Křivky a plochy II

Petr Felkel

Katedra počítačové grafiky a interakce, ČVUT FEL
místnost KN:E-413 na Karlově náměstí
E-mail: felkel@fel.cvut.cz

S použitím materiálů Bohuslava Hudce, Jaroslava Sloupa a úprav Vlastimila Havrana

Poslední změna: 3.5.2016

Křivky a plochy II

- Křivky složené z oblouků (B-spline křivky)
  a) Uniformní kubický B-spline (Coonsův)
  b) Neuniformní kubický B-spline
     (Uzlový vektor a konstrukce bázových funkcí)
  c) Neuniformní kubický racionální B-spline (NURBS)
- NURBS plochy

Spline

Spline

= „dlouhý proužek dřeva nebo kovu“ [Lingea Lexicon 02], křivítko hladce se ohýbá (se spojitou druhou derivací)

= obecněji libovolná polynomiální křivka

Spline třídy C^n

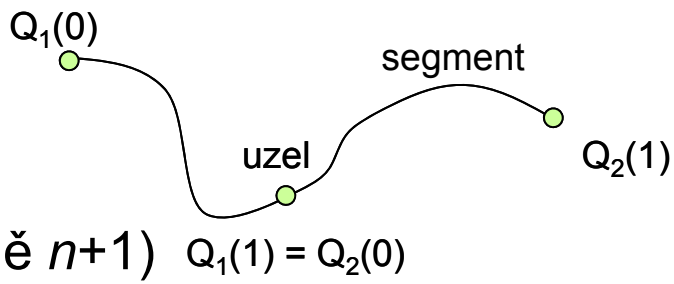
= křivka, která simuluje chování křivítka

skládá se ze segmentů

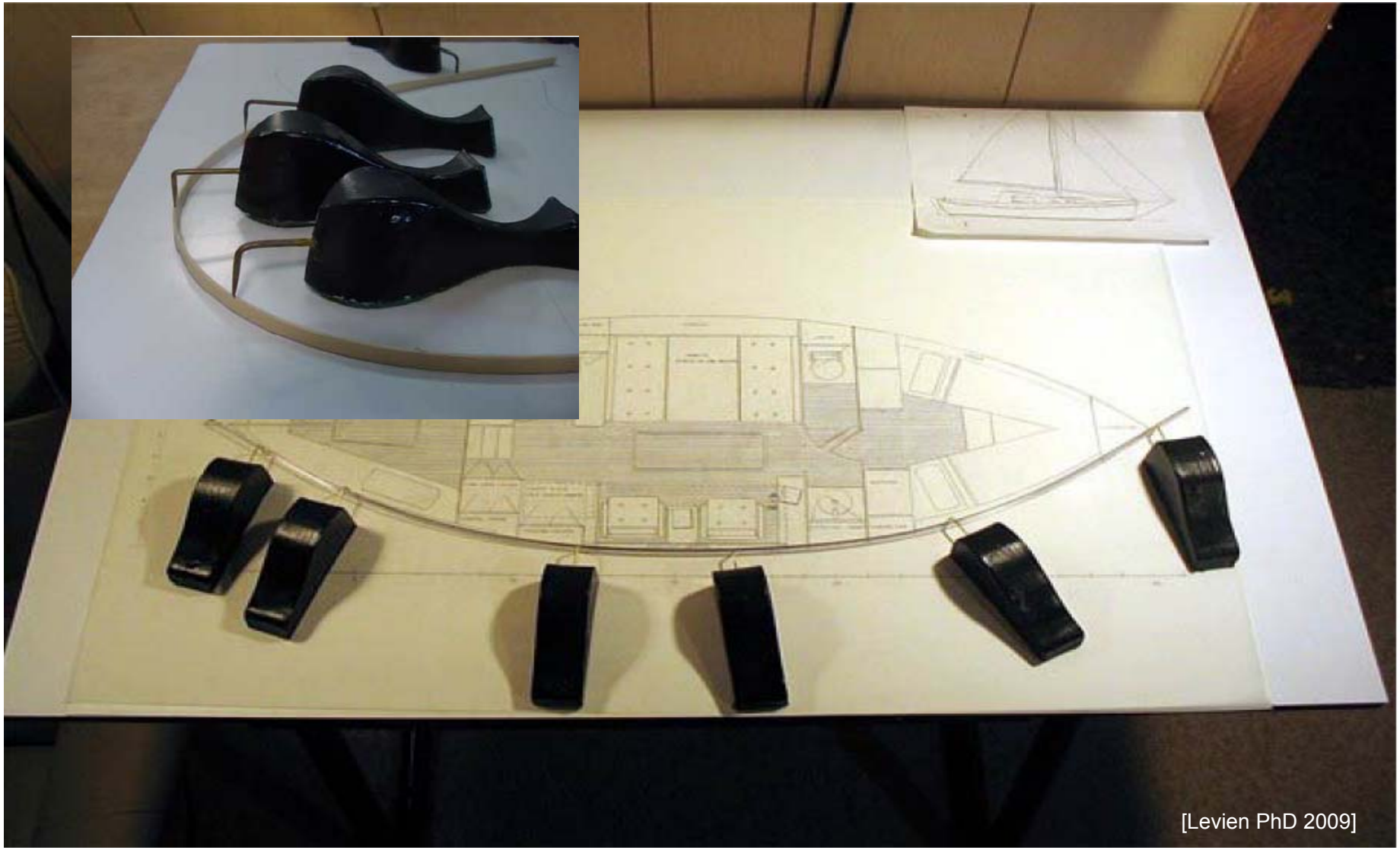
segmenty jsou polynomiální křivky (stupně n+1)

segmenty i napojení segmentů (uzly, *knots*) mají C^n spojitost,

tj. mají spojité 0, 1, …, *n-té* derivace



Spline



Spline – nejčastěji kubiky

V grafice se nejčastěji používají spline křivky třídy C^2

- jsou dostatečně hladké (parametrická spojitost $\mathbf{C^2}$)
- zvládnou S-tvar
- lze je „upočítat“
  (*stupeň křivky n* = 3 (kubiky) => *řád aproximace k* = 4 – viz dále)

- Největší problém: NOTACE

  (každý pramen trochu jinak)

Spline a B-spline

spline

- oblouky, které procházejí opěrnými body => **interpolační křivka**
- řešení soustav rovnic
- změna polohy bodu ovlivní celou křivku (*global control*)

B-spline (B = basis)

- neprochází zadanými body => **aproximační křivka**
- dosazení řídících bodů do vzorce
  (mísí se v poměru daném bázovými funkcemi)
- změna polohy bodu ovlivní jen malé okolí bodu (*local control*)

Spline - miniosnova

B-spline křivky

- uniformní B-spline
- neuniformní B-spline
- racionální neuniformní B-spline (NURBS)

Notace

n … je stupeň polynomu křivky (např. $n = 3$ -> kubiky)

k … je řád křivky $(\mathrm{k} = \mathrm{n} + 1)$ = počet bodů definujících jeden oblouk

m … maximální index řídícího bodu (pro jeden oblouk je $m = n$)

$m + 1$ … počet řídících bodů $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\mathrm{m})$, $m \geq n$

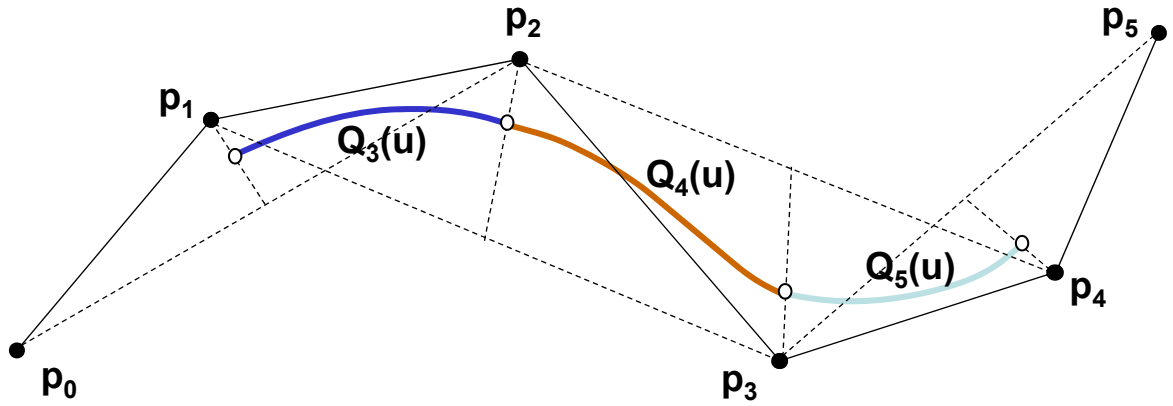
u, t … parametr

a) Uniformní kubický B-spline

Uniformní kubický B-spline

Uniformní kubický B-spline (Coonsův kubický B-spline)

vznikne navázáním Coonsových kubických křivek



$n = 3$
$k = 4$
$m = 5$
$u \in \langle 3,6 \rangle$

Oblouk Q_3 určen body P_0, P_1, P_2, P_3 násobenými bázemi C_0 C_1 C_2 C_3

Oblouk Q_4 určen body P_1, P_2, P_3, P_4 násobenými bázemi C_1 C_2 C_3 C_4

Oblouk Q_5 určen body P_2, P_3, P_4, P_5 násobenými bázemi C_2 C_3 C_4 C_5

Uniformní kubický B-spline

Coonsova kubika – jeden segment samostatně

Řídicí body p_j, $j = 0, 1, 2, 3$

$$Q(u) = \sum_{j=0}^{3} p_j \cdot C_j(u), \quad u \in 0..1,$$

$C_0(u) = 1/6\ (1 - u)^3$,

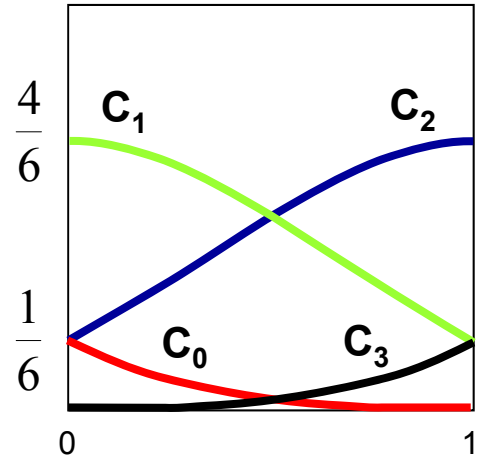
$C_1(u) = 1/6\ (3u^3 - 6u^2 + 4)$,

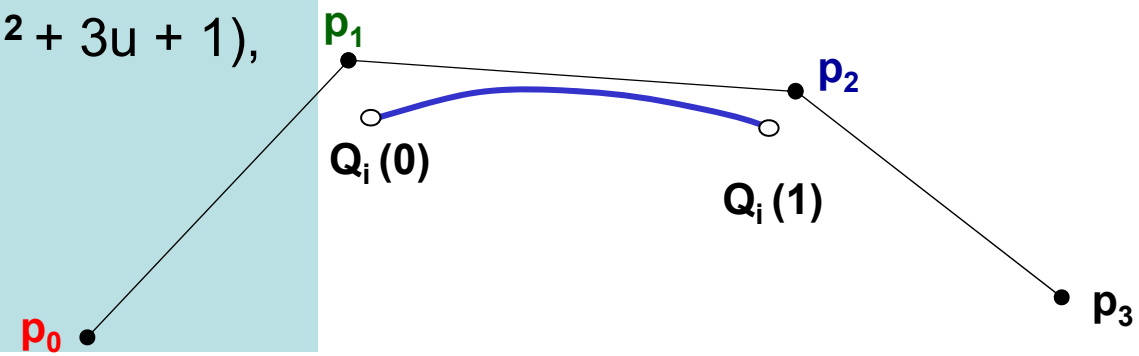
$C_2(u) = 1/6\ (-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)$,

$C_3(u) = 1/6\ u^3$,

$0 \le u \le 1$

(Pro složky *x*, *y* a *z*)





Uniformní kubický B-spline

Coonsova kubika – jeden *i*-tý segment jako část B-spline křivky

$i = 3,4,\ldots,m$

Řídicí body p_k, $k = i-3+j$, $j = 0, 1, 2, 3$

$$Q_i(u) = \sum_{j=0}^{3} p_{i-3+j} \cdot C_{i-3+j}(u), \quad u \in 0..1,$$

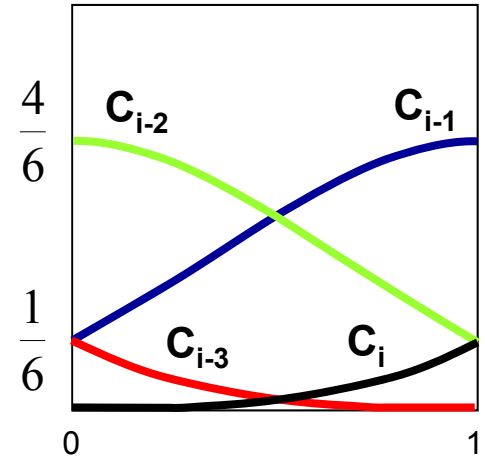
$C_{i-3}(u) = 1/6\,(1 - u)^3,$

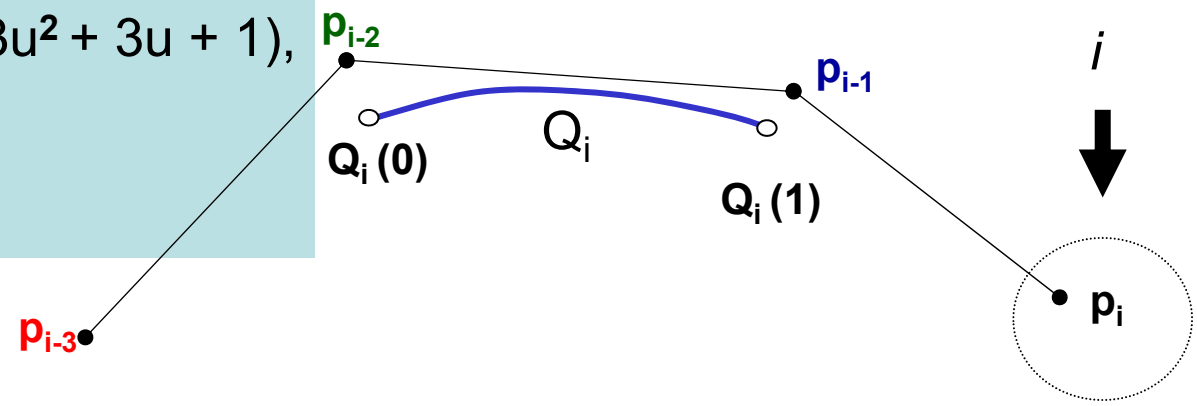
$C_{i-2}(u) = 1/6\,(3u^3 - 6u^2 + 4),$

$C_{i-1}(u) = 1/6\,(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1),$

$C_i(u) = 1/6\,u^3,$

$0 \le u \le 1$





kde Q_i je segment B-spline kubiky

P_i je řídící bod

C_i je bázová funkce (vliv bodu P_i)

