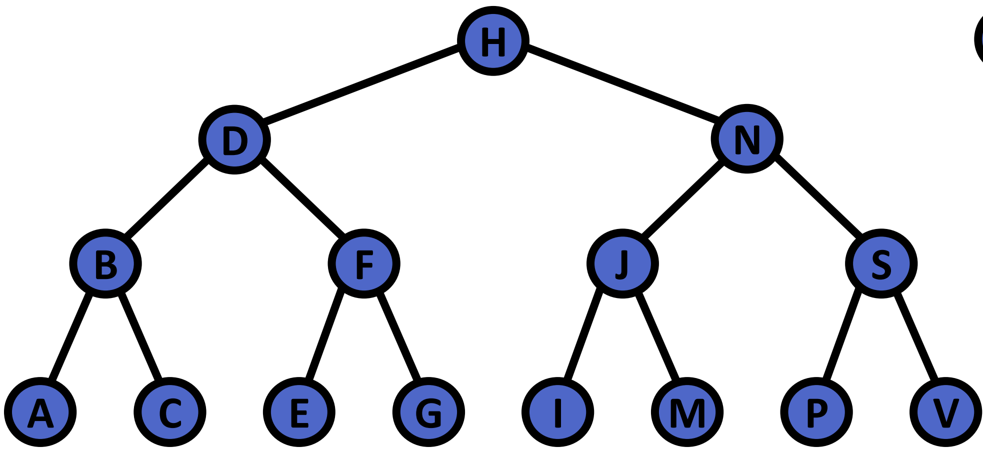
```
Node treePredecessor( Node x )
{
  if( x == null ) return null;

  if( x.left != null )
    return treeMaximum( x.left );

  y = x.parent;
  while( (y != null) and (x == y.left))
  {
    x = y;
    y = x.parent;
  }
  return y;
}
```

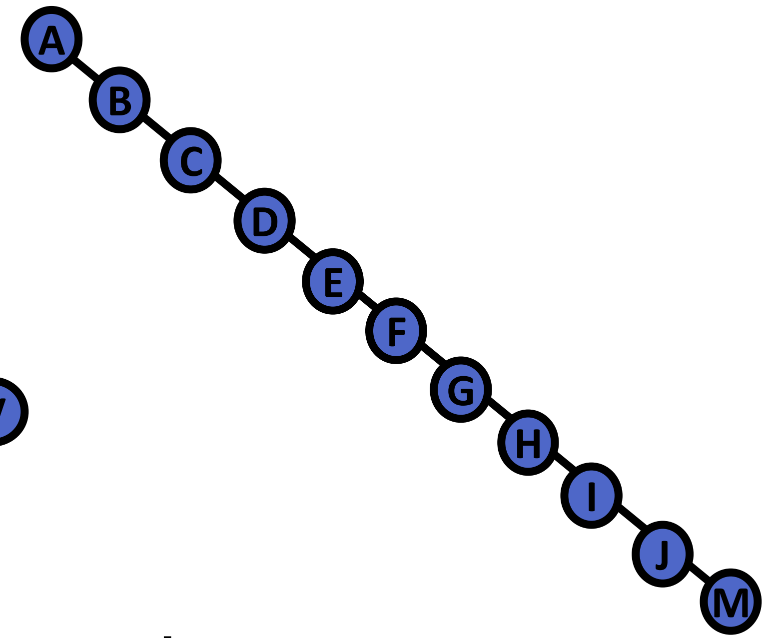


Java-like pseudo code

Operační složitost

Dynamické operace **`search,max,min,succ,pred`** mají operační složitost O(h), kde h je hloubka vyhledávacího stromu.



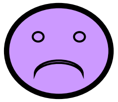


$h = \log_2(n)$

=> *O(log(n))*

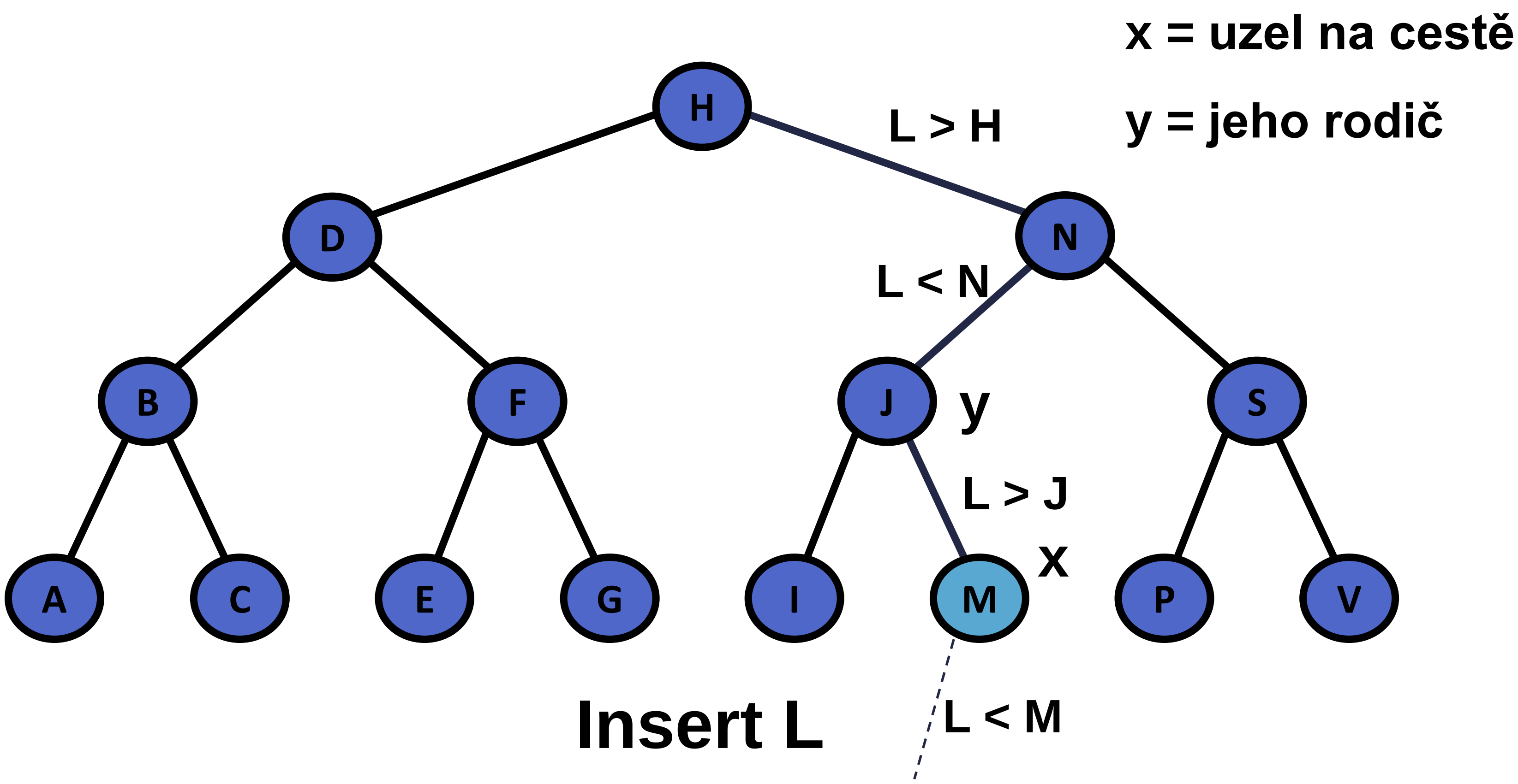
h = n

=> *O(n)* !!!



=> strom je třeba vyvážit!!!

Insert (vložení prvku)



Insert L

1. Najdi list, který bude rodičem ... M
2. Připoj nový element jako nový list ... M.left

Insert (vložení prvku)

x = uzel na cestě, y = jeho rodič

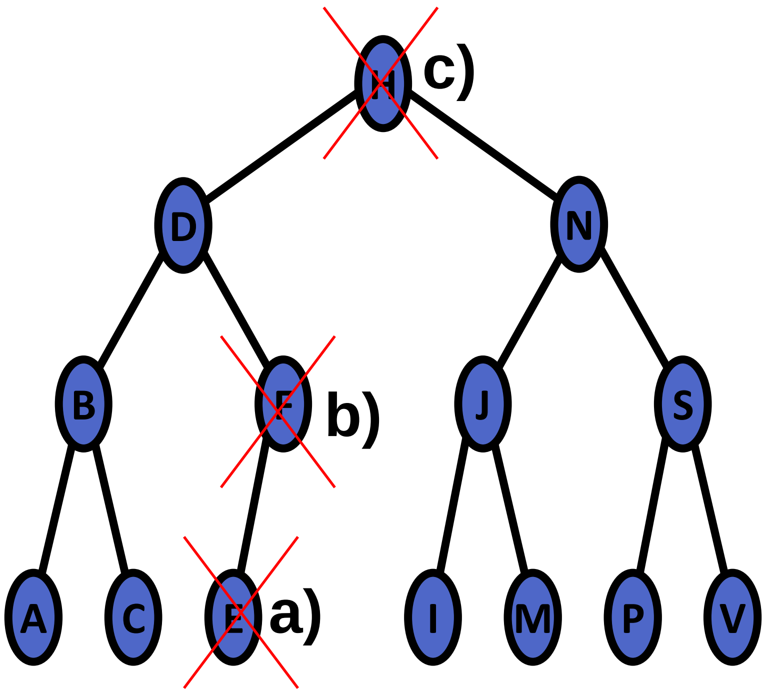
```
void treeInsert( Tree t, Node e )
{
  x = t.root; y = null;  // set x to tree root

  if( x == null )
       t.root = e;            // tree was empty
  else {
    while(x != null) {   // find the parent leaf
       y = x;
       if( e.key < x.key ) x = x.left;
                      else x = x.right;
    }
    if( e.key < y.key )    y.left  = e; // add e to parent y
                  else y.right = e;
  }
}
```

Java-like pseudo code

Jednoduchá verze – bez „update“ pro stejné klíče.

Operační složitost: najdi list + vložení = $O(\log_2 n) + O(1) =$ **$O(\log_2 n)$**

Delete (odstranění prvku)



