1.test DSA 31.3.2017

1. Příklad na indukci

Dokažte matematickou indukcí, že pro n, která jsou přesně mocninou 2, řešením následující rovnosti:

$T(n) = 2$ pro $n = 2$
$T(n) = 2T(n/2) + n$ pro $n = 2^k$, kde $k > 1$

je: $T(n) = n \lg n$.

Řešení:
Počáteční krok: $n = 2$, a platí $T(n) = 2$. Mimochodem platí i: $n \lg n = 2 \lg 2 = 2 * 1 = 2$.
Indukční krok: předpokládáme platnost pro $n = 2^k$, kde $k > 1$, a dokazujeme platnost pro $n = 2^{k+1}$.
Předpoklad vyjádříme: $T(n) = n \lg n = T(2^k) = 2\, T(2^k/2) + 2^k = 2\, T(2^{k-1}) + 2^k = 2^k \lg 2^k$.
a dokazujeme pro $n = 2^{k+1}$: $T(n) = T(2^{k+1}) = 2T(n/2) + n = 2T(2^{k+1}/2) + 2^{k+1} = 2T(2^k) + 2^{k+1} = 2(2\, T(2^{k-1}) + 2^k) + 2^{k+1} = 2(2^k \lg 2^k) + 2^{k+1} = 2^{k+1} \lg 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} (\lg 2^k + 1) = 2^{k+1} (\lg 2^k + \lg 2) = 2^{k+1} (\lg 2^{k+1}) = n \lg n$.

2. Příklad na asymptotickou složitost

Dokažte, že pro libovolné reálné konstanty a, b, kde $b > 0$, platí: $(n + a)^b = \Theta(n^b)$.

Řešení:
Abychom dokázali $(n + a)^b = \Theta(n^b)$, musíme najít c_1, c_2 a n_0 takové, že $0 \leq c_1 n^b \leq (n + a)^b \leq c_2 n^b$ pro $n \geq n_0$.
Pro $n \geq |a|$ platí: $n + a \leq n + |a| \leq 2n$.
Pro $n/2 \geq |a|$ platí: $n + a \geq n - |a| \geq n/2$.
Pro $n \geq 2|a|$ platí: $0 \leq n/2 \leq n + a \leq 2n$.
Protože b>0, platí totéž i po umocnění na b:

$0^b \leq (n/2)^b \leq (n + a)^b \leq (2n)^b$
$0 \leq (1/2)^b n^b \leq (n + a)^b \leq 2^b n^b$

Zvolíme-li $c_1 = (1/2)^b$, $c_2 = 2^b$ a $n_0 = 2|a|$, pak $0 \leq c_1 n^b \leq (n + a)^b \leq c_2 n^b$ platí.

3. Příklad na čtení kódu

Do následujícího kódu doplňte chybějící konstantu v podmínce tak, aby byla procedura **xyz()** volána právě 2100 krát.

```
for (i=0; i < 70; i++) {
   j = 0;
   do {
     if (j > ___ ) xyz();
     j++;
   } while (j < 90);
 }
```

Řešení: Vnější cyklus probíhá od 0 do 69, celkem 70 krát. Musíme proto zajistit, aby ve vnitřním cyklu byla procedura **xyz()** volána právě 2100/70 = 30 krát. Ve vnitřním cyklu prochází index j hodnotami od 0 do 89 (tj. 90 krát). Aby se xyz() volala 30 krát docílíme tak, že se bude volat pro hodnoty řídící proměnné j: 60, 61, ..., 88, 89. Chybějící konstanta je tedy 59.

4. Příklad na rekurzi

Napište rekurzivní funkci **f122**, která pro zadané číslo N vypíše řetězec skládající se z N jedniček následovaných 2*N dvojkami. Např. pro N = 3 vypíše 111222222.

Řešení:

```
void f122 (int n) {
	if (n <= 0) return;
	printf("1");
	f112(n-1);
	printf("22");
}
```

5. Příklad na asymptotickou složitost

Zjistěte asymptotickou složitost:

$T(1) = 1$
$T(n) = 2T(n/2) + n^3$

mistrovskou metodou (pomocí Master teorému). Pečlivě zkontrolujte a zapište všechny předpoklady věty!

Řešení:

Abychom mohli použít master teorém, položíme a=2, b=2 a musíme porovnat $n^{\log b\ a} = n^{\log 2\ 2} = n$ a $f(n) = n^3$. Evidentně neplatí podmínky pro prvé dva případy mistrovské věty, tj, $f(n) \neq O(n^{\log b\ (a)\ -e})$ pro nějakou konstantu $e > 0$. Ani neplatí $f(n) = \Theta(n^{\log b\ (a)}) = \Theta(n^2)$. Naopak zřejmě $f(n) = n^3 = \Omega(n^{\lg 2+e})$, kde $e = 2$ ($e > 0$), tj. $\Omega(n^3)$. Mohla by tedy připadat v úvahu třetí varianta mistrovské věty, ale musí ještě platit $2 \cdot f(n/2) \leq c \cdot f(n)$ pro dostatečně veliká n. Tj. $2 \cdot (n/2)^3 = n^3/2 \leq c \cdot n^3$ a to platí např. pro c=1/2. Platí tedy třetí možnost mistrovského teorému a $T(n) = \Theta(n^3)$.