Uniformní kubický B-spline

Coonsova kubika – *i*-tý segment jako část B-spline křivky **maticově**

$$Q_i(u) = \sum_{j=0}^{3} p_{i-3+j} \cdot C_{i-3+j}(u), \quad u \in 0..1,$$

$C_{i-3}(u) = 1/6(1-u)^3 = 1/6(-u^3+3u^2-3u+1)$

$C_{i-2}(u) = 1/6\,(3u^3 - 6u^2 + 4),$

$C_{i-1}(u) = 1/6\,(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1),$

$C_i(u) = 1/6\,u^3,$

$0 \le u \le 1$

$$Q_i(u) = [u^3 \quad u^2 \quad u^1 \quad 1]\,\frac{1}{6}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_{i-3} & C_{i-2} & C_{i-1} & C_i \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} P_{i-3}^t \\ P_{i-2}^t \\ P_{i-1}^t \\ P_i^t \end{bmatrix}$$

C - po sloupcích

$$\mathbf{u}(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u^1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_{i-3}^t \\ P_{i-2}^t \\ P_{i-1}^t \\ P_i^t \end{bmatrix}$$

$$P_i^t = [x \quad y \quad z]_i$$

Maticově

$$\boxed{Q_i(u) = \mathbf{u}^T \mathbf{C}\,\mathbf{p}}$$

Uniformní kubický B-spline

Coonsova kubika – *i*-tý segment jako část B-spline křivky **maticově**

$$Q_i(u) = \mathbf{u}^T \mathbf{C}\,\mathbf{p}$$

Varianty zápisu **u** – dvě různá pořadí řádek matice

Varianta a)

$$Q_i(u) = [u^3 \quad u^2 \quad u^1 \quad 1]\,\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{i-3}^t \\ P_{i-2}^t \\ P_{i-1}^t \\ P_i^t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}(u) = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

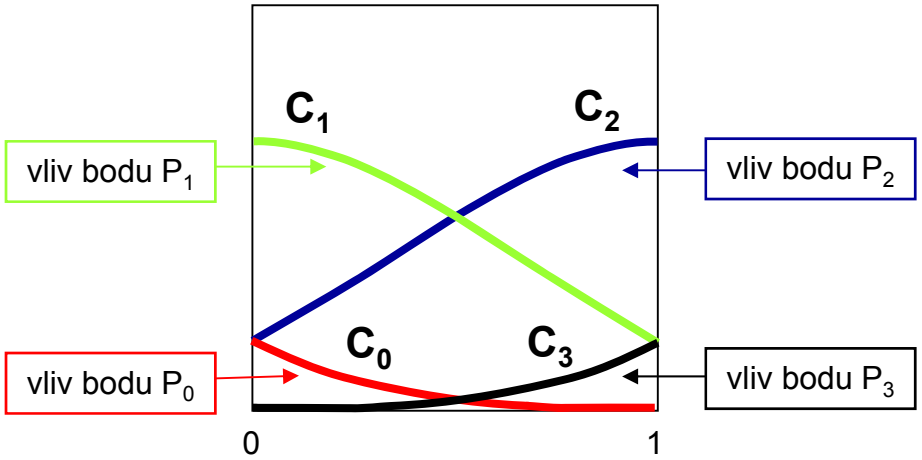
Varianta b)

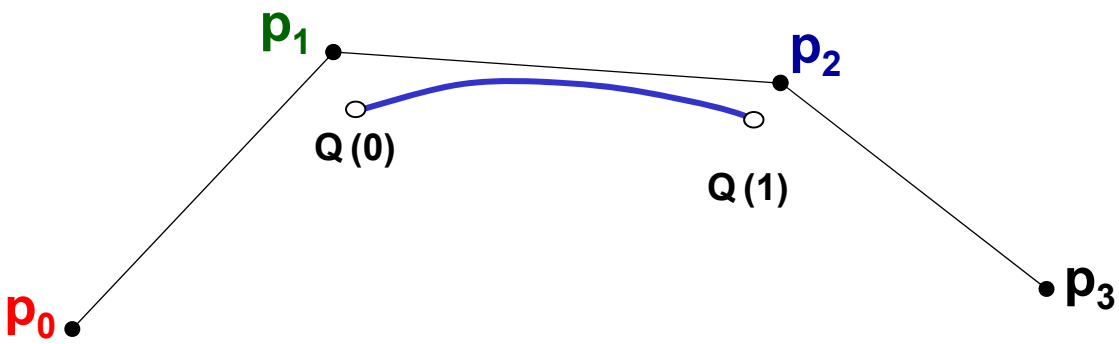
$$Q_i(u) = [1 \quad u^1 \quad u^2 \quad u^3]\,\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{i-3}^t \\ P_{i-2}^t \\ P_{i-1}^t \\ P_i^t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}(u) = \begin{bmatrix} 1 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$$

C - po sloupcích

Uniformní kubický B-spline

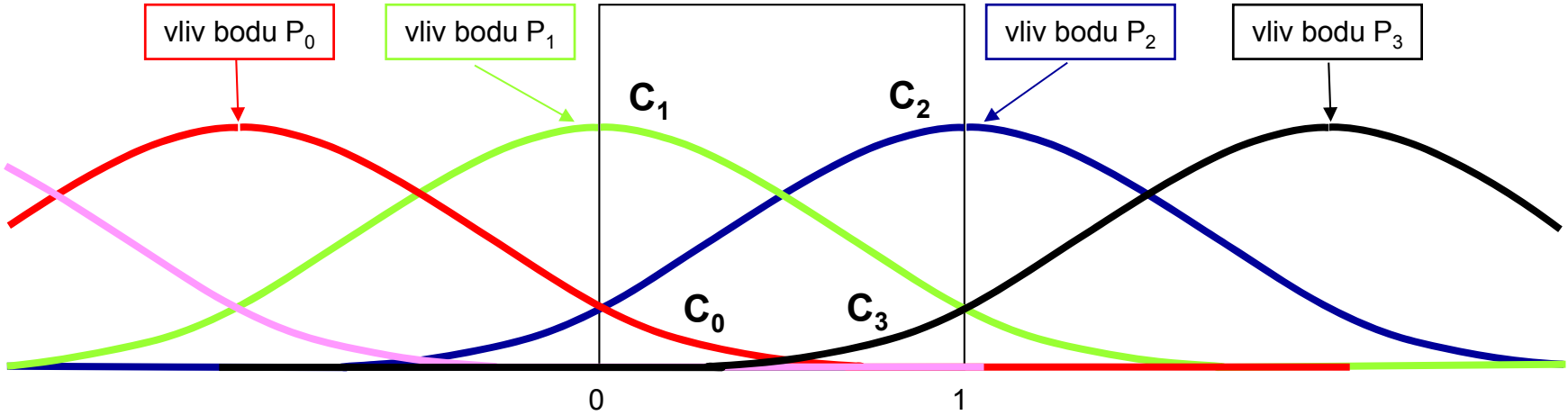
Coonsova kubika – bázové funkce v jednom intervalu

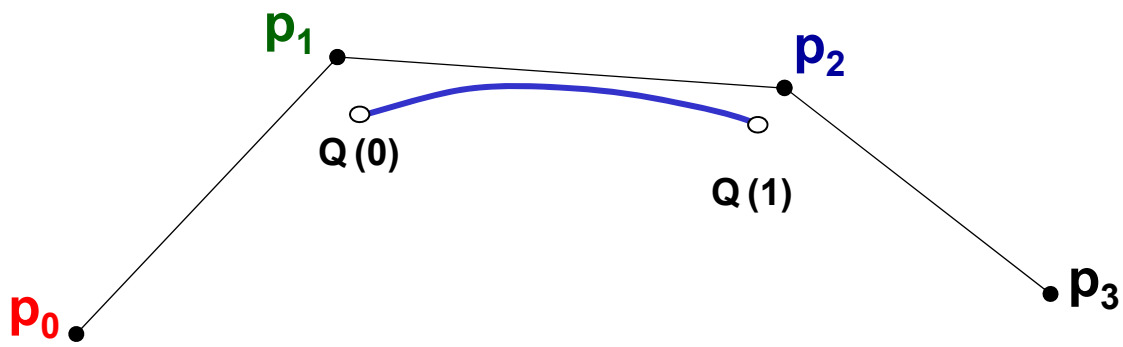




Uniformní kubický B-spline

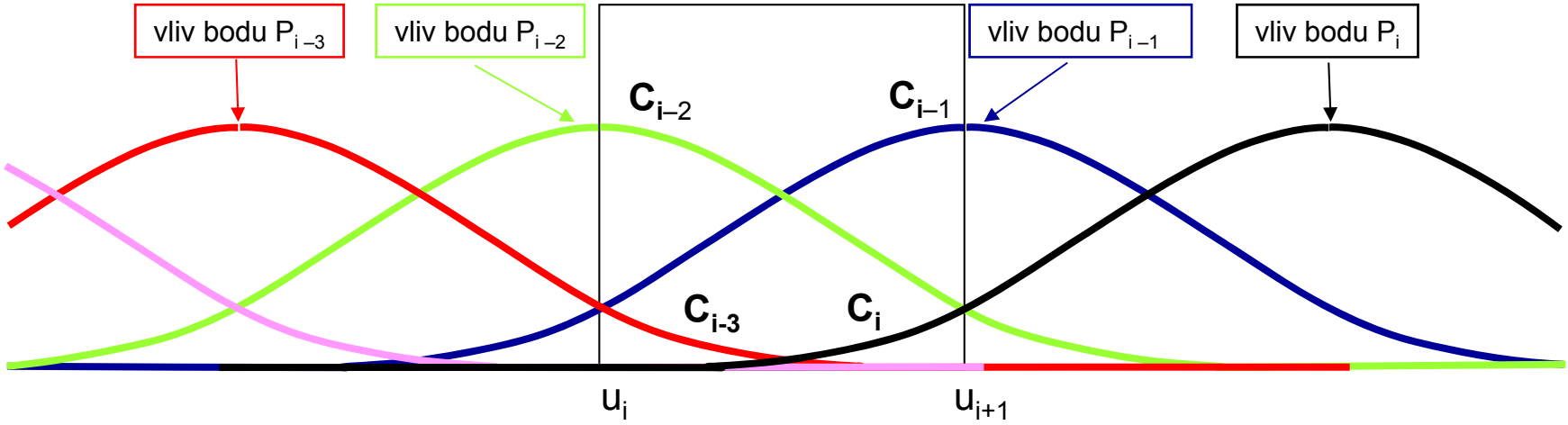
Coonsův kubický B-spline – bázové funkce z pohledu vlivu bodů

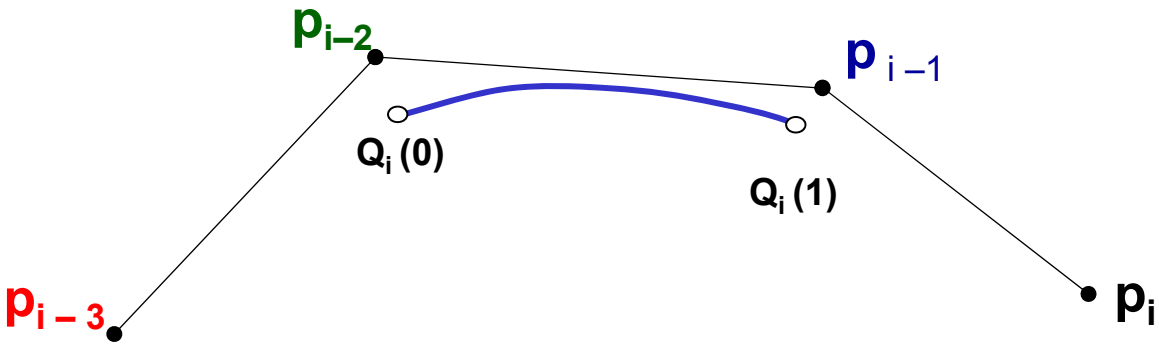




Uniformní kubický B-spline

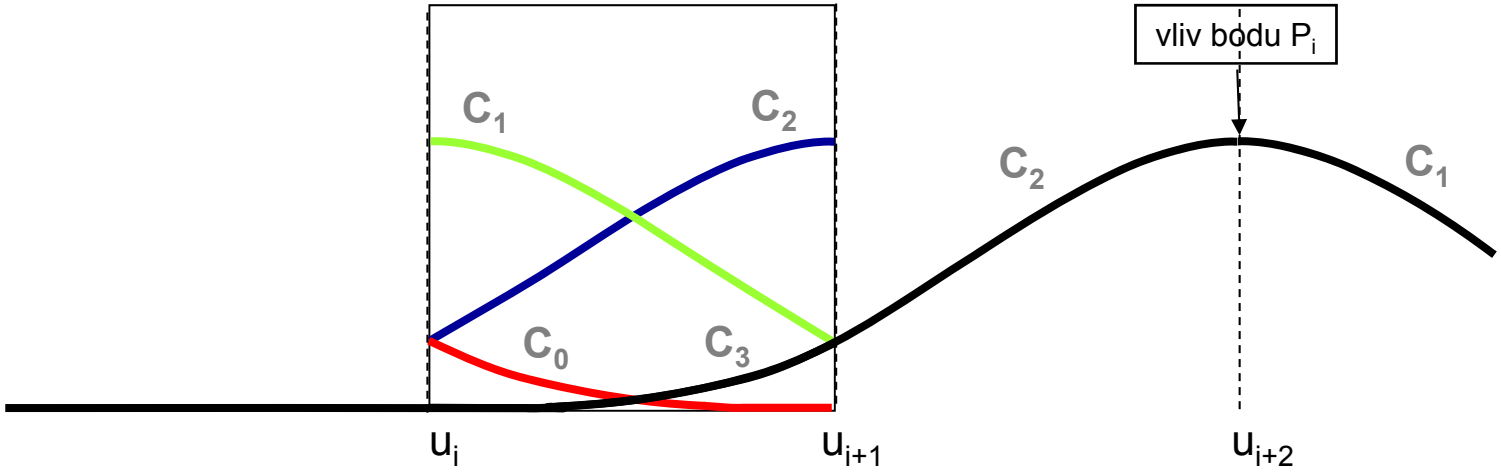
Coonsův kubický B-spline – bázové funkce z pohledu vlivu bodů