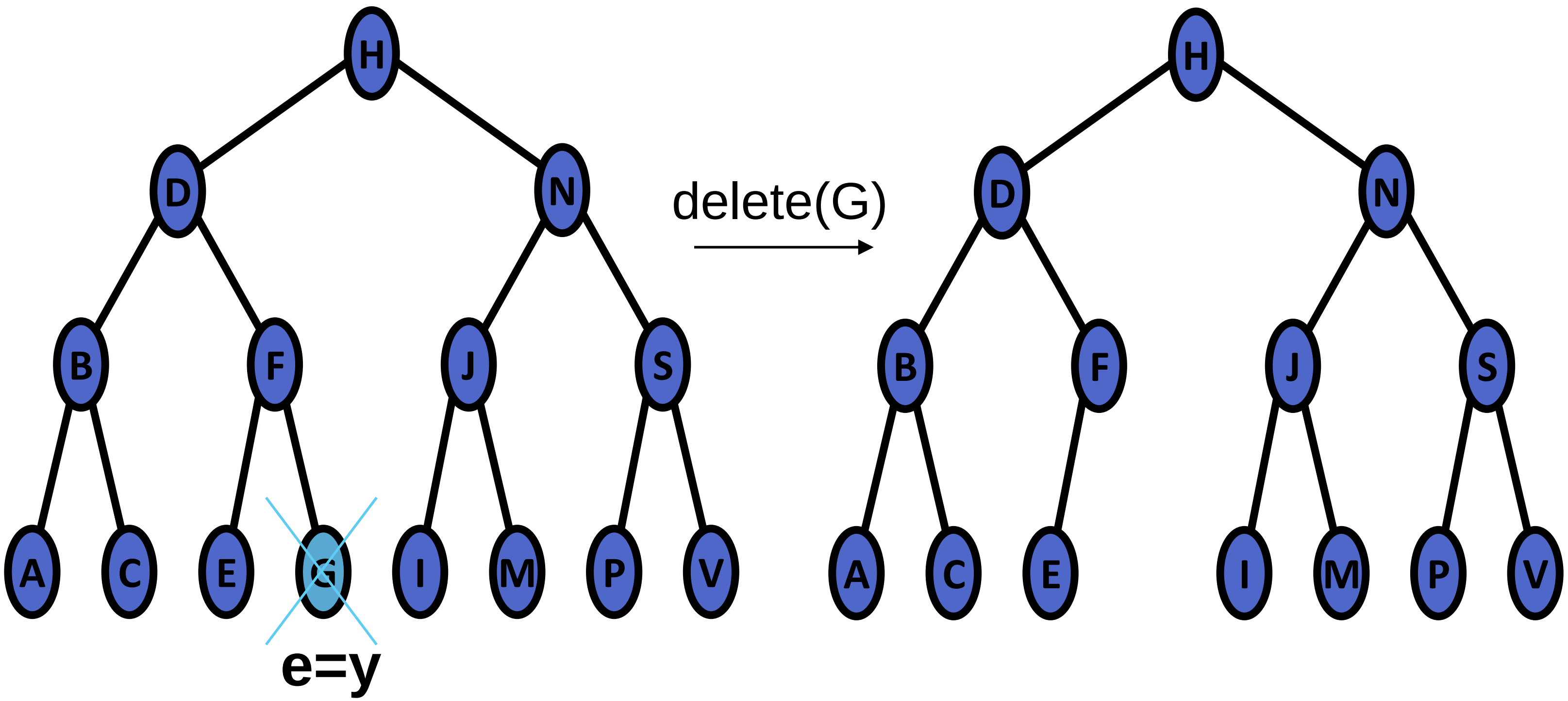
Delete – 3 případy

a) rušíme list, který nemá potomky

b) rušíme list, který má jednoho potomka

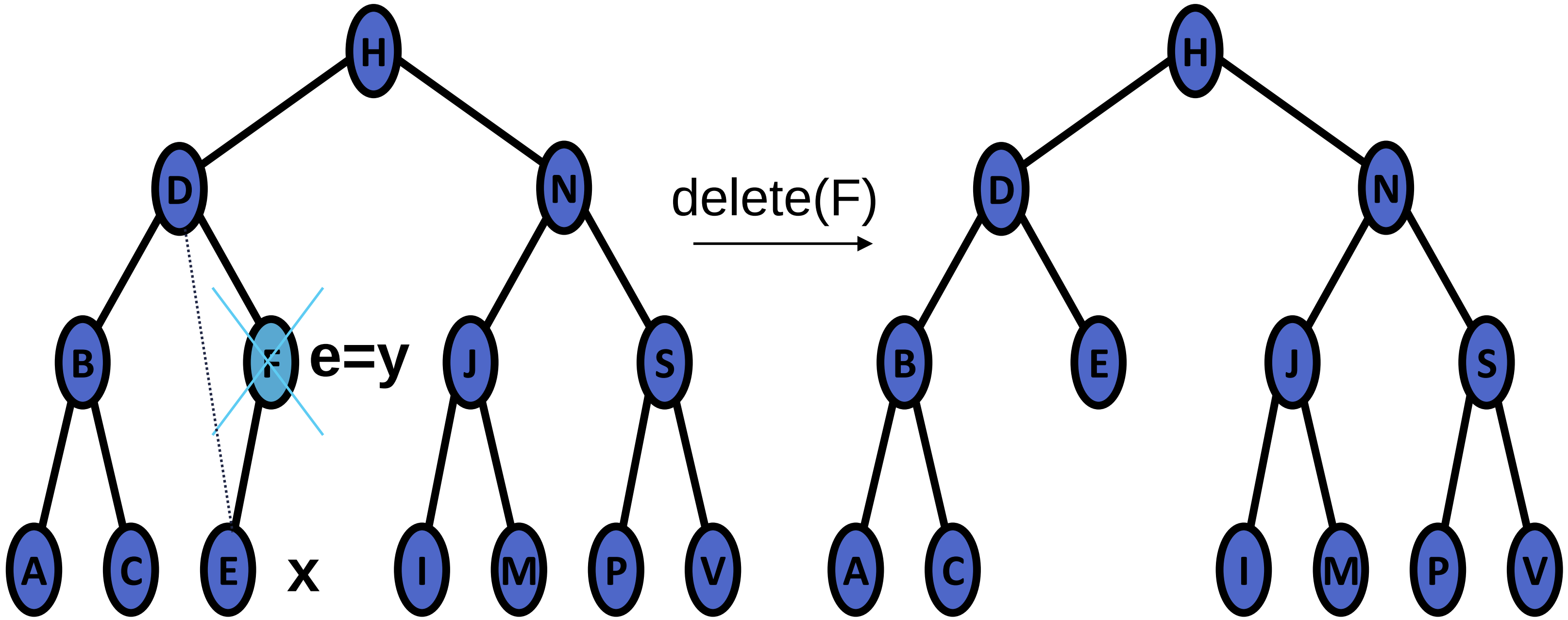
c) rušíme list, který má dva potomky

Delete (odstranění prvku)
a) smaž list



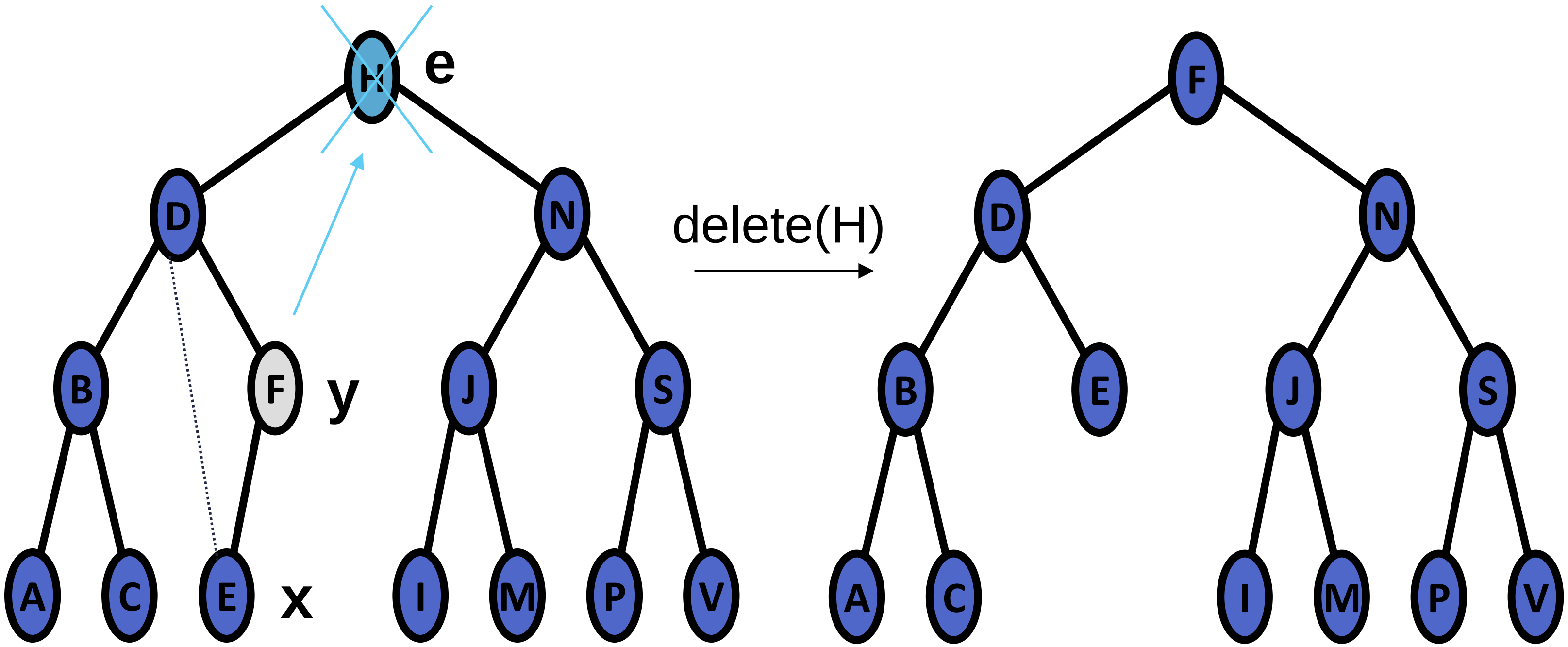
a) list bez potomků lze jednoduše vypustit

Delete (odstranění prvku)
b) vnitřní s potomkem



b) uzel s jedním potomkem - přemosti vymazaný uzel

Delete (odstranění prvku)
c) se 2 potomky



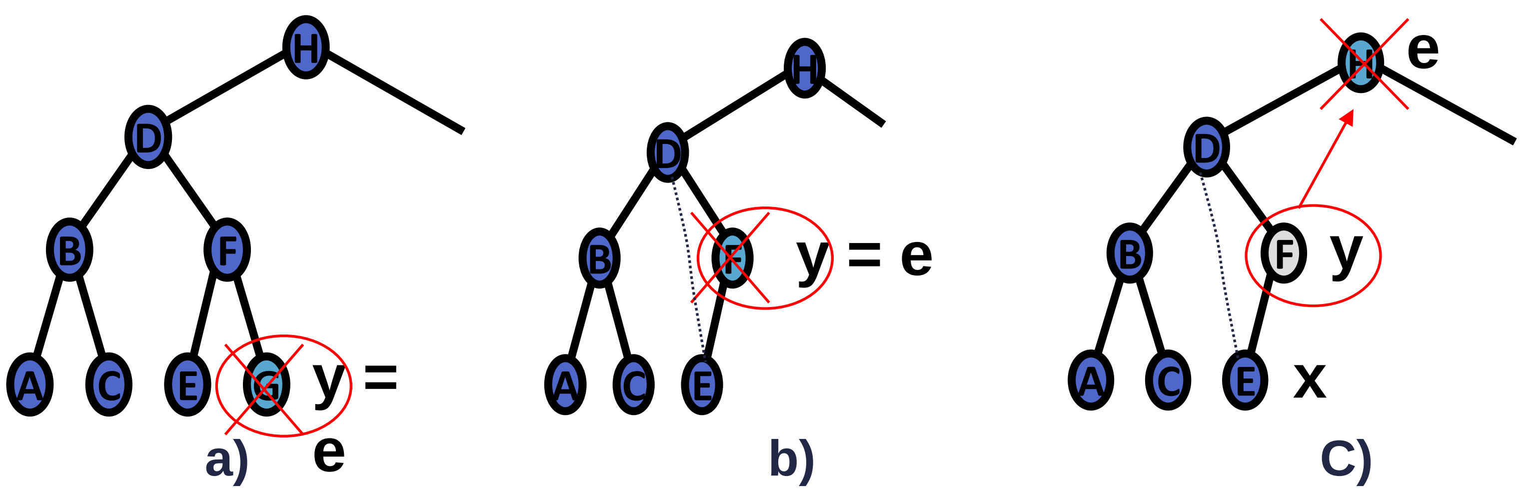
c) uzel se dvěma potomky -> nahraď uzel jeho předchůdcem (**`pred`**) a vypusť předchůdce, nebo následníkem (**`succ`**) a vypusť následníka

Delete (odstranění prvku)

```
Node treeDelete( Tree t, Node e )
// e…node to logically delete
// y…node to physically delete
// x…y’s only son

{ Node x, y;

      1. find node y (e or predecessor of e)
      2. find x = y’s only child or null
      3. link x up with parent of y
      4. link parent of y down to x
      5. replace e by in-order predecessor y
      6. return y (for later use)
}
```

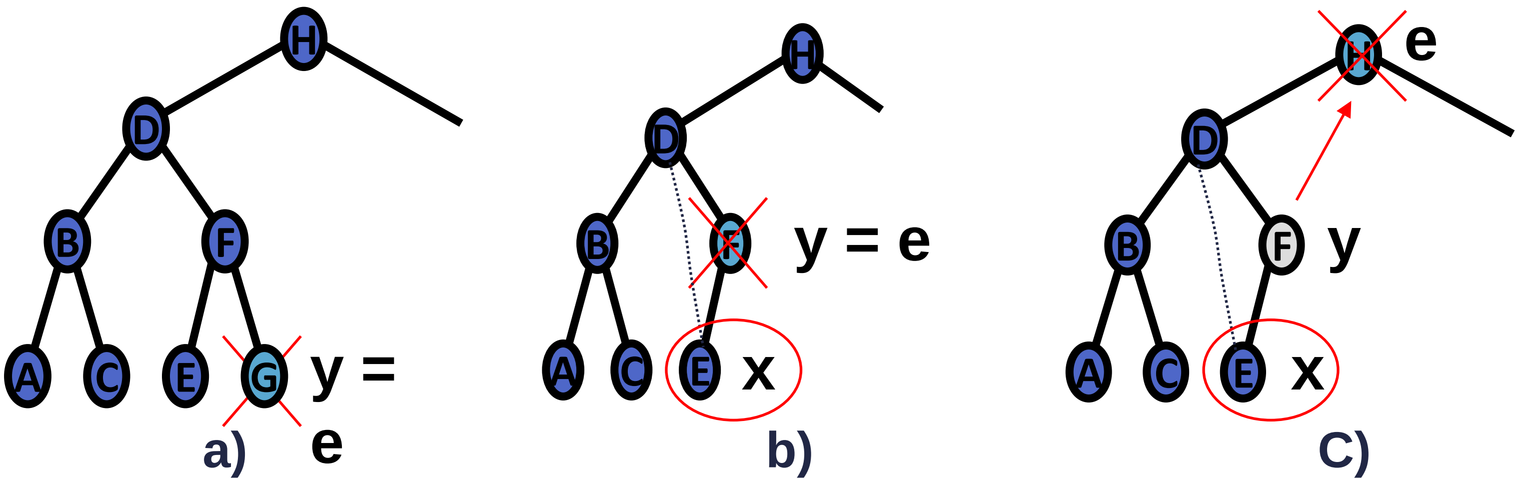
Delete (odstranění prvku) - pokr.

```
Node treeDelete( Tree t, Node e )
// e…node to logically delete
// y…node to physically delete
// x…y's son

{ Node x, y;

 1.find node y

  if(e.left == null OR e.right == null)
    y = e;                         // cases a,b) 0 - 1 child
  else
    y = TreePredecessor(e);        // case  c) 2 children
                                                 cont…
```