Uniformní kubický B-spline

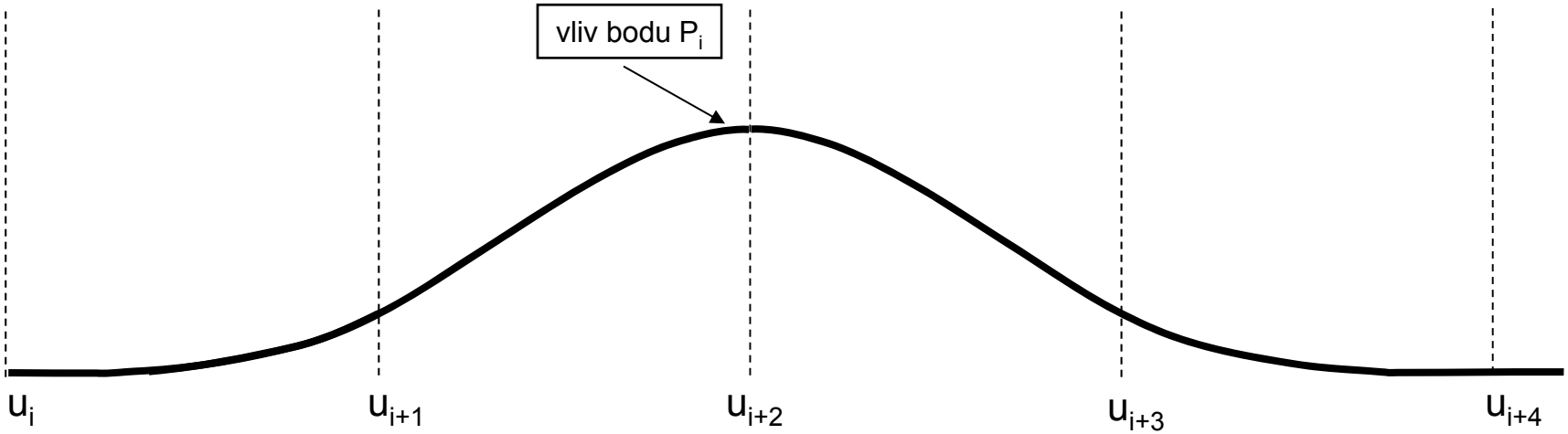
Coonsův kubický B-spline – bázová funkce – vliv jednoho bodu



Bod má vliv na dva intervaly nalevo a dva napravo
(dál už ne, dál je vliv 0)

Uniformní kubický B-spline

Coonsův kubický B-spline – bázové funkce – vliv jednoho bodu

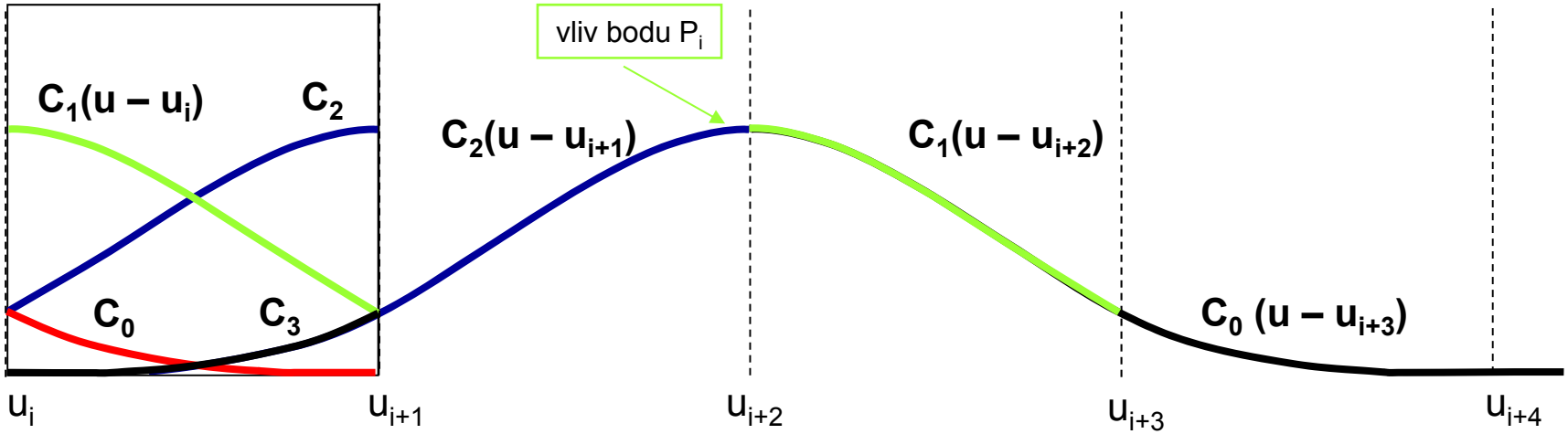


Bod má vliv na dva intervaly nalevo a dva napravo
(stupeň křivky je *n*=3, řád je *k*=4 a to je počet ovlivněných intervalů)

Obecně ovlivní k intervalů, $\frac{k}{2}$ nalevo i napravo

Uniformní kubický B-spline

Coonsův kubický B-spline – bázové funkce z pohledu bodu

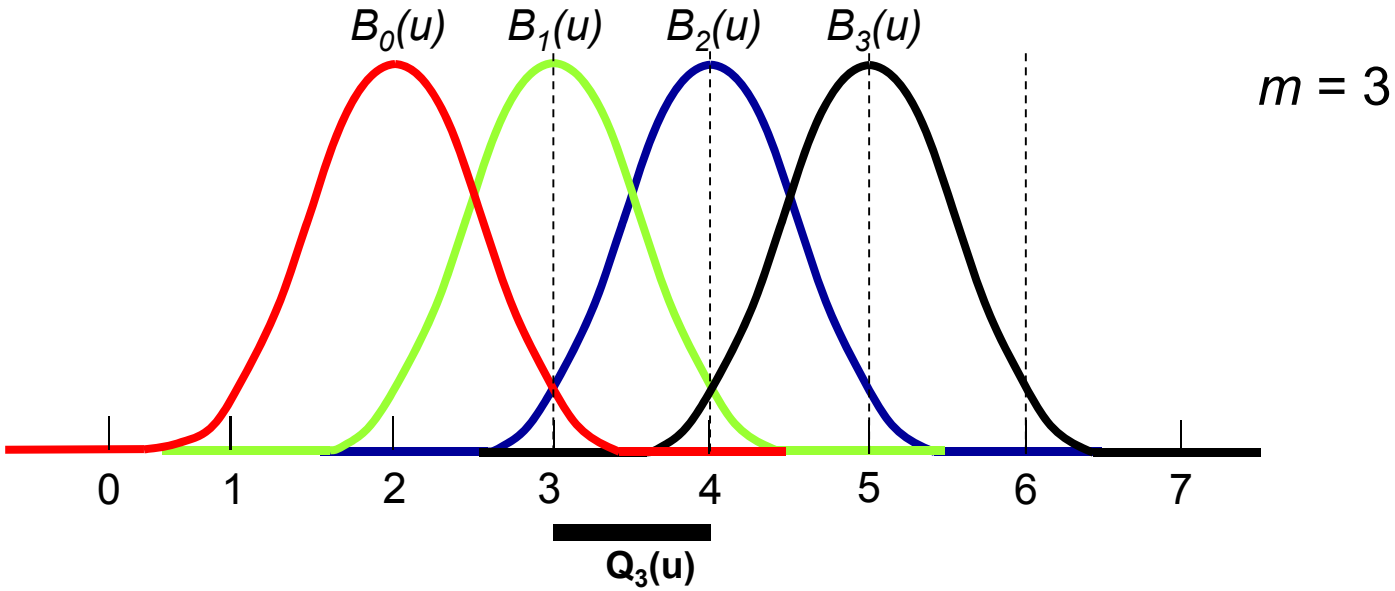


Bod má vliv na dva intervaly nalevo a dva napravo

- Vektor hodnot u_i tvoří uzlový vektor
- Pro uniformní B-spline se krok parametru $(u_{i+1} - u_i)$ rovná konstantě, typicky 1

Uniformní kubický B-spline – jeden oblouk

Bázové funkce pro kubický B-spline (*k*=4) a uzlový vektor



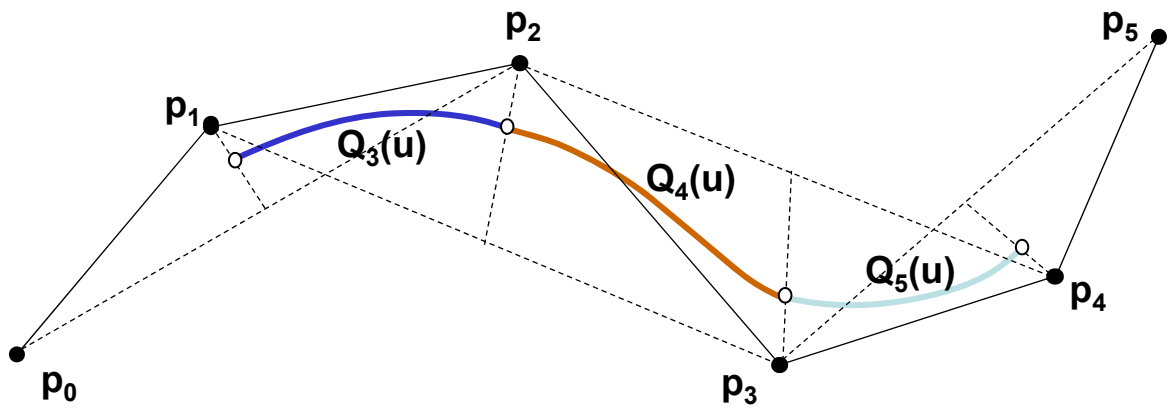
Na nakreslení jednoho oblouku v intervalu 3-4 potřebujeme

- 4 řídící body + 4 bázové funkce
- Na definici 4 bázových funkcí potřebujeme „navíc“ 3 intervaly nalevo a 3 intervaly napravo - 3+1+3=7 intervalů, ty mají 8 konců = počet ř.bodů + řád *k*
- Proto má uzlový vektor na obou koncích intervaly „navíc“

Uzlový vektor [0,1,2,3,4,5,6,7] - délka 4+4=8, kreslí se od u_{k-1} do u_{m+1}, tj. od 3 do 4

Uniformní kubický B-spline

Uniformní kubický B-spline (Coonsův kubický B-spline)

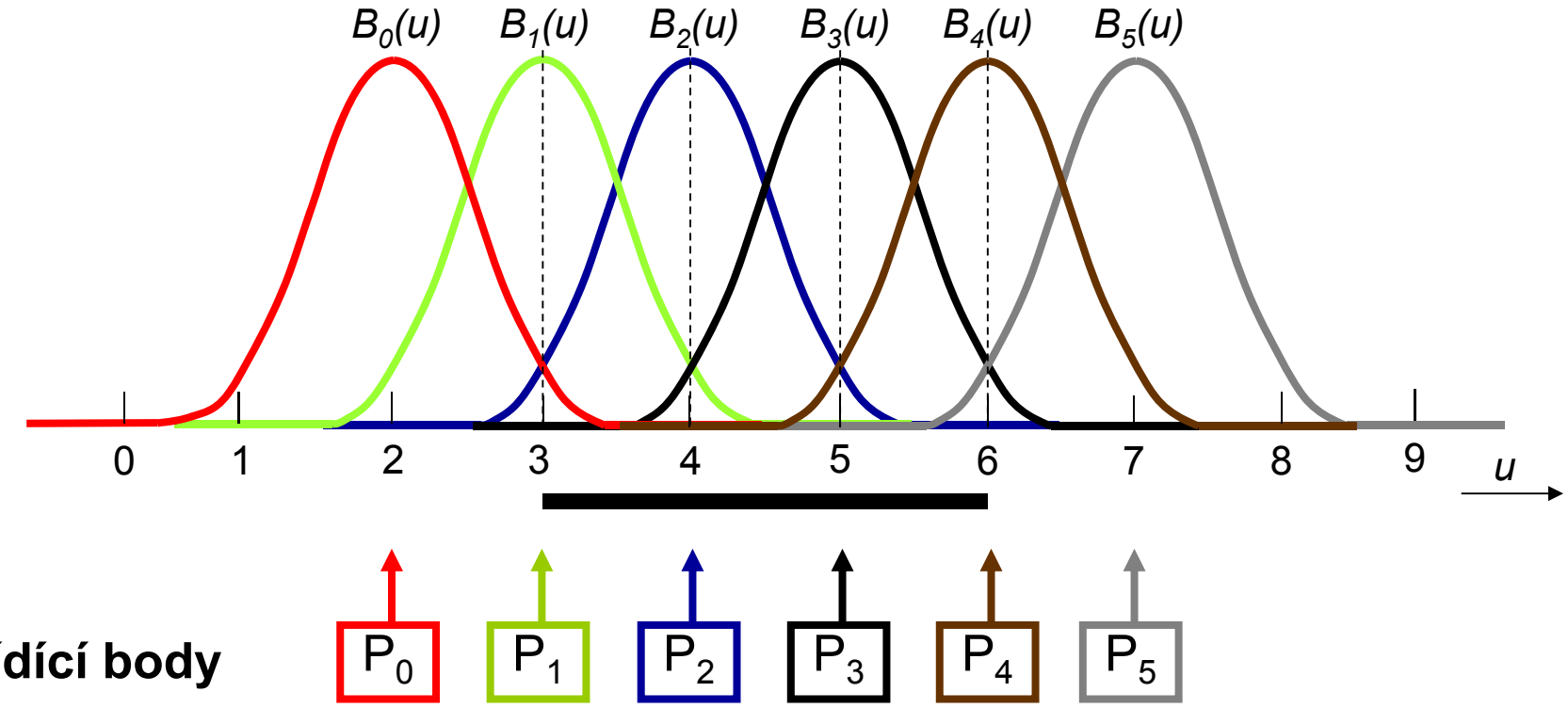


$P_0, P_1, \ldots, P_m$	Řídící body, *m je* maximální index
$m + 1$	Počet řídících bodů = počet použitých bází $B_i(u)$
$m - 2$	Počet segmentů B-spline křivky (oblouků)
$m + 5$	počet uzlů v uzlovém vektoru (počet bodů + řád $k = m+1+4$)
$k = 4$	je řád křivky (kubika, stupeň n=3, řád $k = n+1 = 4$)

Př. body $P_0, P_1, \ldots, P_5$, m=5, 6 řídících bodů, 3 segmenty, 10 uzlů

Uniformní kubický B-spline

Bázové funkce pro kubický B-spline (*k*=4) a uzlový vektor



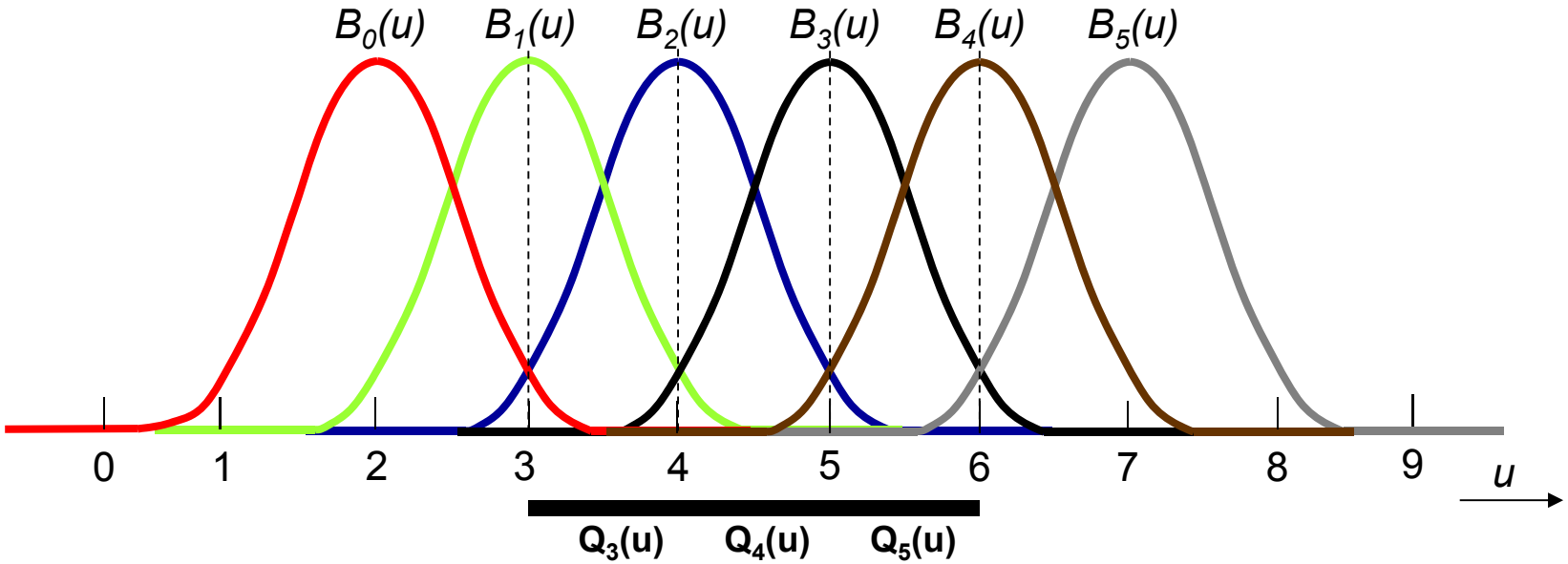
Řídící body

Uzlový vektor [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]

- rozsah parametru *u* pro definici bázových funkcí (viz dále)

Uniformní kubický B-spline

Bázové funkce pro kubický B-spline (*k*=4) a uzlový vektor



Rozsah parametru vykreslené křivky (3 oblouky)

6 bodů na 3 segmenty => 6 bázových funkcí (jedna 6x posunutá)

Uzlový vektor [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9] délky 6+4 = 10 (krok =1 => uniformní)

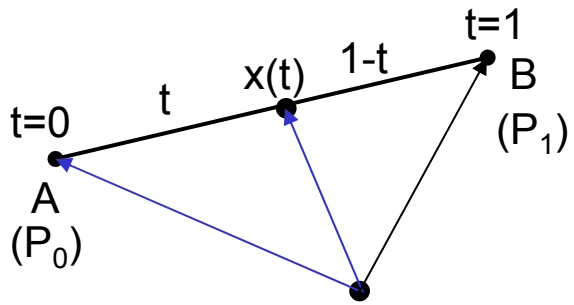
- Použije se na definici bázových funkcí (6 fcí, 10 uzlů) - viz dále
- "Kreslí se od u_{k-1} do u_{m+1}", tj. od 3 do 6

Konstrukce bázových funkcí

Princip konstrukce bázových funkcí $f_i(t)$

- Lineární interpolace **bodů** A,B

  $x(t) = (1-t) \,.\, A + t \cdot B$

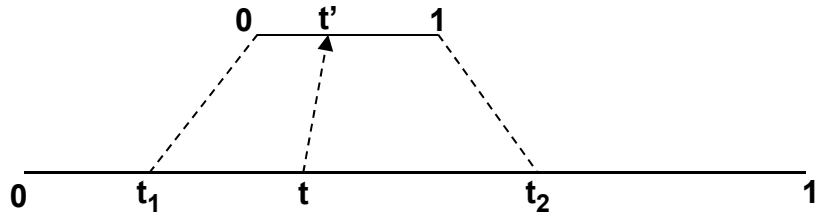


- Zobecnění lineární interpolace - *A, B* jsou **funkce** parametru *t*

  $f(t) = (1-t) \cdot f_0(t) + t \cdot f_1(t)$

Plus **reparametrizace** z rozsahu $t_1 \leq t \leq t_2$ do $0 \leq t' \leq 1$

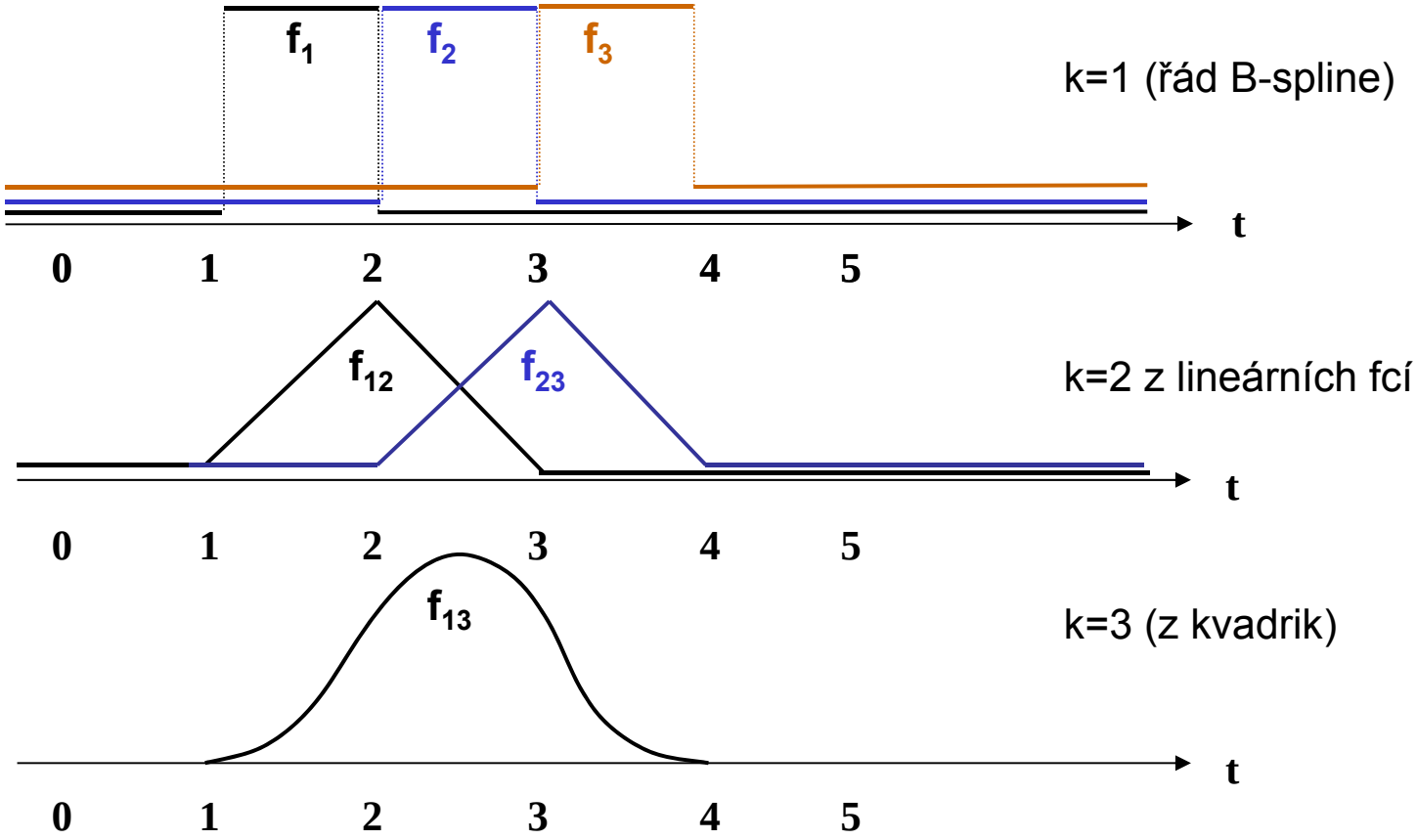
$$t' = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$



Konstrukce bázových funkcí

Konstrukce bázových (mísících) funkcí f_i (t) – dále je značíme $N_{i,k}$!!!

Obr. zjednodušen na ekvidistantní dělení intervalu parametru t



Neuniformní kubický B-spline

B-spline funkce (báze)

- **Uzlový vektor**

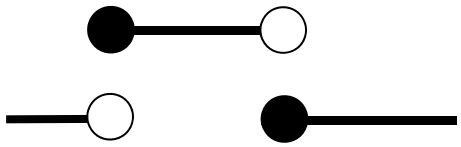
$$T = [t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k \ldots t_m, t_{m+1}, \ldots t_{m+k}]$$

$$t_i \leq t_{i+1} \text{ pro } i = 0, \ldots, m+k$$

- **B-spline funkce $N_{i,k}(t)$ řádu k – *algoritmus Cox – de Boor***

1. pro $k = 1$

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{pro ostatní } t \end{cases}$$



2. pro $k > 1$ Lineární interpolace bází s $k - 1$

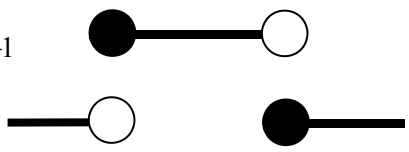
$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i)}{(t_{i+k-1} - t_i)} N_{i,k-1}(t) + \frac{(t_{i+k} - t)}{(t_{i+k} - t_{i+1})} N_{i+1,k-1}(t),$$

$$\text{kde } i = 0, 1, \ldots, m$$

Algoritmus Cox – de Boor

B-spline funkce $N_{i,k}(t)$ rozepsané do řádu k = 4

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_i \le t < t_{i+1} \\ 0 & \text{pro ostatní } t \end{cases}$$



$$N_{i,2}(t) = \frac{(t-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)} N_{i,1}(t) + \frac{(t_{i+2}-t)}{(t_{i+2}-t_{i+1})} N_{i+1,1}(t),$$

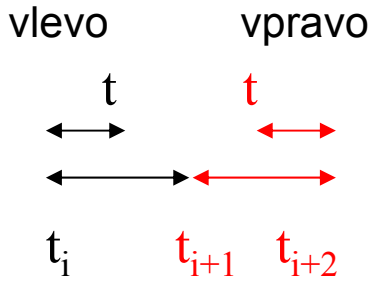
$$N_{i,3}(t) = \frac{(t-t_i)}{(t_{i+2}-t_i)} N_{i,2}(t) + \frac{(t_{i+3}-t)}{(t_{i+3}-t_{i+1})} N_{i+1,2}(t),$$