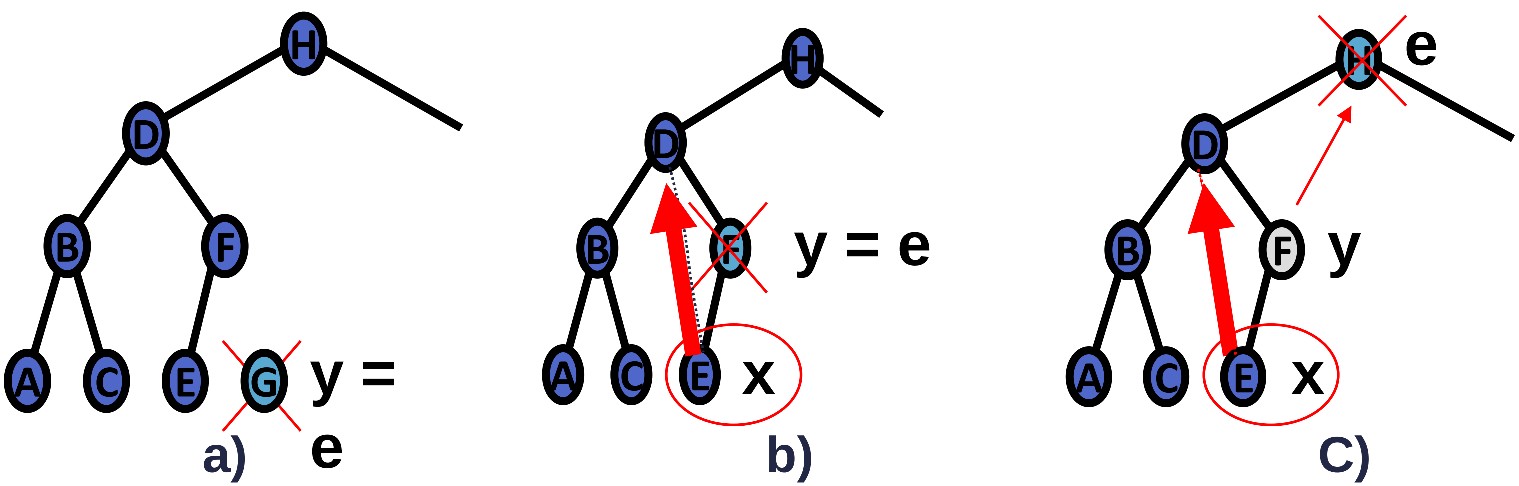
Delete (odstranění prvku)

```
... cont

2. find x = y's only child or null
      if( y.left != null )// a) null, b,c) only child
            x = y.left;
      else
            x = y.right;

cont...
```

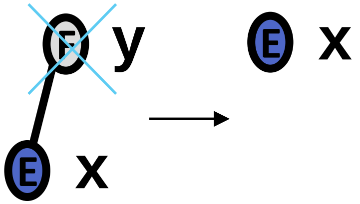


Delete (odstranění prvku)

```
... cont
3. link x up with its new parent (former parent of y)

  if( x != null ) x.parent = y.parent;  // b,c)

cont …
```

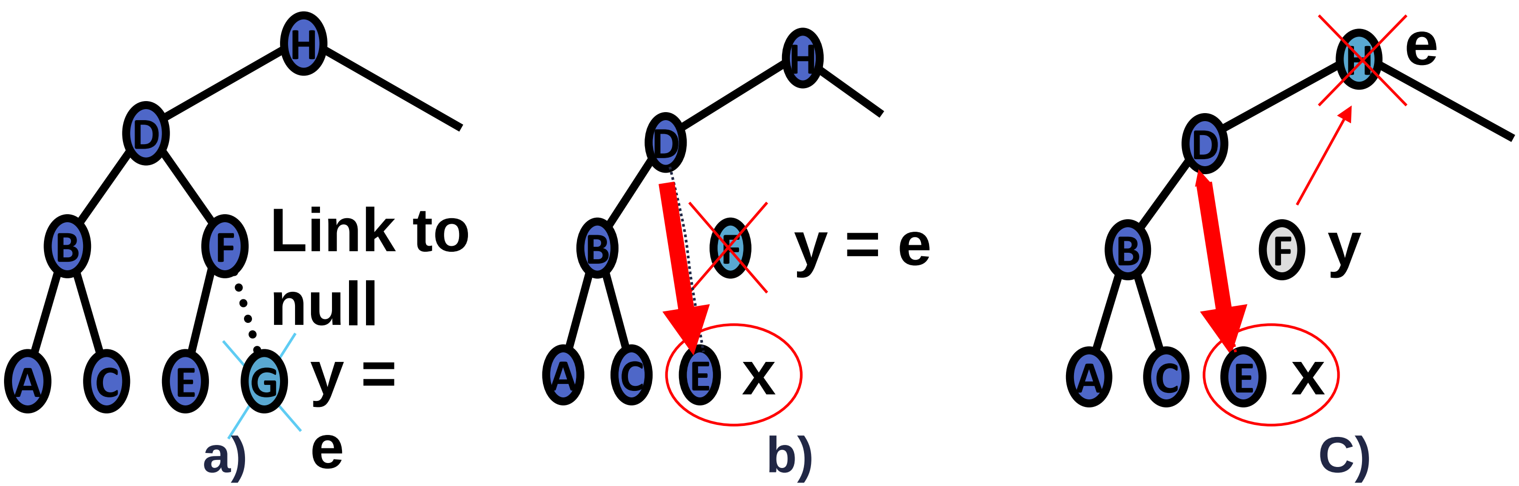


Delete (odstranění prvku)



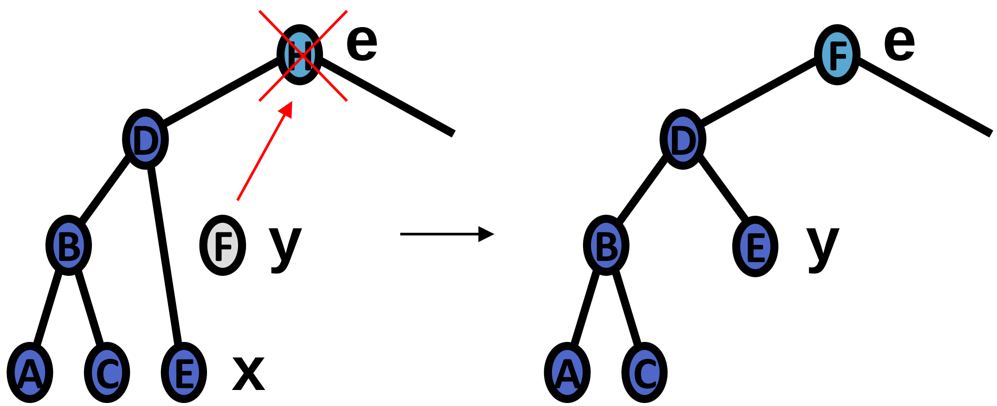
4. link parent of y down to x

```
if( y.parent == null )
        t.root = x                          // y was root
else if( y == (y.parent).left )
              (y.parent).left =  x;         // y was left son
           else
              (y.parent).right = x;         // y was right son
...
cont...
```



Delete (odstranění prvku)

```
...
  5. replace e with in-order predecessor

      if( y != e ) // replace e with in-order predecessor
      {
            e.key = y.key;        // copy the key
            e.data = y.data;      // copy other fields too
      }

  6. return y (for later use)
}
```



Delete (celkový kód)

```
Node treeDelete( Tree t, Node e )
{ Node x, y;
// e..node to logically delete
// y…node to physically delete, x…y's only son

  if(e.left == null OR e.right == null)
    y = e;                              // cases a, b) 0 to 1 child
  else y = TreePredecessor(e);          // c) 2 children
  if( y.left != null )                  // a) null, b,c) only child
     x = y.left;
     else x = y.right;
  if( x != null ) x.parent = y.parent;  // b,c)
  if( y.parent == null )  t.root = x                  // y-root
  else if( y == (y.parent).left ) (y.parent).left =  x;// y-L son
           else(y.parent).right = x;                   // y-R son
  if( y != e ) {       // replace e with in-order predecessor
    e.key = y.key;
    e.dat = y.data; // copy other fields too
  }
  return y;            // instead of delete
}
```

Vyvažování stromu (Tree balancing)

Operace nad BVS jsou závislé na míře vyváženosti stromu – pro vyvážený strom dosahují $O(\log_2 n)$, pro nevyvážený $O(n)$.

Vyváženost:

- Silná podmínka – shoda *h* (Ideální případ)

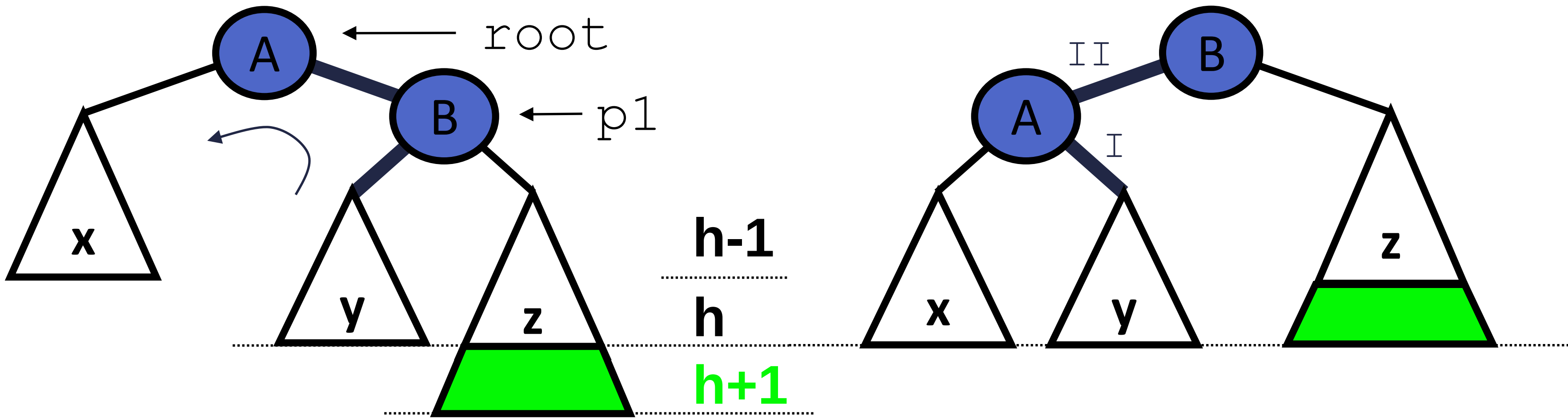
  Pro všechny uzly platí:

  počet uzlů vlevo = počet uzlů vpravo

- Slabší podmínka – násobek *h*
  - **výška** podstromů - AVL strom (jméno pochází z iniciál jeho objevitelů)
  - **výška** + počet potomků - 1-2 strom, ...
  - **váha** podstromů (počty uzlů) - váhově vyvážený strom
  - stejná **černá výška** – Červeno-černý strom

Pomocné operace pro udržení vyvážení stromu – rotace

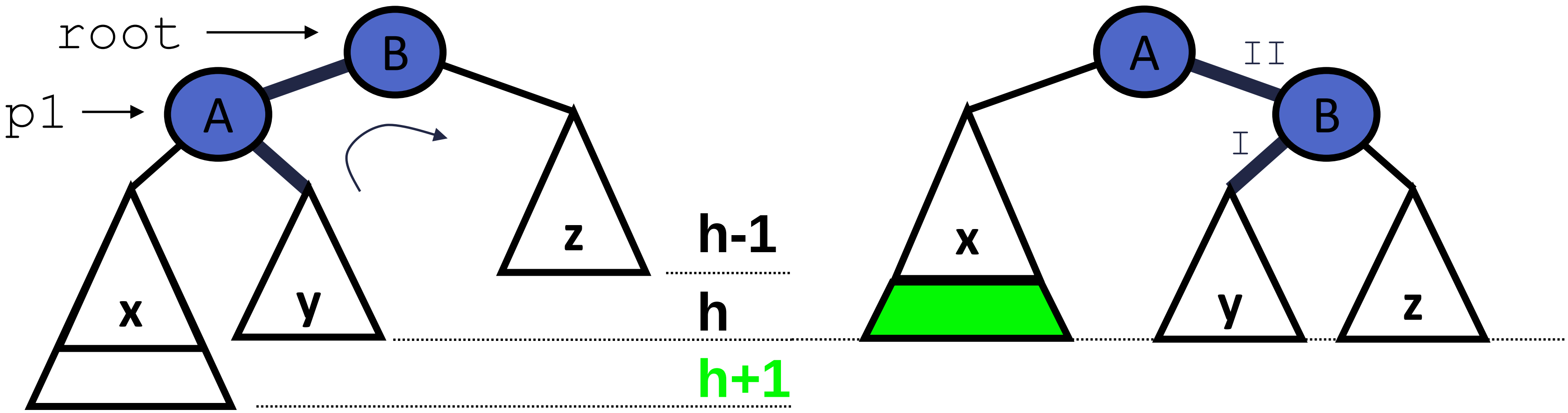
L rotace (Left rotation)




```
Node leftRotation( Node root ) {    // subtree root!!!
      if( root == null ) return root;
      Node p1 = root.right;        (init)
      if (p1 == null) return root;
      root.right = p1.left;        (I)
      p1.left    = root;           (II)
      return p1;
}
```