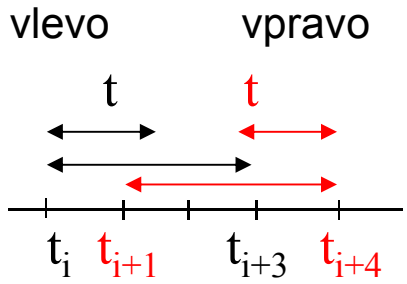
$$N_{i,4}(t) = \frac{(t-t_i)}{(t_{i+3}-t_i)} N_{i,3}(t) + \frac{(t_{i+4}-t)}{(t_{i+4}-t_{i+1})} N_{i+1,3}(t),$$

$$\text{kde } i = 0,1,\ldots,m$$

Definováno 0/0 = 0

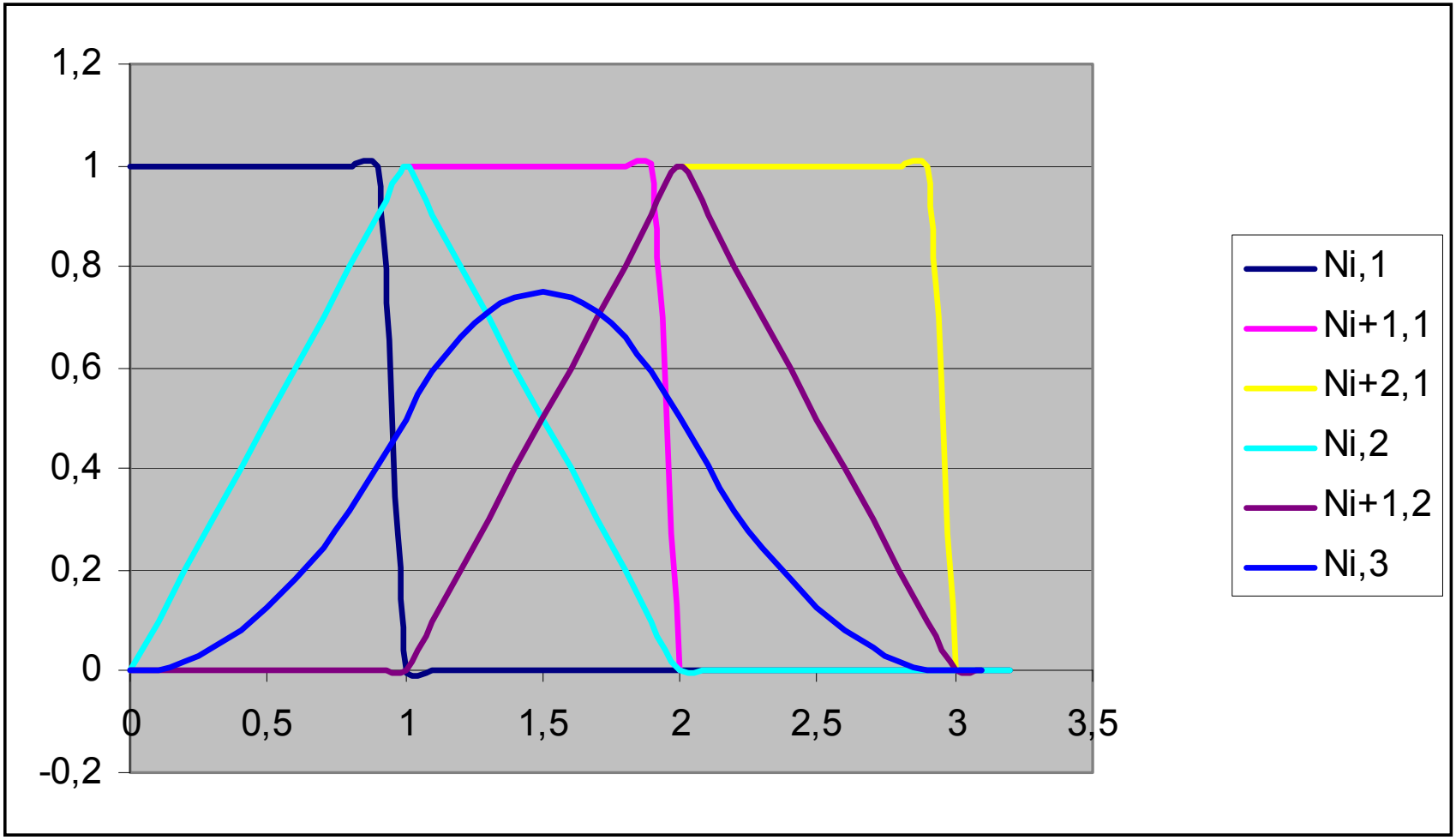
Lineární interpolace bází nižšího řádu



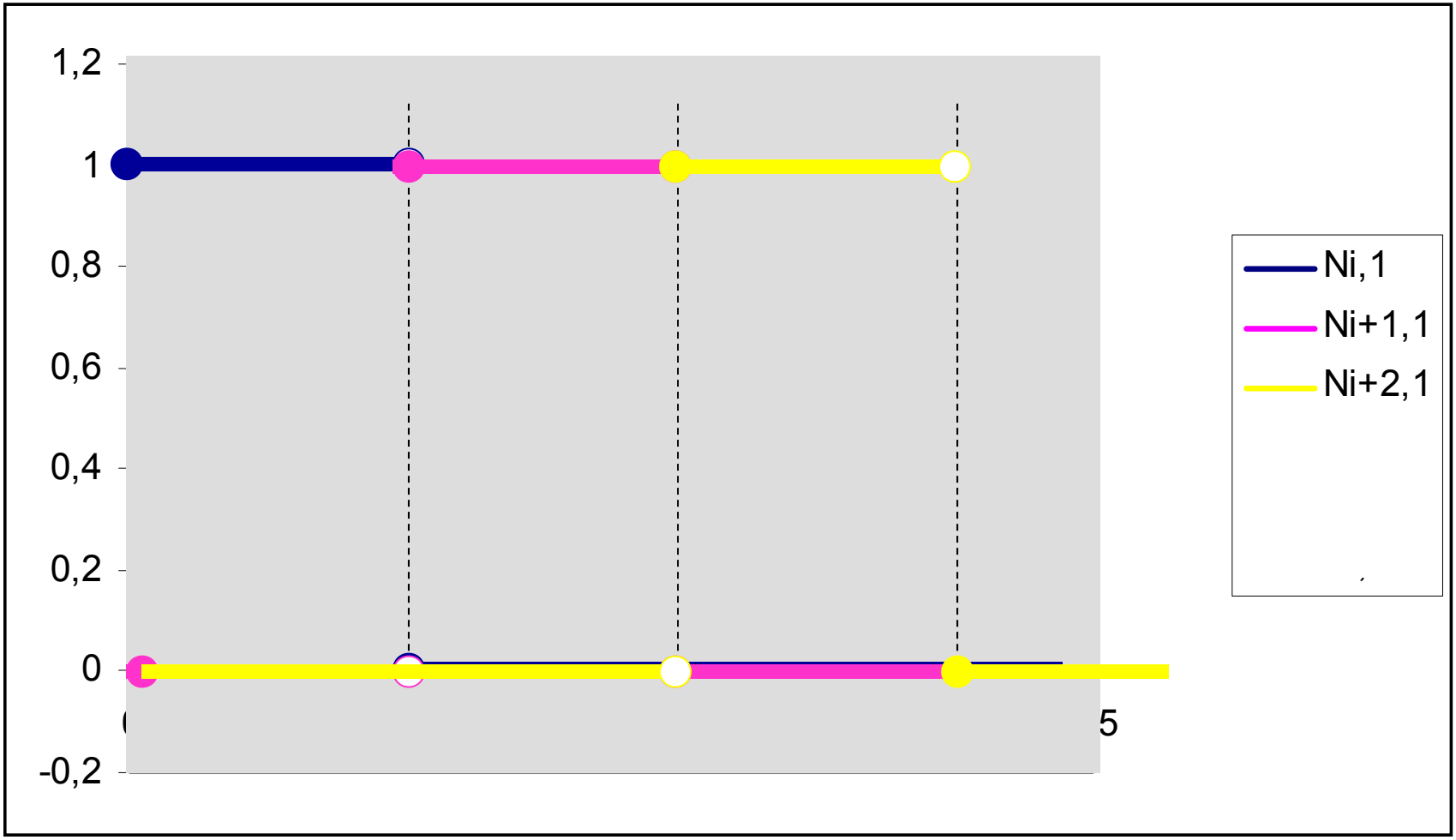


Dvojice intervalů posunutých o 1, které se překrývají

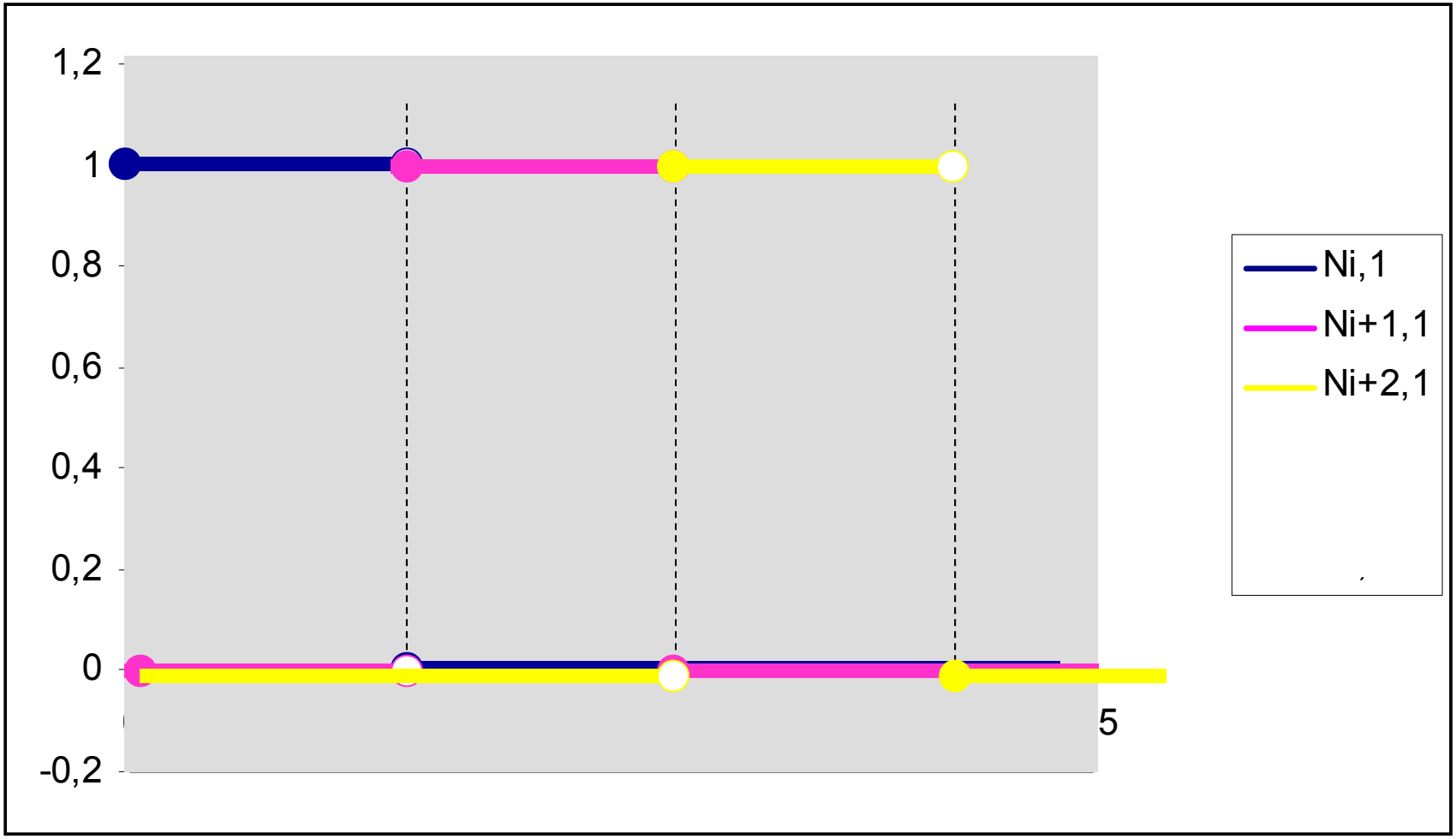
Konstrukce bázových funkcí



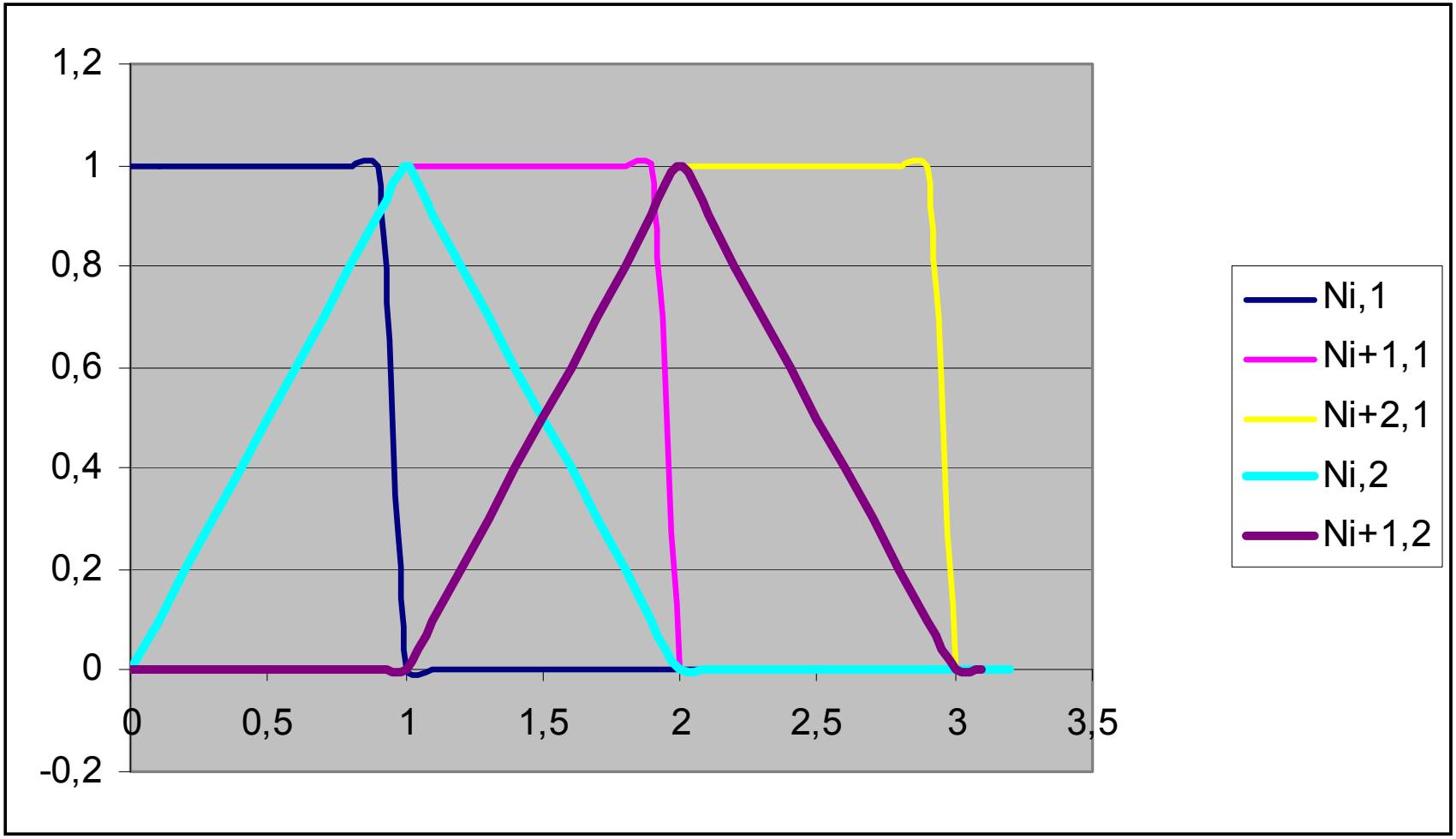
Konstrukce bázových funkcí



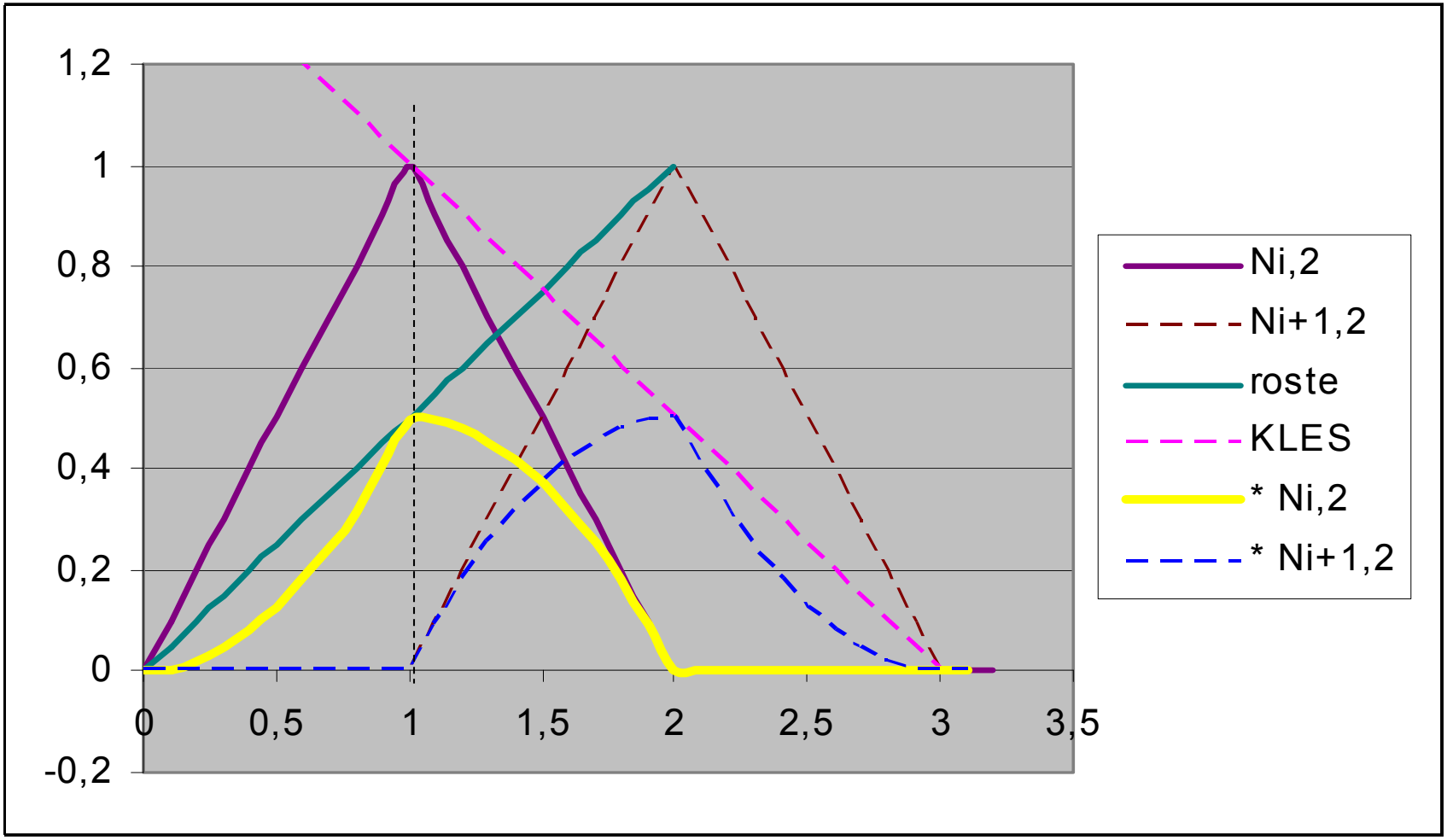
Konstrukce bázových funkcí



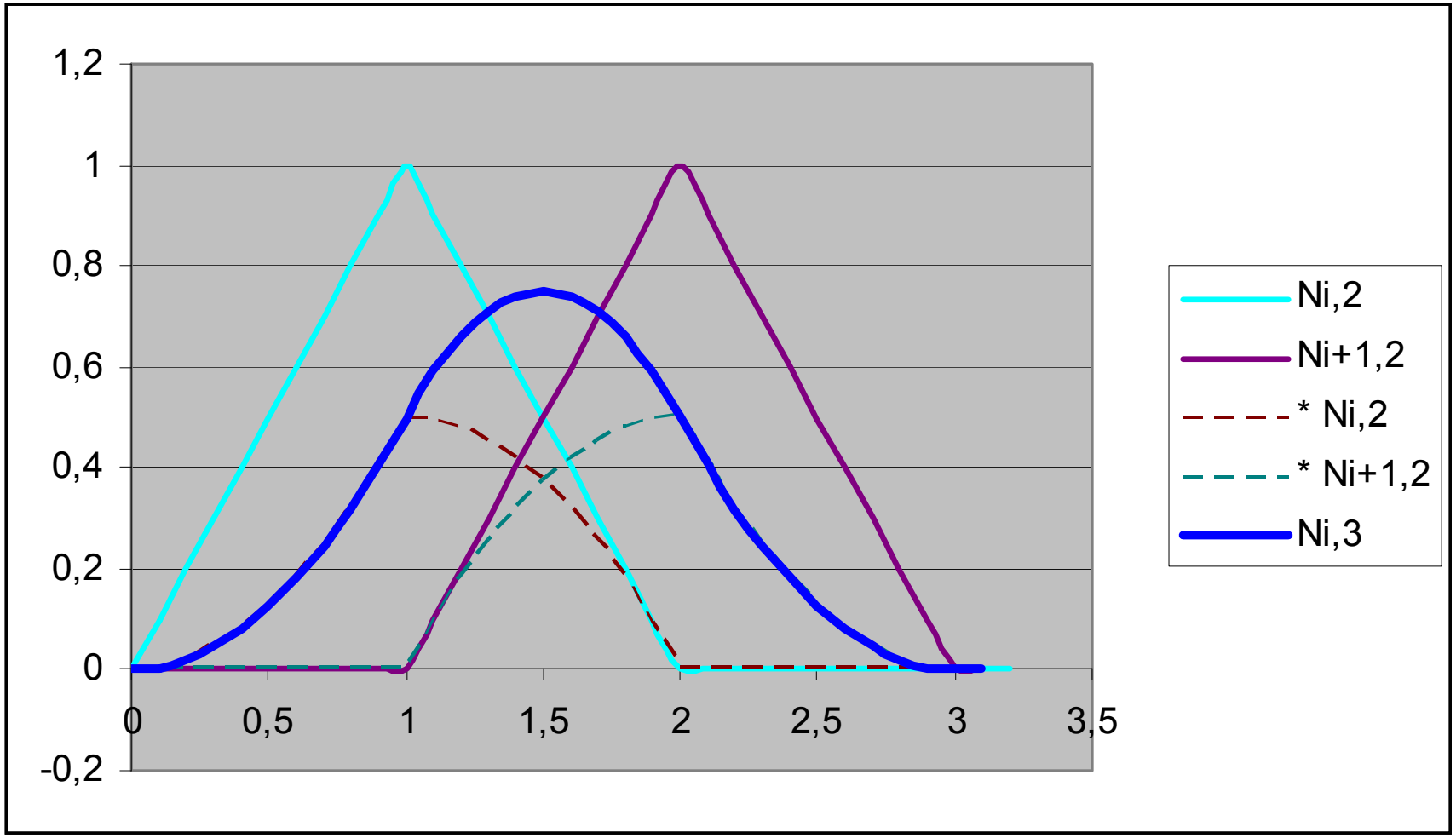
Konstrukce bázových funkcí



Konstrukce bázových funkcí



Konstrukce bázových funkcí



Vlastnosti bázových funkcí $N_{i,k}$

Vlastnosti B-spline funkcí $N_{i,k}(t)$

1. **Pozitivita**: $N_{i,k}(t)$ **>=** 0 pro všechna *i,k* a *t*.
2. **Doplňují se do jedničky**:

   $\sum N_{i,k}(t) = 1$, pro $i \in \langle 0, m+k \rangle$ $t_i \in \langle t_0, t_{m+k} \rangle$
3. **Lokalita**: $N_{i,k}(t) = 0$, pro všechna $t \notin (t_i, t_{i+k})$ - tj. pro *k* úseků
4. **Diferencovatelnost**: $C^0, C^1, .., C^{k-2}$

   Pro $t_i < t < t_{i+1}$ jsou (k-2) krát spojitě diferencovatelné. (třídy C^{k-2})

   Pro p-násobný uzlový bod $t_i \Rightarrow$ je v bodě t_i (k-p-1) krát spojitě diferencovatelná. $C^0, C^1, .., C^{k-p-1}$
5. **Jediné maximum:** $N_{i,k}(t)$ ho má pro všechna i = 0,1,...m, a k $\neq$1
6. **Uniformní** B-spline funkce: ekvidistantní intervaly uzlů t_i = i

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-i)}{(k-1)} N_{i,k-1}(t) + \frac{(i+k-t)}{k-1} N_{i+1,k-1}(t), \quad \text{kde } i = 0,1,...,m$$

7. **Periodické** B-spline funkce: $N_{i,k}(t) = N_{i+k,k}(t-k)$.

Uniformní kubický B-spline

Uniformní kubický B-spline

- kubický (nejvyšší **stupeň polynomu je n=3**)

  => **řád k = 4** (**k = n+1**)

- Uzlový vektor $[u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9]$, $u_i < u_{i+1}$ … 10 pro 6 bodů

  $[u_0, u_1, .., u_{k-1}, u_k, \ldots, u_{m+1}, \ldots, u_{m+k}]$ … pro m+1 bodů

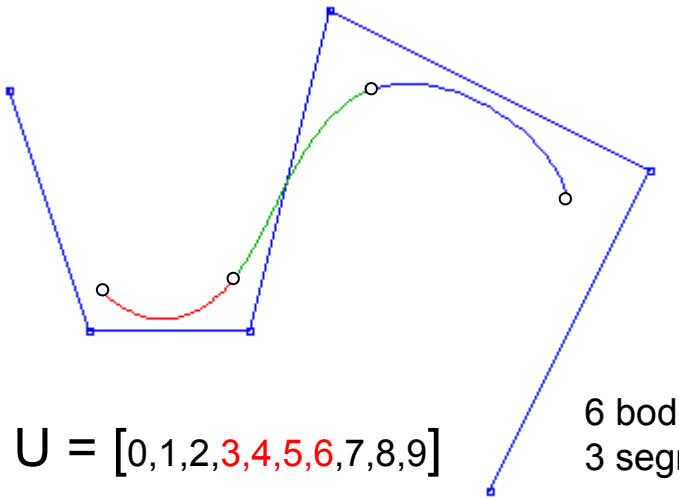
- $(u_{i+1}, -u_i) = \text{konst} \neq 0$ …… proto **uniformní**
- aproximuje zadané řídící body $P_0, P_1, \ldots, P_m$
- zaručuje C^2 spojitost v uzlech

- Řídící body lze OPAKOVAT (umístit více bodů na stejné místo)
  - snižuje se tím spojitost
  - lze dosáhnout interpolace
    (k-1) násobným bodem křivka prochází