Java-like pseudo code

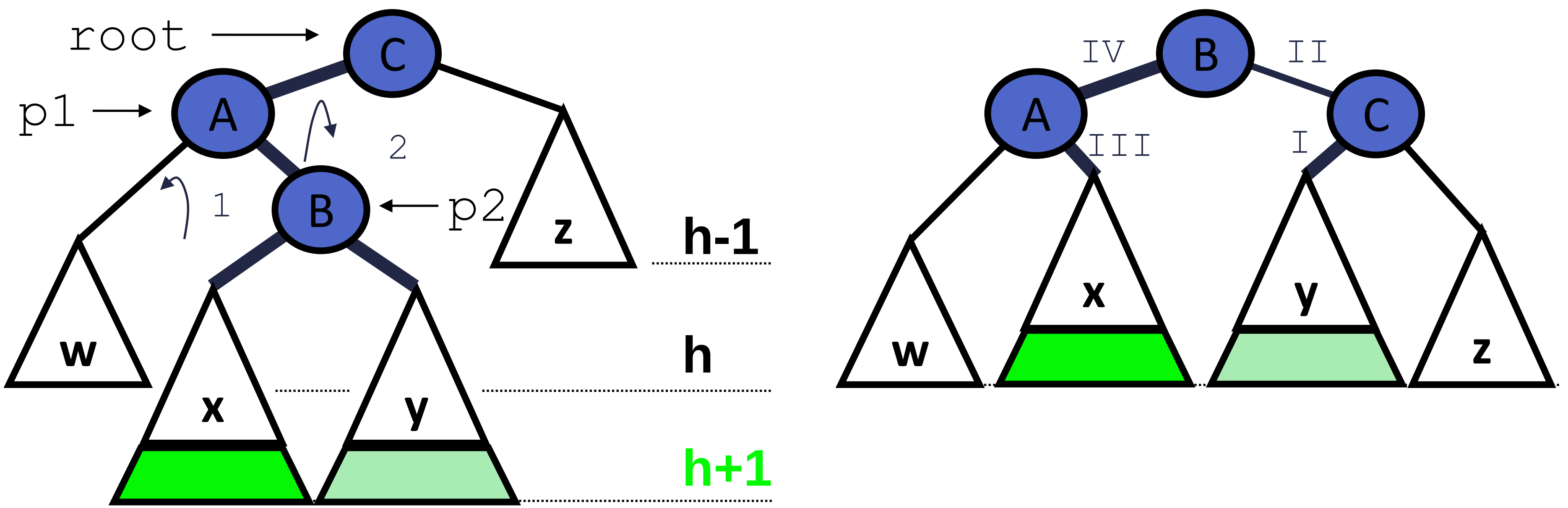
R rotace (right rotation)




```
Node rightRotation( Node root ) {     // subtree root!!!
     if( root == null ) return root;
     Node p1 = root.left;           (init)
     if (p1 == null) return root;
     root.left = p1.right;          (I)
     p1.right   = root;             (II)
     return p1;
}
```

Java-like pseudo code

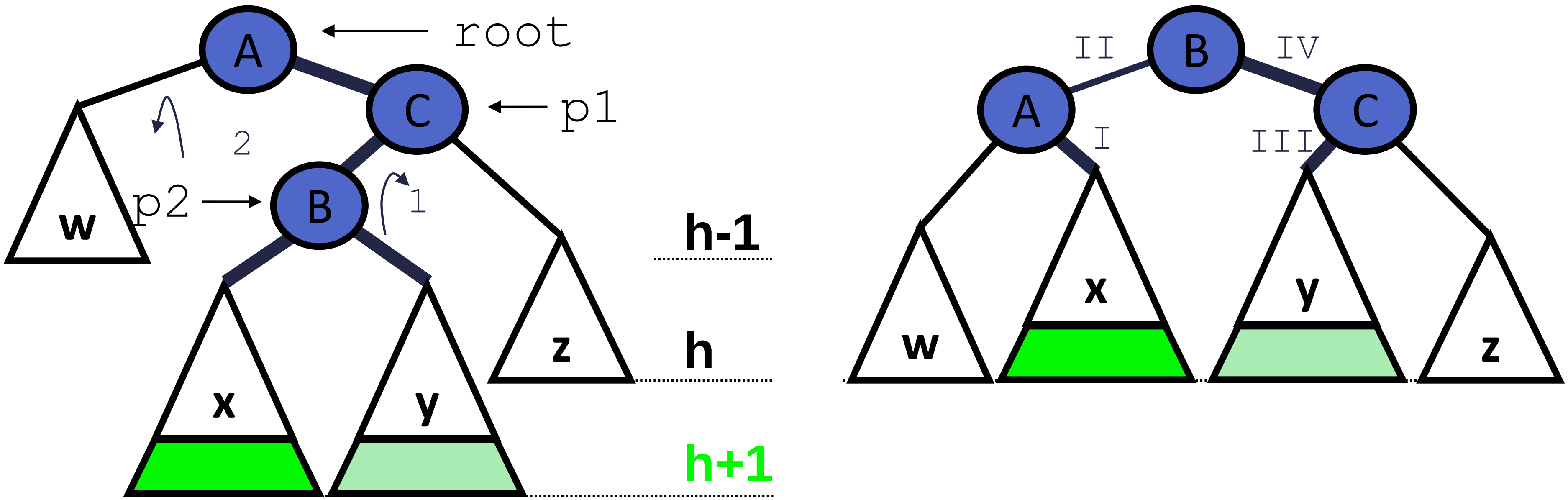
LR rotace (left-right rotation)




```
Node leftRightRotation( Node root ) {   if(root==null)..;
      Node p1 = root.left; Node p2 = p1.right;    (init)
      root.left = p2.right; (I)
      p2.right = root;      (II)
      p1.right = p2.left;   (III)
      p2.left = p1;         (IV)
      return p2;     }
```

Java-like pseudo code

RL rotace (right- left rotation)




```
Node rightLeftRotation( Node root ) {   if(root==null)....;
      Node p1 = root.right; Node p2 = p1.left;      (init)
      root.right = p2.left; (I)
      p2.left = root;       (II)
      p1.left = p2.right;   (III)
      p2.right = p1;        (IV)
      return p2;    }
```

Java-like pseudo code

Kdy použijeme kterou rotaci?

- AVL strom **[Richta90]**
  - Výškově vyvážený strom (Georgij Maximovič **A**delson-**V**elskij a Evgenij Michajlovič **L**andis)
  - Výška:
    - Prázdný strom: výška = -1
    - neprázdný: výška = výška delšího potomka
  - Vyvážený strom:

    rozdíl výšek potomků **`bal`** = {-1, 0, 1}

AVL strom (AVL tree)

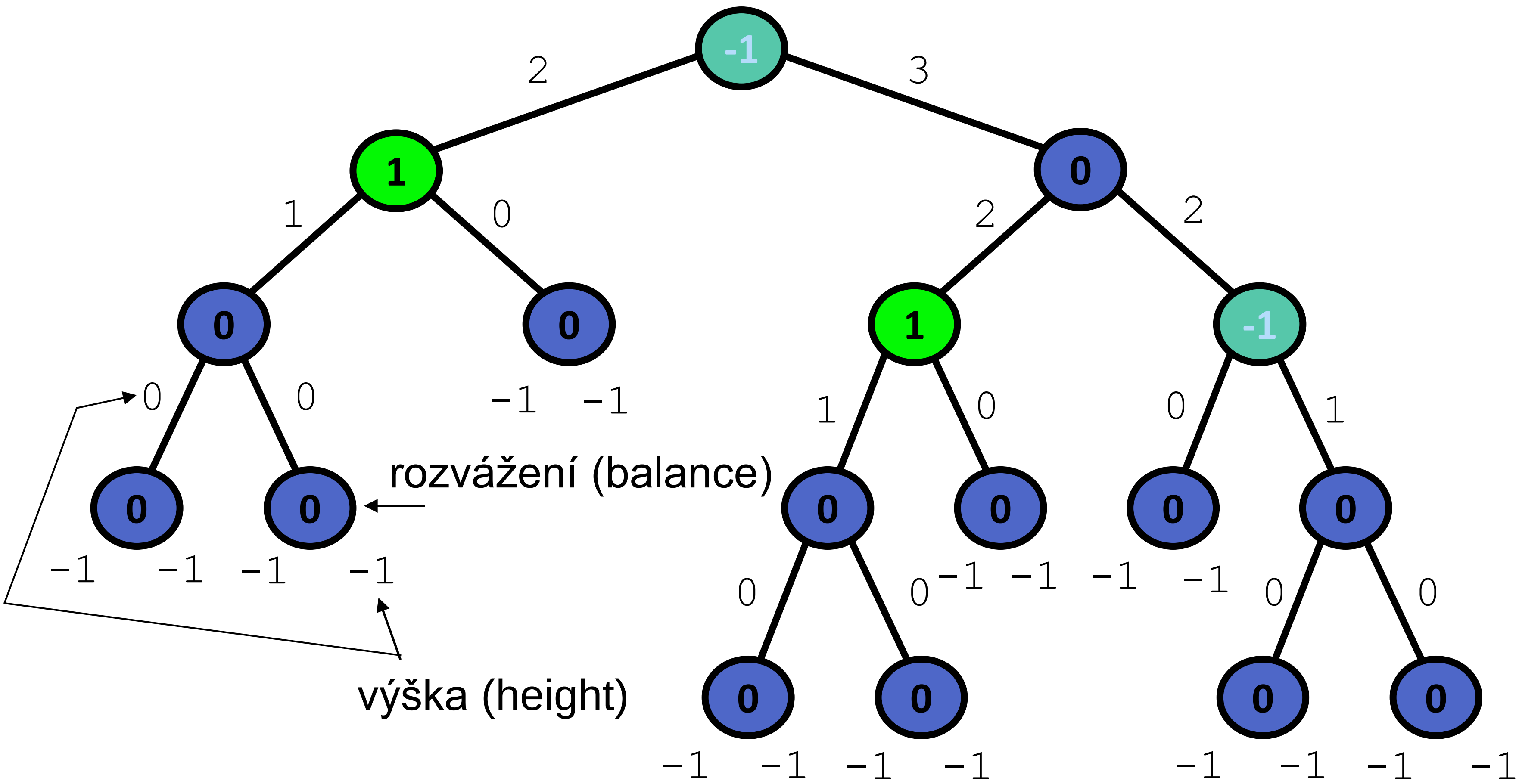
- `// A very inefficient recursive definition`

```
int height( Node t )
{
   if( t == null )
       return -1;    //leaf
   else
      return 1 + max( height( t.left ),
                      height( t.right ) );
}
```

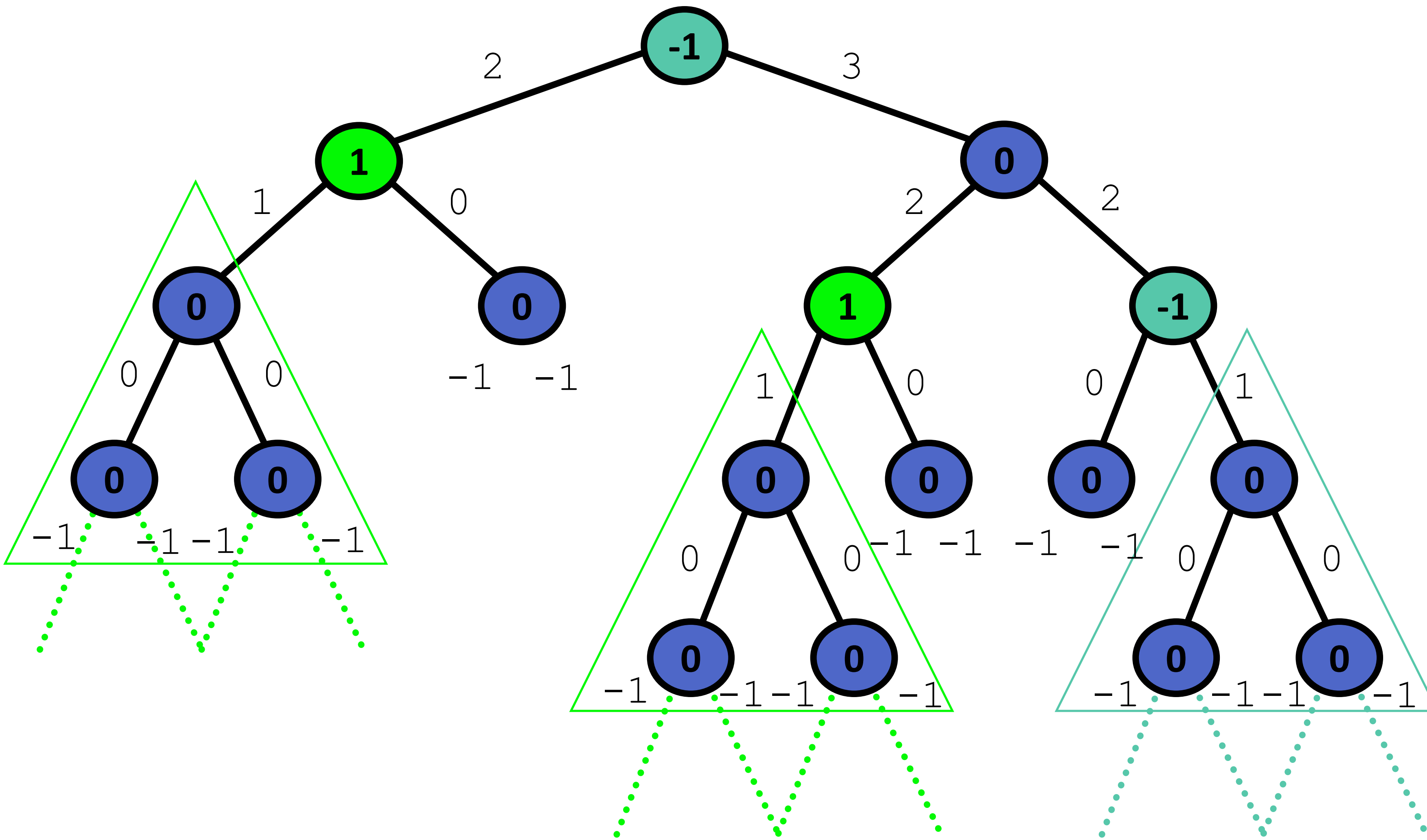
```
int bal( Node t )
{
   return height( t.left ) - height( t.right );
}
```

Java-like pseudo code

AVL strom - výšky a rozvážení

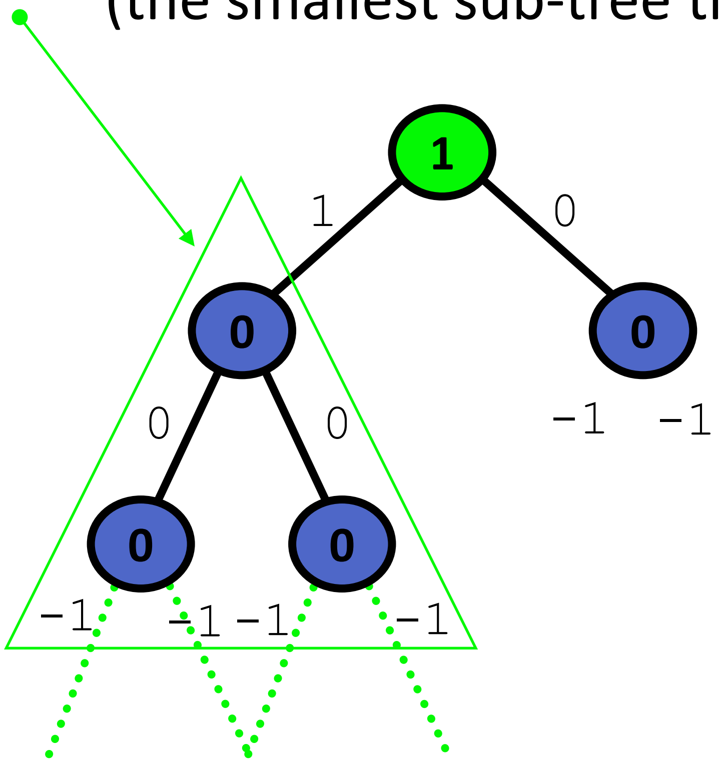


AVL strom před vložením uzlu



AVL strom - nejmenší podstrom

Nejmenší podstrom, který se přidáním uzlu rozváží z 0
(the smallest sub-tree that looses its balance = 0 by insertion)



- Je vyvážený: bal = 0
- Po operaci insert zůstává vyvážený

bal∈⟨-1,+1⟩

Rodič (parent)

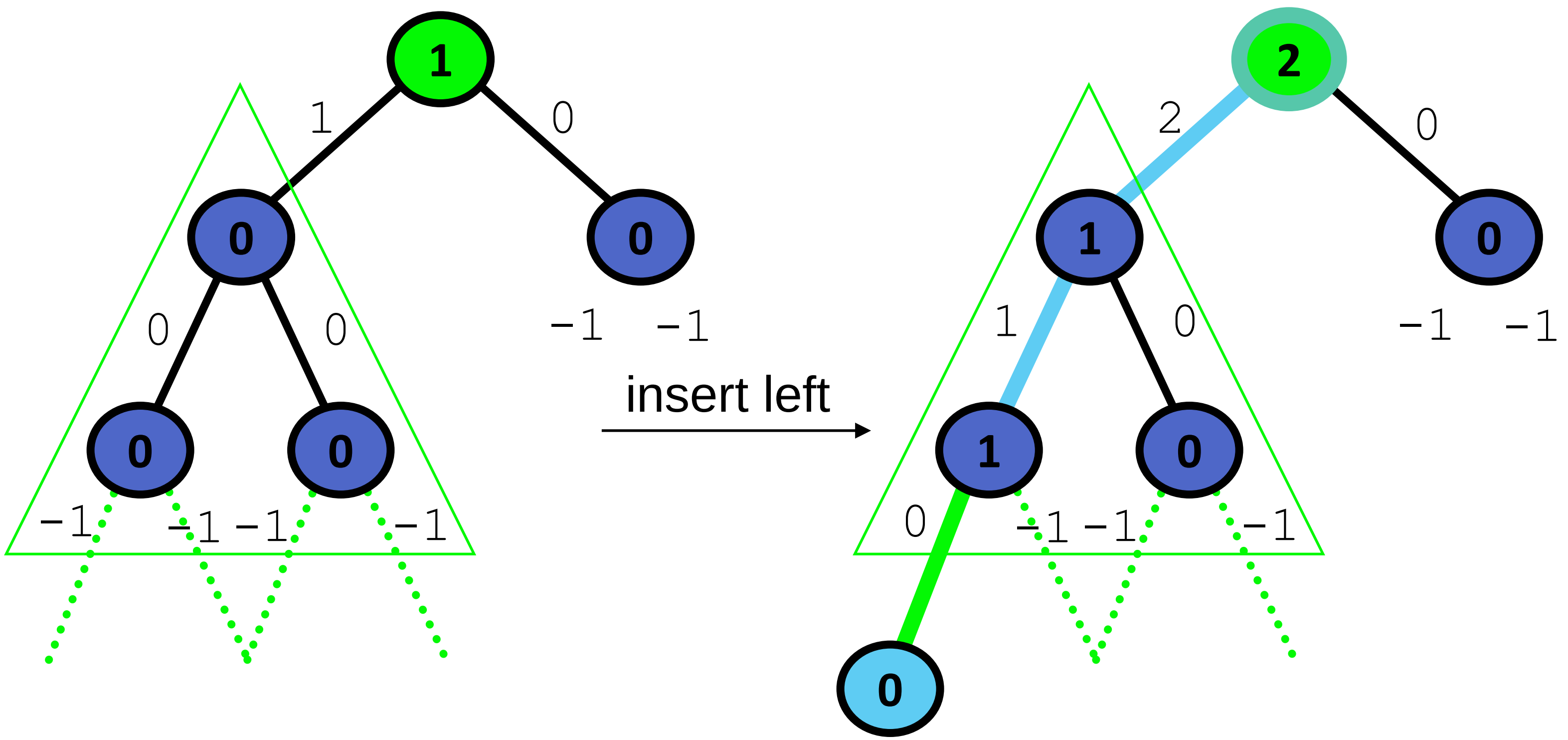
- 1–1 → 0 OK
- 1+1 → 2 není vyvážený

…

Nejmenší – modifikace blízko k listům

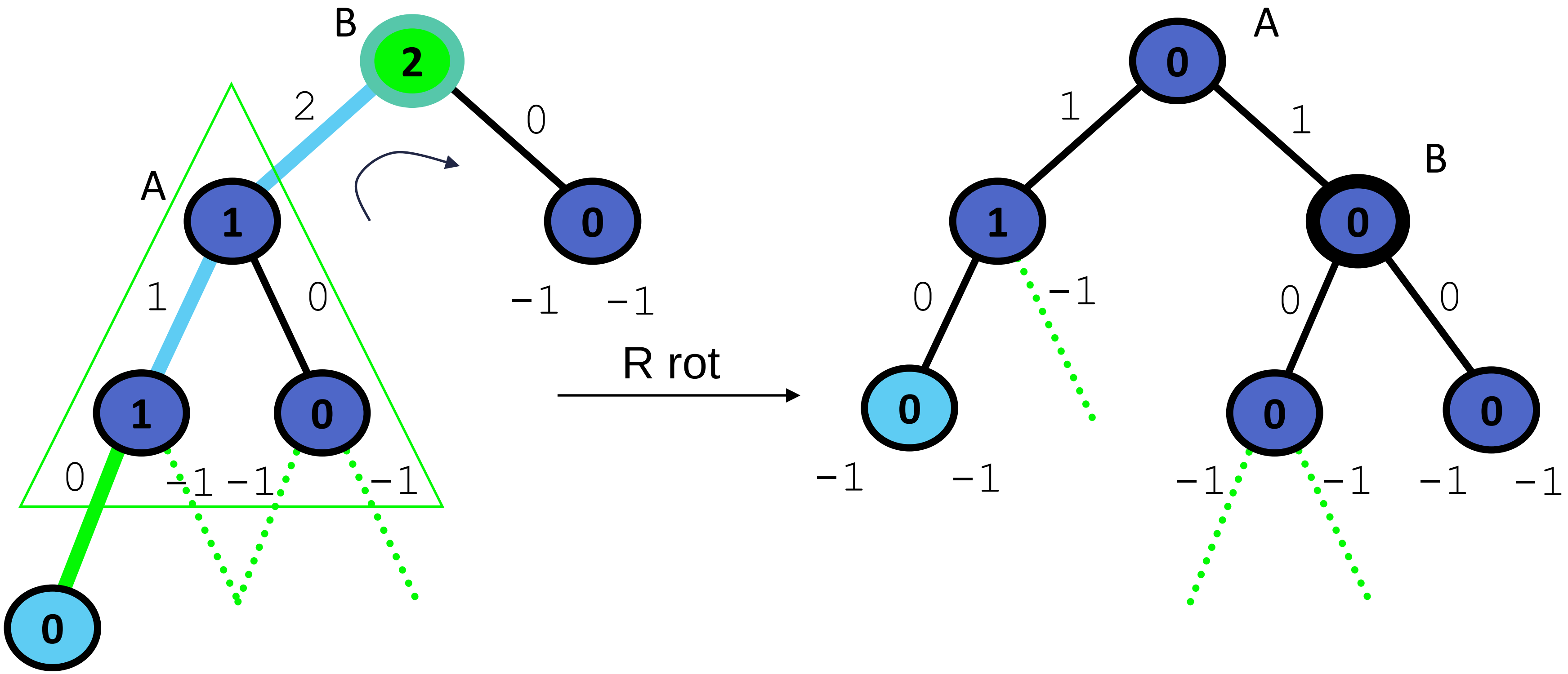
AVL strom - vložení uzlu doleva

a) Podstrom se přidáním uzlu doleva rozváží
(the sub-tree loses its balance by node insertion – left)



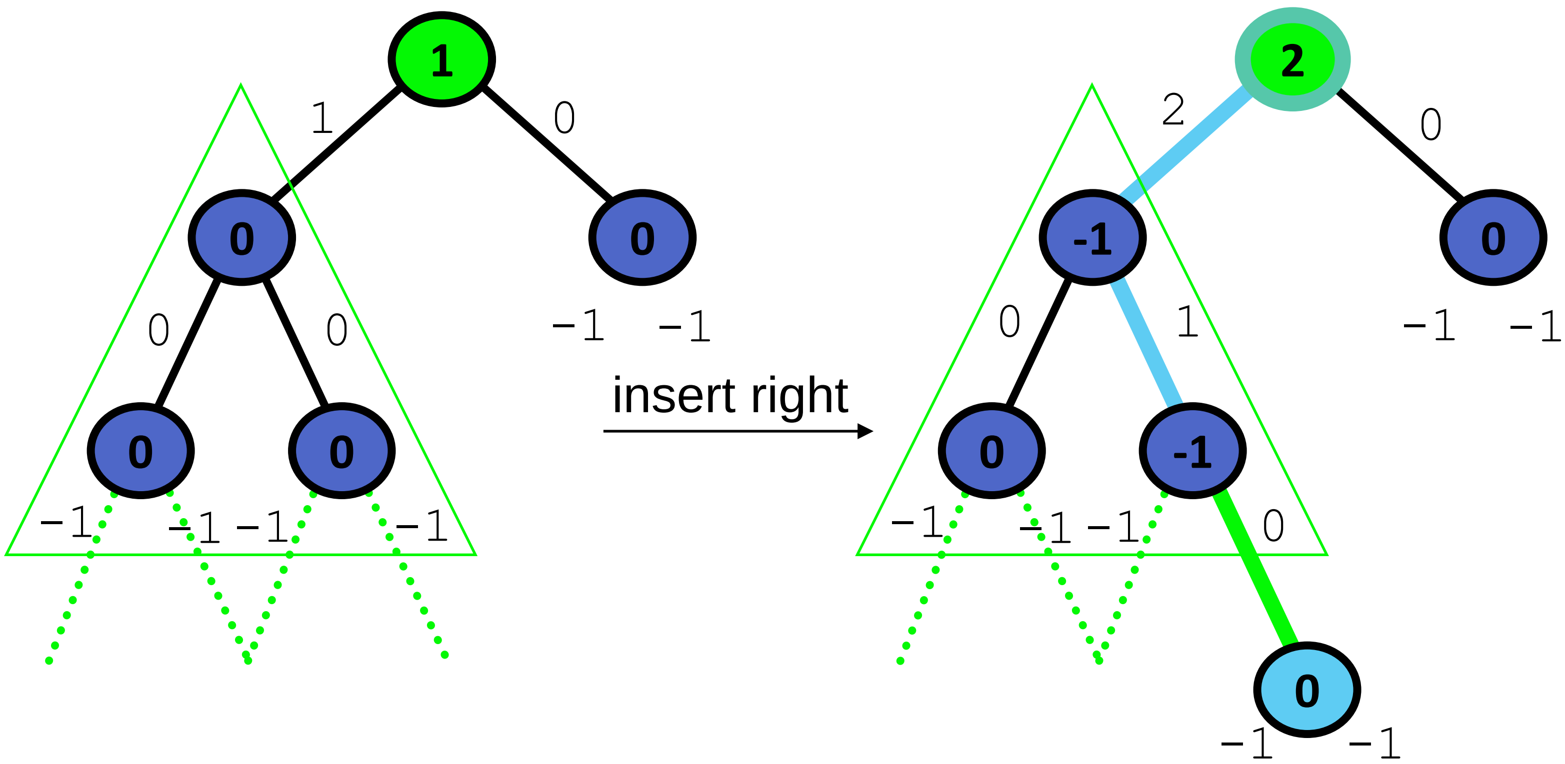
AVL strom - pravá rotace

a) Vložen doleva – doleva => korekce pravou rotací
(node inserted to the left – left => balance by Right rotation)