Uniformní kubický B-spline

Vliv opakování řídících bodů na koncích

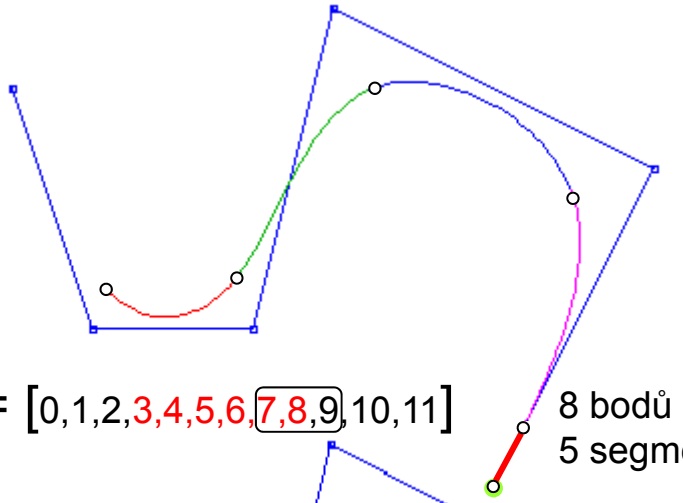
Bez opakování řídících bodů



U = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]

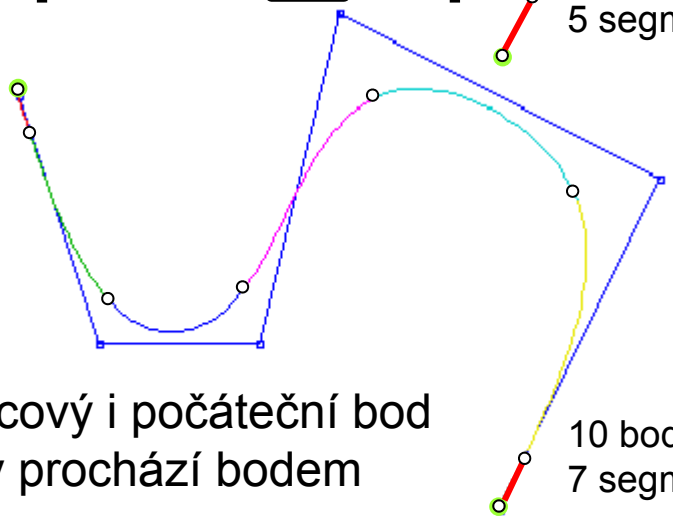
6 bodů
3 segmenty

Trojnásobný koncový bod



U = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]

8 bodů
5 segmentů



Trojnásobný koncový i počáteční bod
(k-1) násobný prochází bodem

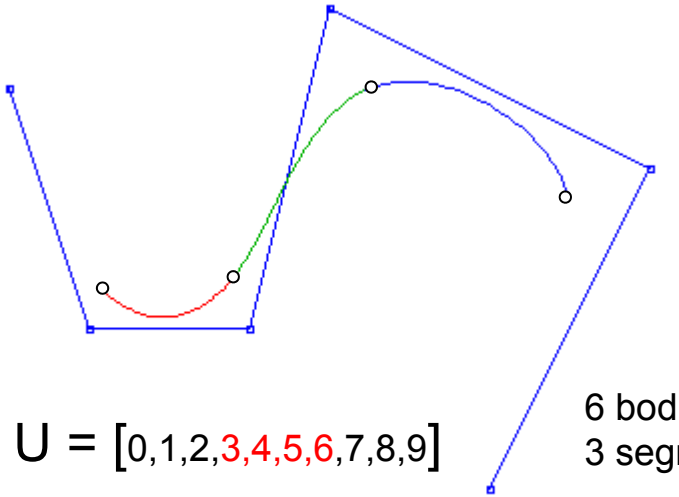
U = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13]

10 bodů
7 segmentů

Uniformní kubický B-spline

Vliv opakování řídících bodů uvnitř

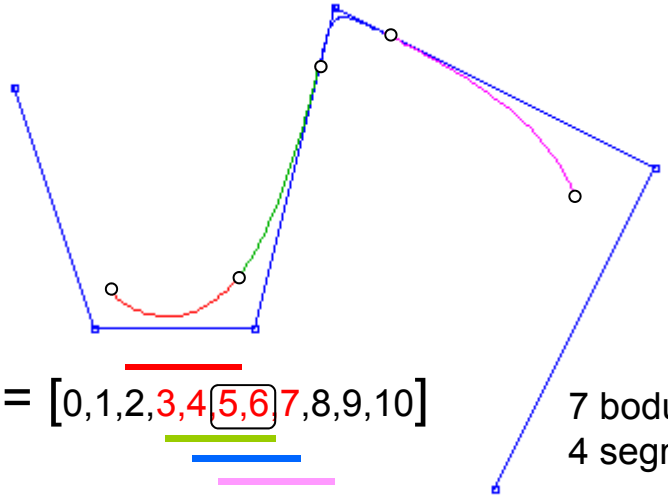
Bez opakování řídících bodů



U = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]

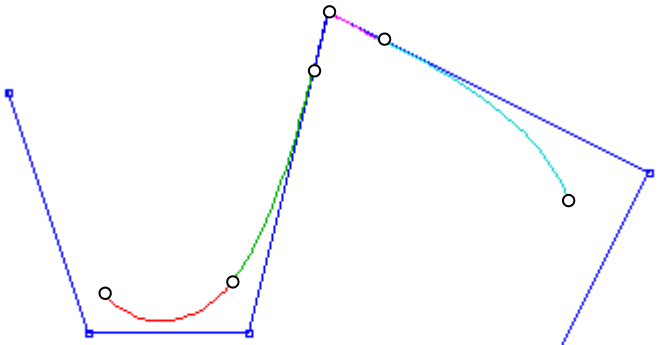
6 bodů
3 segmenty

Dvojnásobný vnitřní bod



U = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]

7 bodů
4 segmenty



Trojnásobný vnitřní bod

U = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11]

8 bodů
5 segmentů

b) Neuniformní kubický B-spline

„NUBS“

Neuniformní kubický B-spline

Neuniformní kubický B-spline

- kubický (nejvyšší **stupeň polynomu je n=3**)

  => **řád *k* = 4** (***k*** **= n+1**)

- Uzlový vektor $[u_0, u_1, .., u_{k-1}, u_k, \ldots, u_{m+1}, \ldots, u_{m+k}]$, $u_i \leq u_{i+1}$,

- $(u_{i+1} - u_i) \neq$ konst …… proto neuniformní

$$Q_i(u) = \sum_{j=0}^{3} p_{i+j-1} \cdot N_{i+j-1,3}(u), \quad u \in 0..1,$$

kde $N_{i+j-1,3}(u)$ jsou rekurzívně definované míchací funkce

$i \in \langle 1, \; m-2 \rangle$ tj., *m*-2 segmentů

Neuniformní kubický B-spline

Neuniformní kubický B-spline

- $(u_{i+1} - u_i) \neq$ konst …… proto neuniformní

  může být i roven 0 (opakují se hodnoty v uzlovém vektoru)

  => křivka se přibližuje řídícímu bodu

  až jím projde (při k-1 stejných hodnot)

- NB-spline lze donutit k interpolaci řídícího bodu
  1. opakováním řídícího bodu (jako u uniformních B-spline)
  2. opakováním hodnot v uzlovém vektoru (viz dále)

Neuniformní kubický B-spline

2. Neuniformní kubický B-spline - opakování hodnot v uzlovém vektoru

Uzlový vektor $U = [\underline{u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}}, u_k, \ldots, \underline{u_{m+1}, \ldots, u_{m+k}}]$

a) Neuniformita na koncích – na začátku i konci U se opakuje *k* hodnot (křivka interpoluje koncové body)

$$u_i < u_{i+1} \quad pro \;\; i = k-1, \ldots, m+1$$

$$u_0 = u_1 = \ldots = u_{k-1}, \quad k \text{ stejných}$$

$$u_{m+1} = u_{m+2} = \ldots u_{m+k} \quad k \text{ stejných}$$

Př. 6 bodů a 3 segmenty

Různé u_i

$$[\underbrace{0,0,0,}_{k}\overbrace{0,1,2,3}\underbrace{,3,3,3}_{k}]$$

b) Neuniformita uvnitř – opakují se hodnoty mezi u_{k-1} a u_{km+1}

oblouky degenerují

- double knot (opakují se dvě hodnoty),
- tripple knot (3 hodnoty) – interpoluje bod

(obecně (k-1) opakování interpoluje bod)

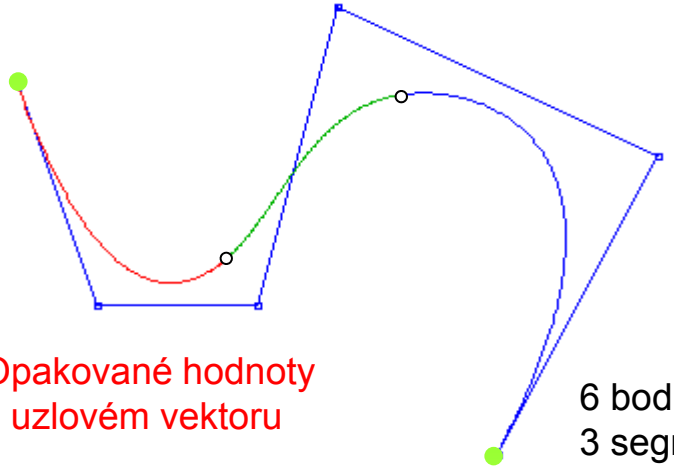
Opakující se u_i

$$[\underbrace{0,1,2,3,}_{k}\overbrace{4,4,}\underbrace{5,6,7,8}_{k}]$$

Neuniformní kubický B-spline

a) Neuniformita na koncích

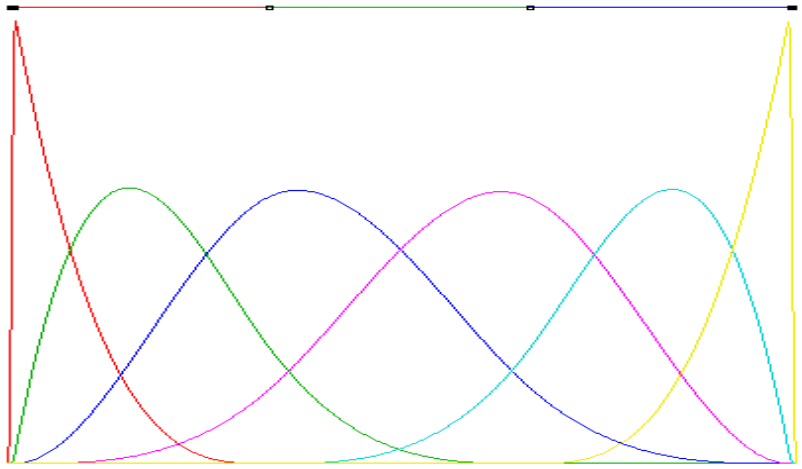
Cubic B-spline (m = 5, k = 4) [0,0,0,0,1,2,3,3,3,3]



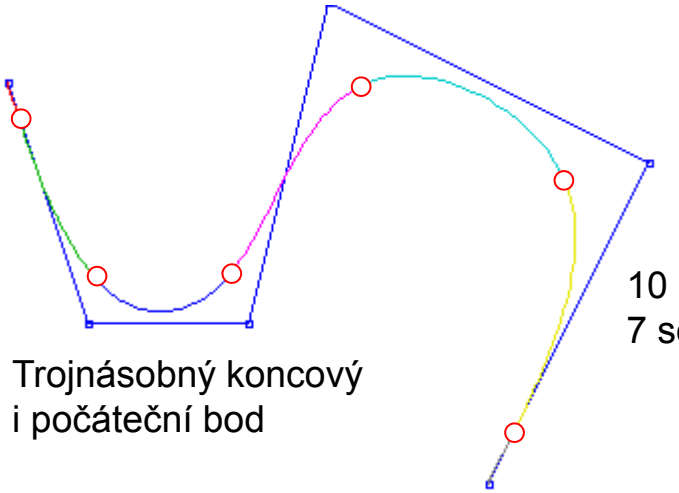
Opakované hodnoty
v uzlovém vektoru

6 bodů
3 segmenty

Uzly [0,0,0,0,1,2,3,3,3,3]