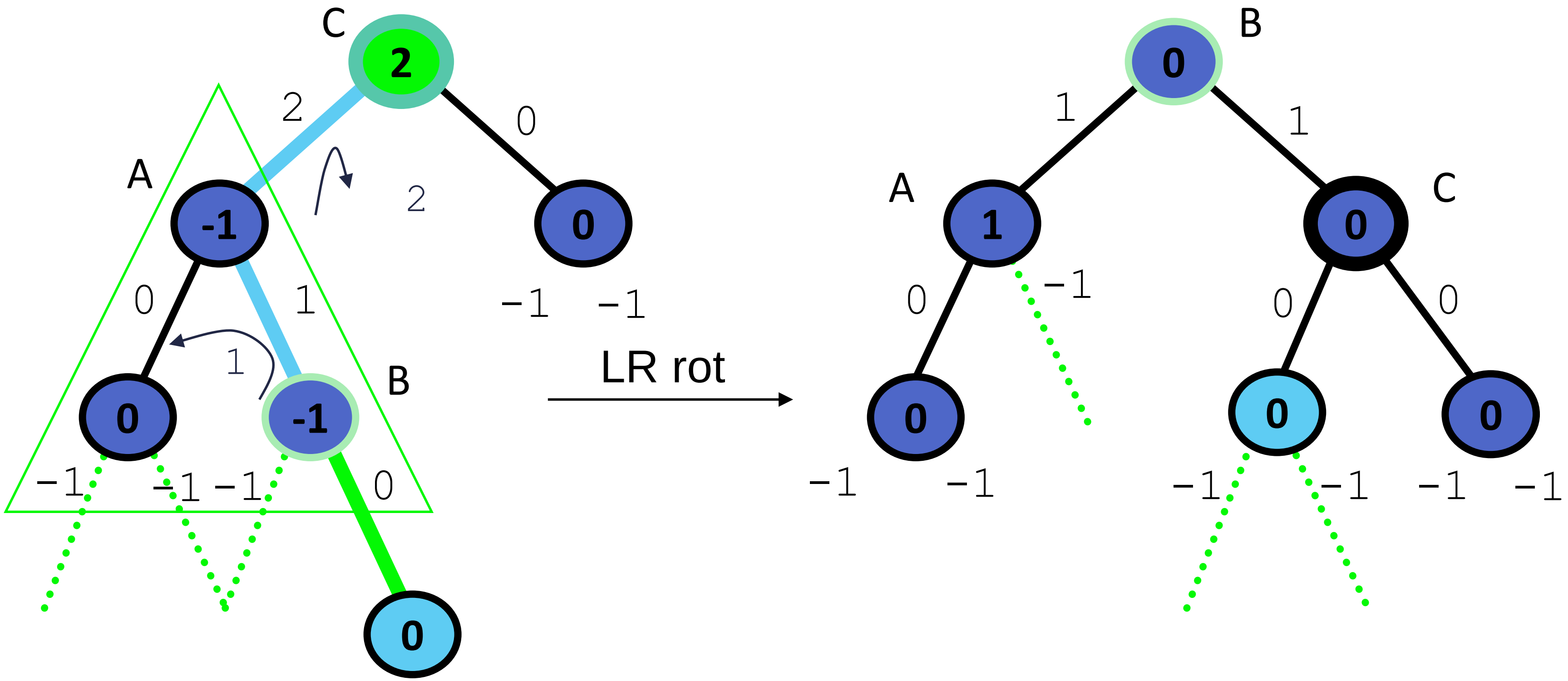
AVL strom - vložení uzlu doprava

b) Podstrom se přidáním uzlu doprava rozváží
(The sub-tree loses its balance by node insertion – right)



AVL strom - pravá rotace

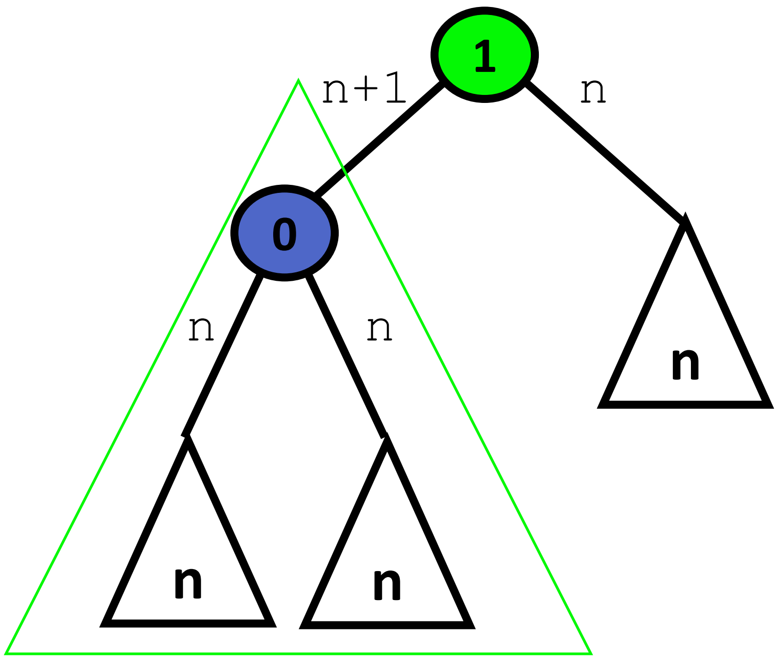
b) Vložen doleva – doprava => korekce LR rotací
(Node inserted left – right => balance by the LR rotation)

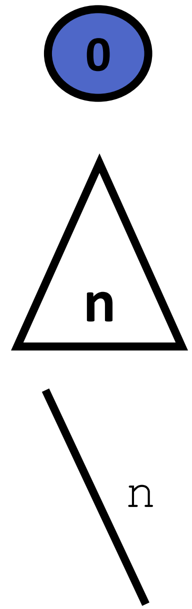


AVL strom - nejmenší podstrom

Nejmenší podstrom, který se přidáním uzlu rozváží

(The smallest sub-tree looses its balance by insertion)





Uzel s vyvážením 0
(Node with balance 0)

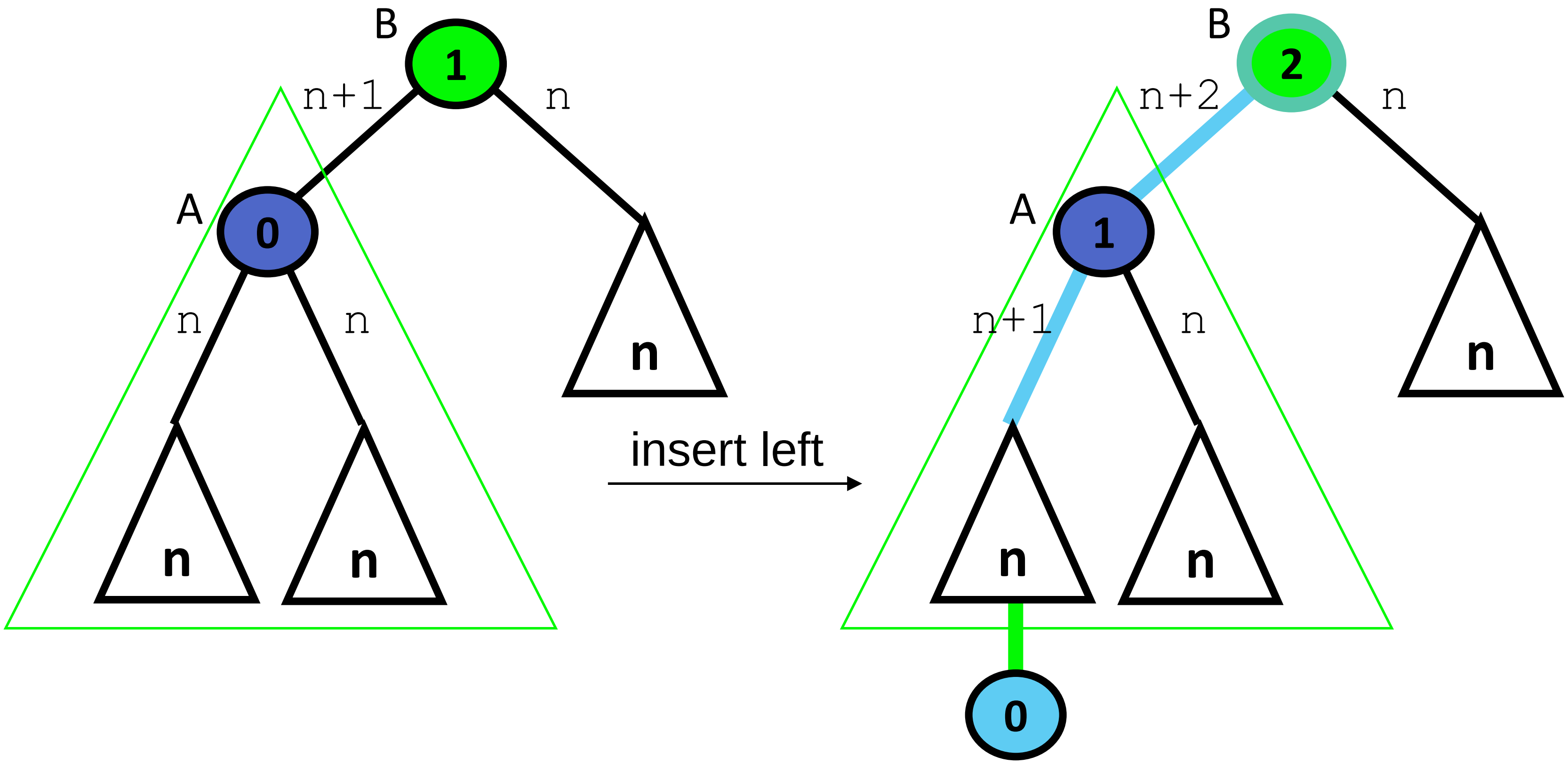
Podstrom výšky h
(Sub-tree of height n)

K podstromu výšky n
(Sub-tree below of height n)

AVL strom - vložení uzlu doleva

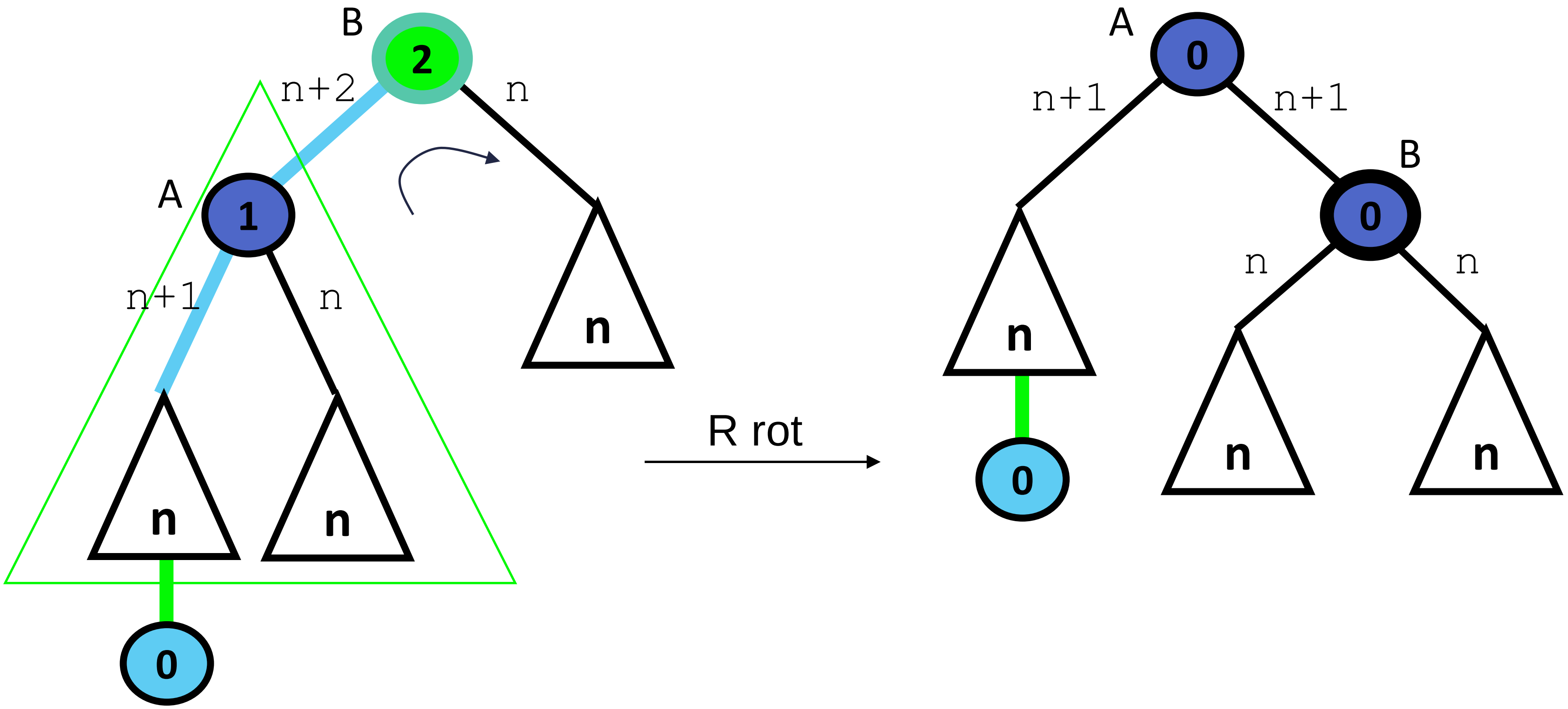
a) Podstrom se přidáním uzlu doleva rozváží

(The sub-tree loses its balance by node insertion – left)



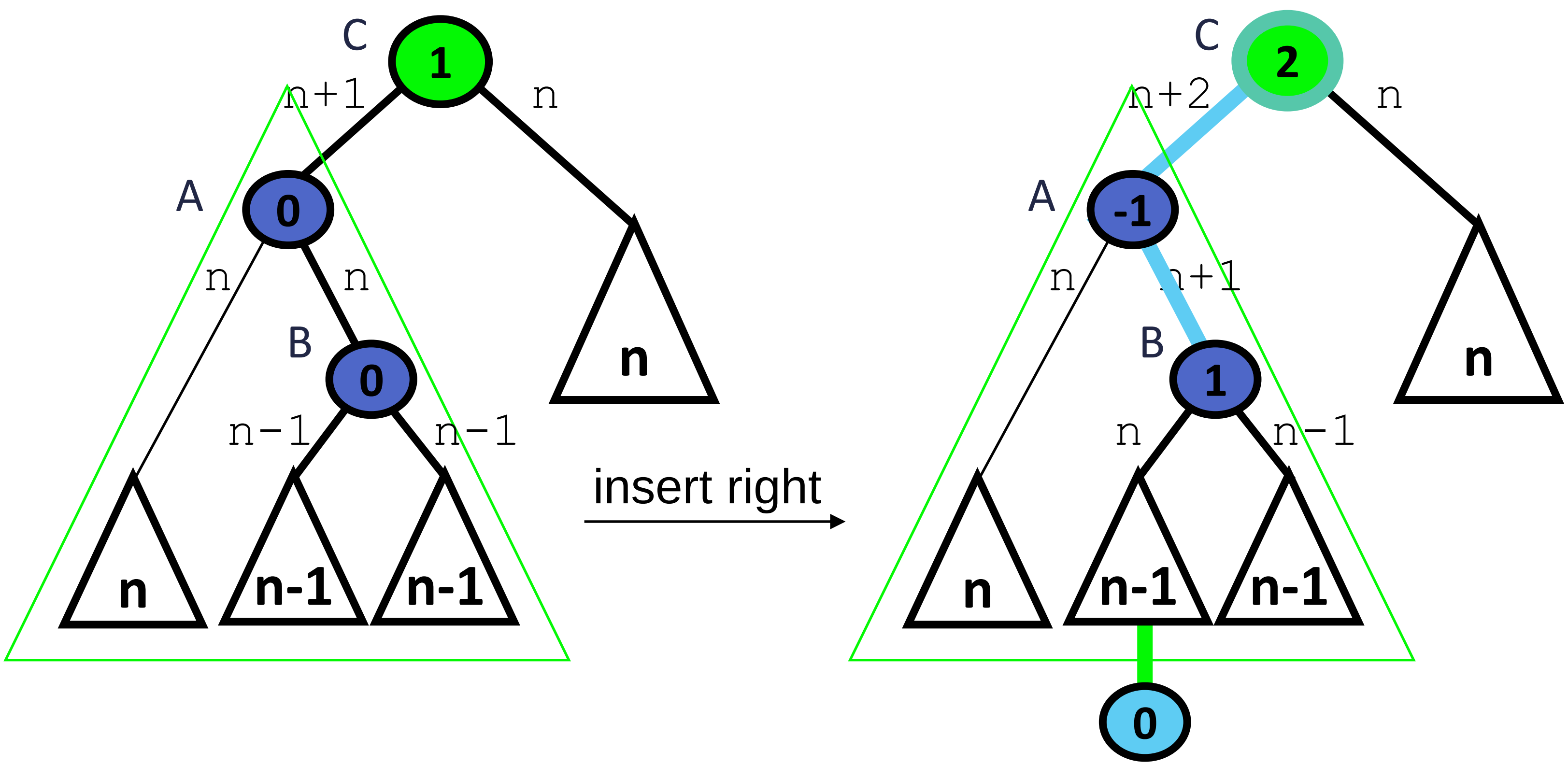
AVL strom - pravá rotace

a) Vložen doleva – doleva => korekce pravou rotací (R rotací)
(Node inserted to the left – left => balance by right rotation)



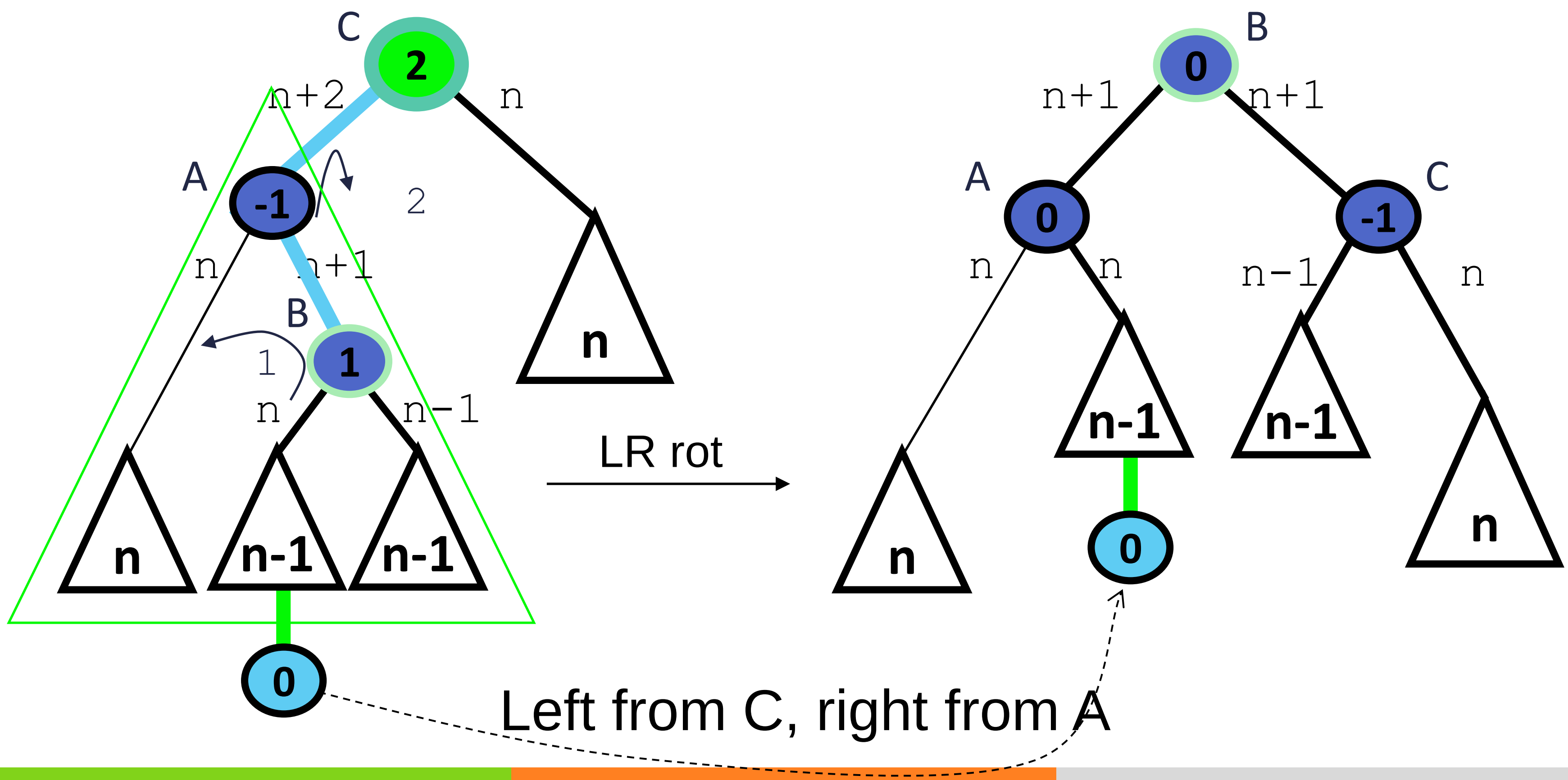
AVL strom - vložení uzlu doprava

b1) Podstrom se přidáním uzlu doprava rozváží
(The sub-tree loses its balance by node insertion – right)



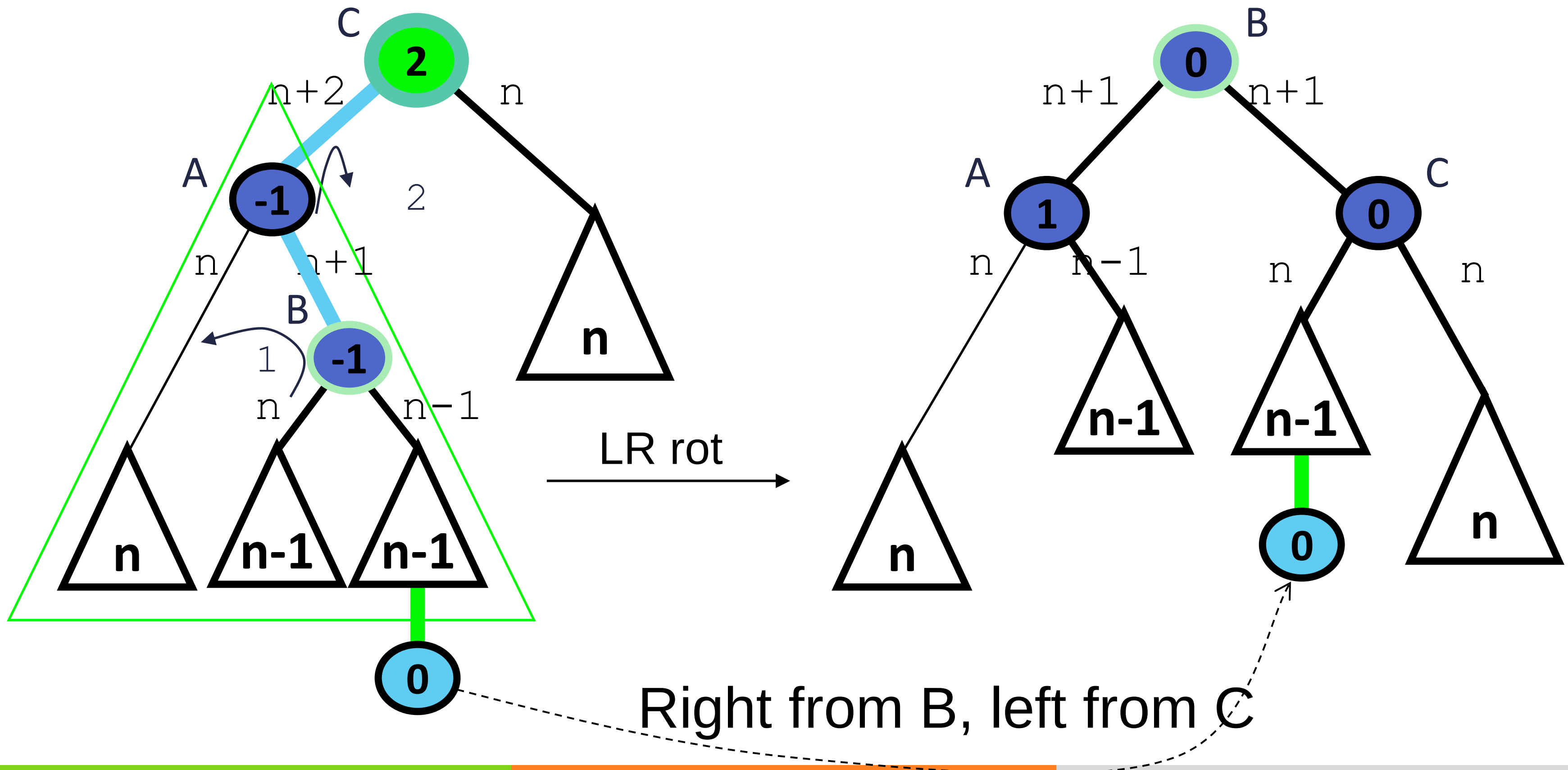
AVL strom - pravá rotace

b1) Vložen doleva – doprava => korekce LR rotací
(Node inserted left – right => balance by the LR rotation)



AVL strom - pravá rotace

b2) Vložen doleva – doprava => korekce LR rotací
(Node inserted left – right => balance by the LR rotation)



Vkládání (Insert) do BVS bez vyvážení

```
void treeInsert( Tree t, Elem e )
{
   x = t.root;
   y = null;

   if( x == null ) t.root = e;      // single-leaf tree
   else {
     while(x != null) {       // find the parent leaf y
        y = x;
        if( e.key < x.key ) x = x.left
                       else x = x.right
     }
     // add e to parent y
     if( e.key < y.key )   y.left  = e
                     else  y.right = e
   }
}
```

Java-like pseudo code

Vkládání (Insert) do AVL s vyvážením

```
void avlTreeInsert( tree t, elem e )
{
   // 1. init
   // 2. find a place for insert
   // 3. if( already present )
   //          replace the node
   //    else
   //          insert new node
   // 4.balance the tree, if necessary
}
```

Java-like pseudo code

AVL Insert – proměnné & inicializace

```
avlTreeInsert( Tree t, Elem e )
{
   Node cur, fcur;   // current sub-tree and its father
   Node a, b;        // smallest unbalanced tree and its son
   Bool found;       // node with the same key as e found
   Node help;        // for search and new node
 1.init
   found = false;
   cur = t.root; fcur = null;
   a = cur, b = null;
 2. find the place for insert
   ...
```

Java-like pseudo code

AVL Insert – najdi místo pro vložení

```
 ...
2. find the place for insert

while(( cur != null ) and !found )
{
     if( e.key == cur.key ) found = true;
     else {
            if( e.key < cur.key )
                 help = cur.left;
            else help = cur.right;
            if(( help != null) and ( bal(help) != 0 )){
            //remember possible place for unbalance
                   a = help;
            }
            fcur = cur; cur = help;
     }
 } ...
```

AVL Insert – nahrazení nebo vložení

```
3. if( already present ) replace the node
   value
```

```
if( found )
    setinfo( cur, e );   // replace the value
else {
   // insert new node to fcur
    help = leaf( e );    // cons ( e, null, null );
    if( fcur == null ) t.root = help;        // new root
    else {
           if( e.key < fcur.key )
                  fcur.left = help;
           else
                  fcur.right = help;
    }
  ...
```

AVL Insert – vyvážení podstromu

```
4.balance the tree, if necessary

    if( bal(a) == 2 )       {      // inserted left from 1
       b = a.left;
          if( b.key < e.key )      //and right from its son
               a.left = leftRotation( b ); // L rotation (LR)
          a = rightRotation( a );        // R rotation
    }
    else if( bal(a) == -2){        //inserted right from -1
      b = a.right;
      if( e.key < b.key )          // and left from its son
               a.right = rightRotation( b );// R rotation(RL)
      a = leftRotation( a );              // L rotation
     } // else tree remained balanced
  } // !found
}
```

AVL Insert – vyvažování podstromu

4. Shrnutí

a	b	Rotation
+	+	R rotation
+	–	LR rotation
–	+	RL rotation
–	–	L rotation

AVL - výška stromu

- Pro AVL strom S obsahující *n* uzlů platí:
- Výška (hloubka) stromu *h(S)* je maximálně o 45% větší ve srovnání s ideálně vyváženým stromem.

- $\log_2(n+1) \leq h(S) \leq 1.4404 \log_2(n+2)-0.328$ **[Hudec96], [Honzík85]**

Váhově vyvážené stromy

(stromy s ohraničeným vyvážením)

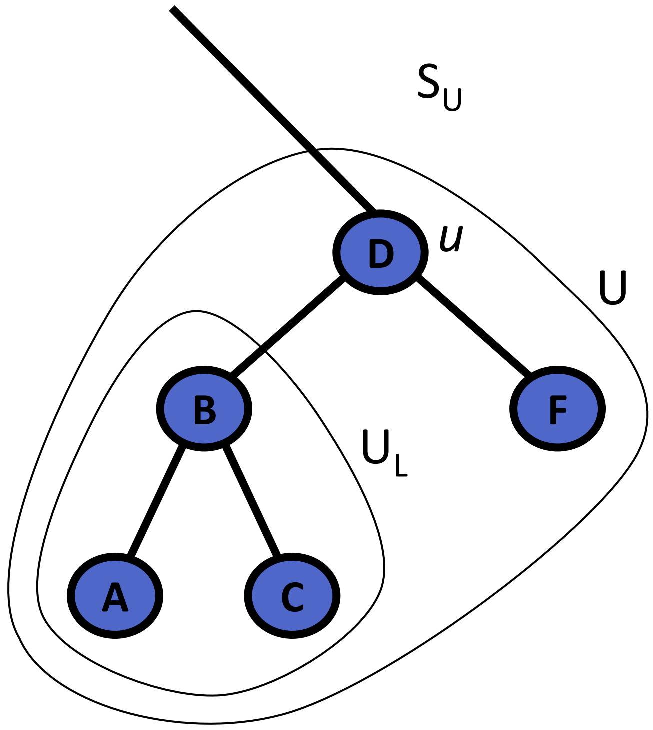
Váha $v(u)$ uzlu u ve stromě S:

- $v(u) = 1/2$, když je u listem
- $v(u) = (|U_L| + 1) / (|U| + 1)$,

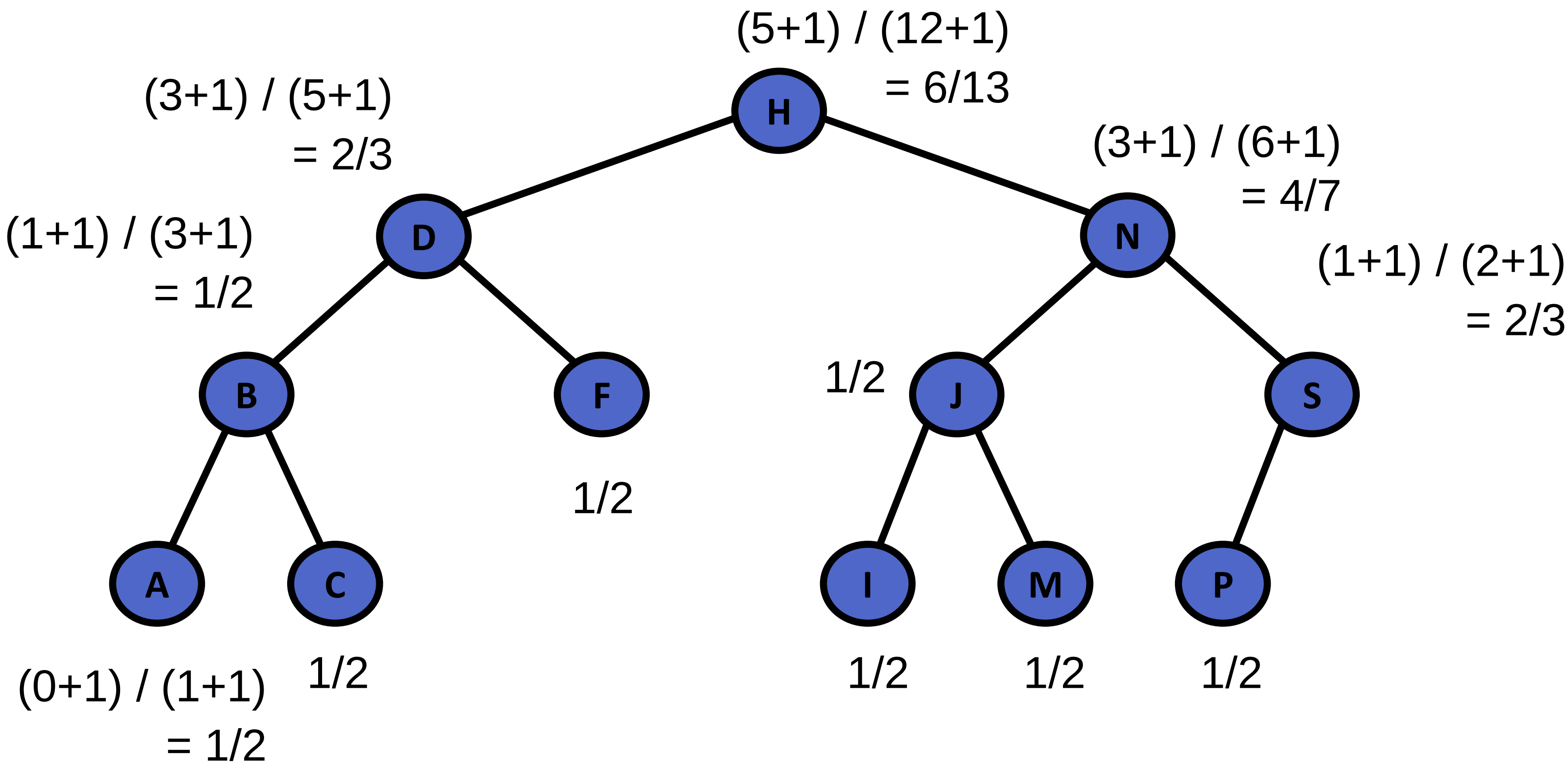
  když u je kořen podstromu $S_U \subseteq S$

  U_L = množina uzlů levého podstromu v podstromu S_U

  U = množina uzlů podstromu S_U



Příklad váhově vyváženého stromu



Strom s ohraničeným vyvážením α

Strom S má <u>ohraničené vyvážení</u> α, $0 \leq \boldsymbol{\alpha} \leq 0{,}5$, jestliže pro všechny uzly S platí:

$$\boldsymbol{\alpha} \leq v(u) \leq 1 - \boldsymbol{\alpha}$$

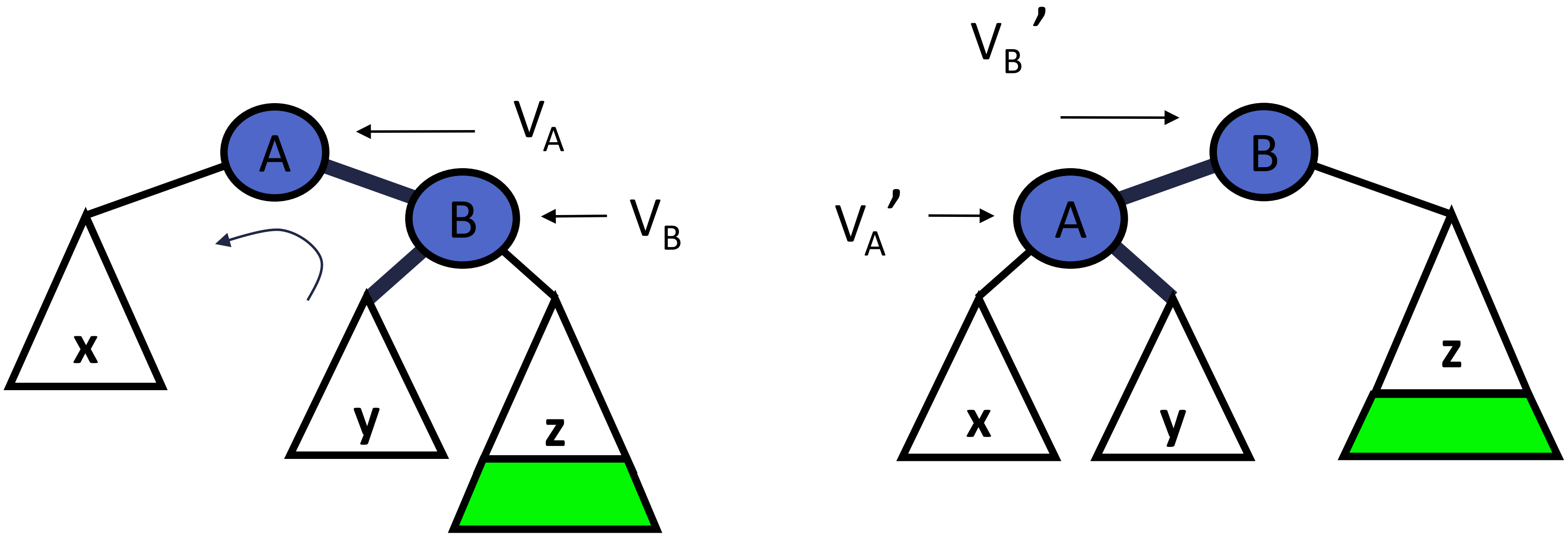
Výška (hloubka) h(S) stromu S s ohraničeným vyvážením α:

$$h(S) \leq (1 + \log_2(n+1) - 1) / \log_2 (1 / (1 - \alpha))$$

Výška ideálně vyváženého stromu

[Hudec96], [Mehlhorn84]

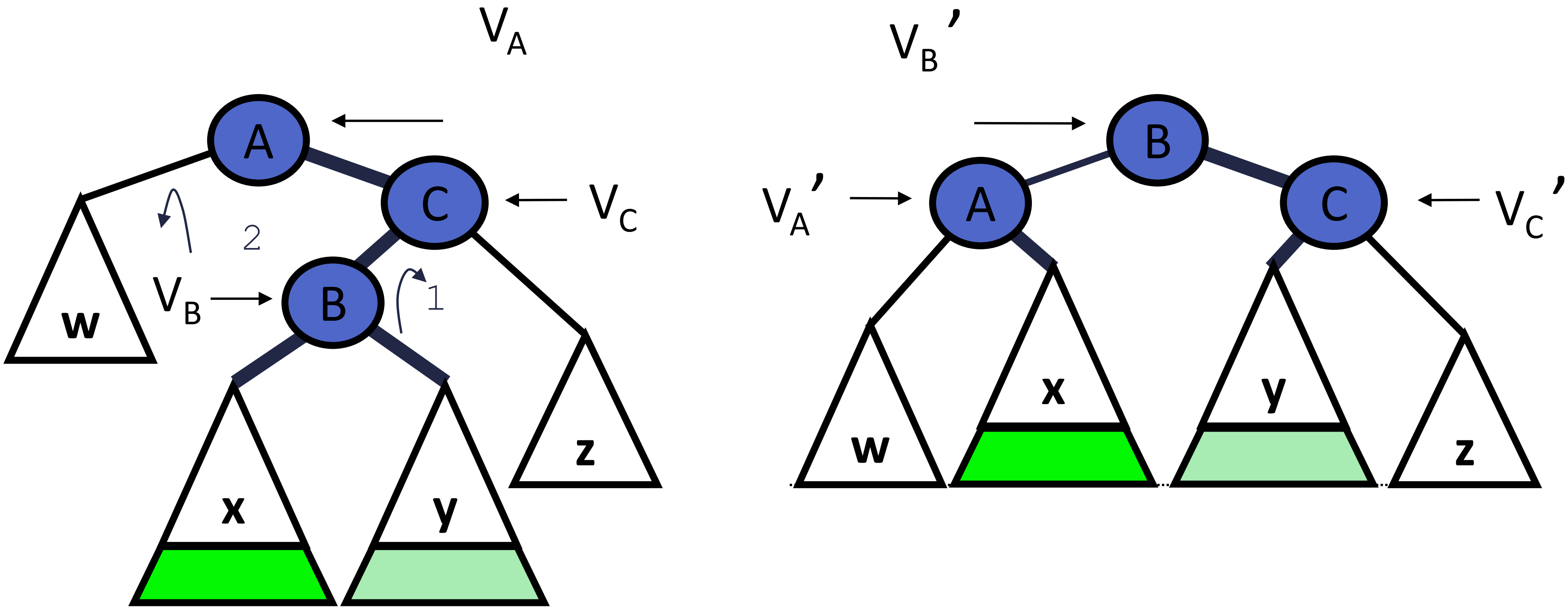
L rotation (Left rotation)



$$V_A' = V_A / (V_A + (1- V_A) . V_B)$$

$$V_B' = V_A + (1- V_A) . V_B$$

RL rotation (Right-Left rotation)



$V_A' = V_A / (V_A + (1- V_A) V_B V_C)$

$V_B' = V_B (1- V_C) / (1- V_B V_C)$

$V_C' = V_A + (1- V_A) . V_A V_B$

[Hudec96]

The End