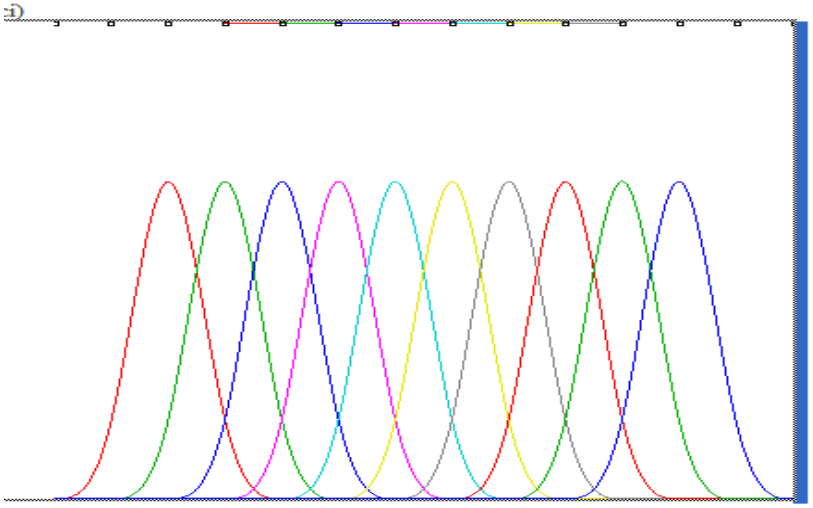


Opakování řídícího bodu – pro srovnání



10 bodů
7 segmentů

Trojnásobný koncový
i počáteční bod

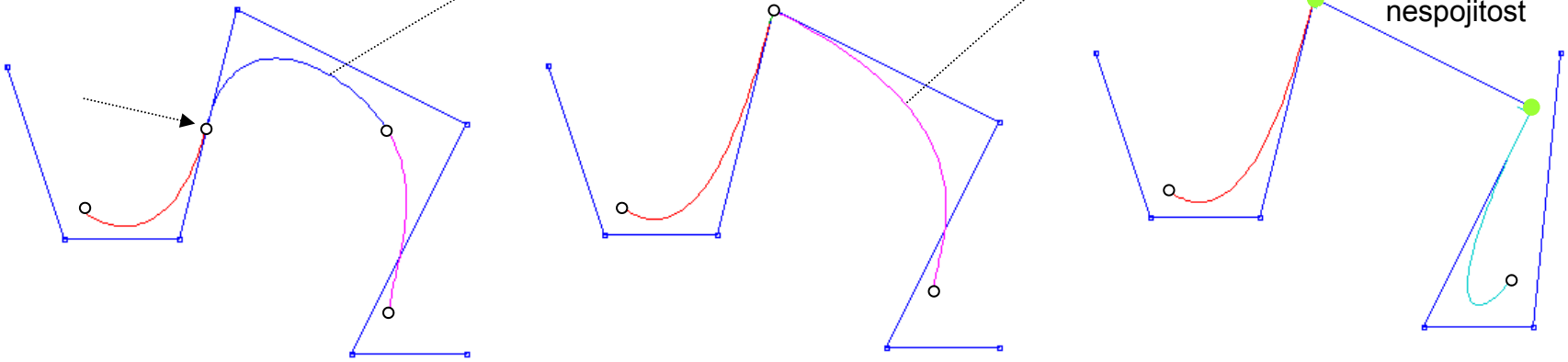


Neuniformní kubický B-spline

b) Neuniformita uvnitř

Oblouk degeneruje na bod

nespojitost



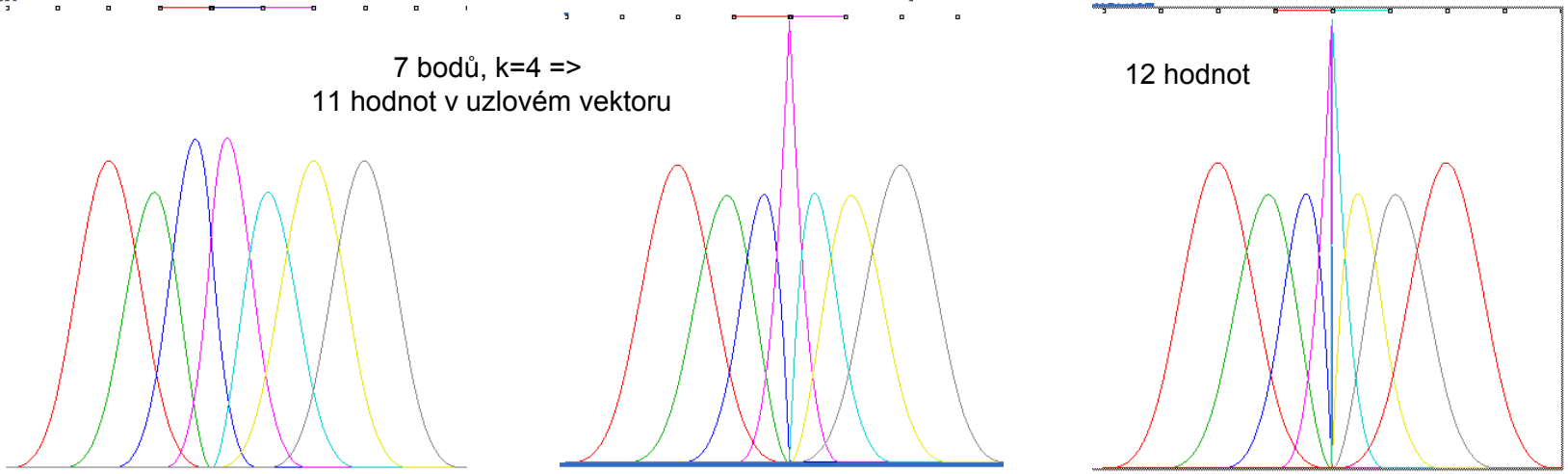
[0,1,2,3,4,4,5,6,7,8,9] Double knot

[0,1,2,3,4,4,4,5,6,7,8] triple knot

[0,1,2,3,4,4,4,4,5,6,7,8] quadruple knot

7 bodů, k=4 =>
11 hodnot v uzlovém vektoru

12 hodnot



Modelování NURBS křivek a ploch

- **Princip aproximace pomocí neuniformních B-spline a NURBS (viz dále)**

  1. Rozdělení intervalu parametru *u* na dílčí intervaly

     ⇒ **uzlové body (knots)**

  2. Rozdělení křivky na **navazující oblouky** (plochy na pláty) mezi uzlovými body

  3. Konstrukce **bázových funkcí** postupnou interpolací

     ⇒ **volitelný řád** bázových funkcí (typicky řád k=4, kubiky)

     ⇒ snížení **výpočetní složitosti** (nízký řád polynomů)

     ⇒ **lokální vliv** řídicího bodu

Neuniformní kubický B-spline

Neuniformní B-spline křivka – přes všech *m* bodů

Dáno: Řídicí polygon P = $p_0, p_1, \ldots p_m$, (m+1 bodů)

Uzlový vektor T = $[t_0, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_{m+k}]$, $t_i \leq t_{i+1}$

Řád aproximace *k*.

B-spline křivka *r*(*t*) řádu *k* s řídicím polygonem *P* nad vektorem *T*

$$r(t) = \sum_{i=0}^{m} p_i \cdot N_{i,k}(t), \quad m \geq k-1, \; t \in \langle t_{k-1}, t_{m+1} \rangle$$

(příspěvky bodů dále než $\pm k/2$ jsou nulové)

Definováno 0/0 = 0

Vlastnosti neuniformní B-spline křivky r(t)

1. Obecně **neprochází žádným bodem**
2. Křivka r(t) **leží uvnitř konvexní obálky** řídicího polygonu P.
3. Křivka r(t) je **v p-násobném uzlu (k-p-1) krát spojitě diferencovatelná.**
4. Je-li (*k*-1) řídicích bodů kolineárních
   $\Rightarrow$ křivka r(t) se **dotýká** řídicího polygonu.
   Je-li *k* řídicích bodů kolineárních
   $\Rightarrow$ křivka r(t) má s řídicím polygonem **společnou hranu**.
5. Jestliže *k*-1 uzlových bodů splyne,
   $\Rightarrow$ na křivce r(t) vznikne **zlom**.
   Strany řídicího polygonu jsou pak tečnami v tomto bodě.

Vlastnosti neuniformní B-spline křivky r(t)

6. Pokud uzlový vektor T obsahuje pouze *k* nulových uzlů na začátku a k jedničkových uzlů na konci
   $\Rightarrow$ r(t) je **Bézierova křivka řádu *k***.

Př.: [0,0,0,0,1,1,1,1]

4 body (m=3), k=4

7. Pro uzlový vektor U typu

$$U = [u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k \ldots u_{m+1}, \ldots u_{m+k}]$$

$$u_i < u_{i+1} \quad \text{pro} \quad i \in \langle k-1, m+1 \rangle$$

$$u_0 = u_1 = \ldots = u_{k-1}, \quad k \text{ stejných}$$

$$u_{m+1} = u_{m+2} = \ldots u_{m+k} \quad k \text{ stejných}$$

Př. $[\underbrace{0,0,0,0}_{k},1,2,\underbrace{3,3,3,3}_{k}]$

prochází křivka body p_0 a p_n: $r(t_0) = p_0$, $r(t_{m+1}) = p_n$,

Derivace v počátečním a koncovém bodě křivky:

$$r'(t_0) = (k-1).(\mathbf{p_0}-\mathbf{p_1})/(t_k - t_0), \quad r'(t_{m+1}) = (k-1)\cdot(\mathbf{p_m}-\mathbf{p_{m-1}})/(t_{m+1}-t_m)$$

vektor tečny měřítko

c) Neniformní kubický racionální B-spline

NURBS

Modelování NURBS křivek a ploch

Dva styly reprezentace řídících bodů a vah *(x,y,z,w)* *[Demidov]* :

a) Homogenní reprezentace …….. OpenGL

– pozice bodu se v OpenGL počítá jako *(x/w, y/w, z/w)*.

– proto zadávat jako *(x.w, y.w, z.w, w),*
aby po dělení w vyšlo (x,y,z,w),
kde w $\in (0, \infty)$ *je váha bodu*

b) Vážená Eukleidovská reprezentace

– souřadnice jsou chápany jako již vydělené *w.*

– Proto složky *(x,y,z)* přímo reprezentují polohu bodu
a čtvrtá složka váhu *w*, tedy *(x,y,z,w)*

Modelování NURBS křivek a ploch

NURBS křivka

Dáno: Řídicí polygon $P = [\, p_0, p_1, \ldots p_m \,]$,

Uzlový vektor $T = [t_0, t_1 \ldots t_k, t_{k+1} \ldots t_m, t_{m+1}, \ldots t_{m+k}]$, $t_i <= t_{i+1}$

Řád aproximace k.

$p_i = [w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i]$, řídící bod s váhou w_i

- Poloha řídícího bodu v Eukleidovských souř. se získá vydělením váhou w_i

  $P_i = [x_i, y_i, z_i]$ řídící bod v Eukleidovských souřadnicích

- Bod na neuniformní B-spline křivce má homogenní souřadnice

$$r(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{p}_i \cdot N_{i,k}(t)$$

- Z toho váha (4. složka) v libovolném bodě křivky je

$$[r(t)]_W = \sum_{i=0}^{m} w_i \cdot N_{i,k}(t)$$

Modelování NURBS křivek a ploch

- 3D poloha bodu po vydělení w_i je tedy

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \overbrace{[x_i, y_i, z_i]}^{\mathbf{p}_i} . w_i . N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{m} w_i \cdot N_{i,k}(t)}$$

- Nahrazením

$$R_{i,k}(t) = \frac{w_i . N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{m} w_i \cdot N_{i,k}(t)}$$

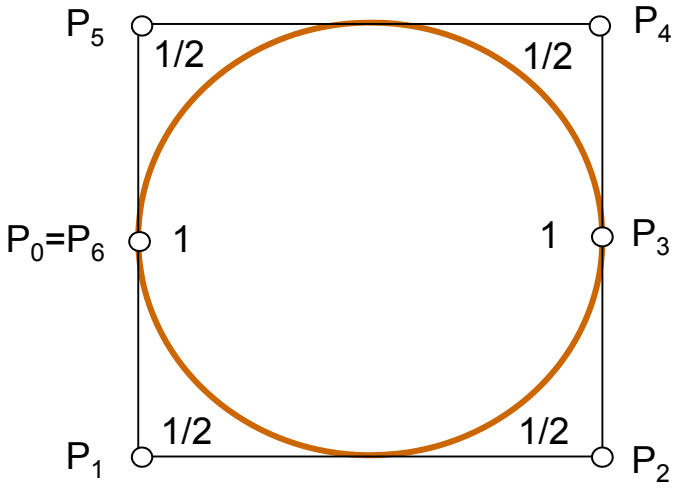
- Získáme rovnici NURBSu

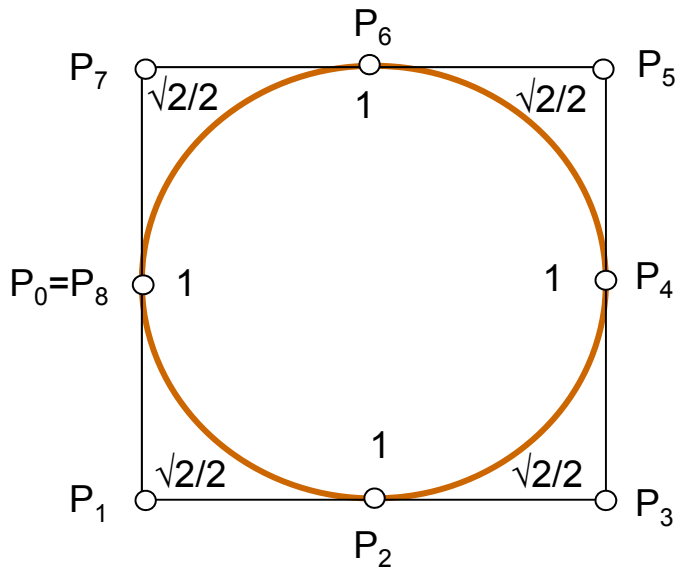
$$Q(t) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{p}_i \cdot R_{i,k}(t)$$

Poznámky:

- NURBS křivka *Q(t)* vznikne inverzní homogenní transformací B-spline křivky *r(t)* s řídicími body v homogenních souřadnicích
- Funkce $R_{i,k}(t)$ jsou lomené racionální funkce
- Homogenní souřadnice *w* řídicího bodu vyjadřuje jeho váhu
- NURBS křivky jsou invariantní vůči afinní i perspektivní transformaci

Kružnice jako NURBS křivka řádu k=3





Kružnice zadaná 7 body

w_i = { 1, 1/2, 1/2, 1, 1/2, 1/2, 1} váhy

T= { 0,0,0,1/4,1/2,1/2,3/4,1,1,1] uzly

Totéž jako

T= { 0,0,0, 1, 2, 2, 3,4,4,4}

Kružnice zadaná 9 body

w_i = { 1, √2/2, 1, √2/2, 1, √2/2, 1, √2/2, 1}

… √ 2/2 = cos(45°)

T= { 0,0,0,1/4,1/4,1/2,1/2,3/4,3/4,1,1,1}

T= { 0,0,0, 1, 1, 2, 2, 3, 3,4,4,4}

Aproximační metody modelování křivek

Výhody NURBS

- Široká třída modelovaných křivek/ploch
  - spline křivky/plochy
  - křivky/plochy s nespojitou 1. derivací
  - oblouk křivky může být úsečka
- Rozsah parametru *u, v* může být nespojitý
- Přesný popis kuželoseček a válcových ploch
- Invariance vůči afinní i perspektivní projekci
- Jednotná úsporná reprezentace

$\Rightarrow$ **většina systémů pro modelování používá NURBS pro vnitřní reprezentaci křivek/ploch**

NURBS plocha

NURBS plocha - tenzorový produkt dvou křivek

Dáno:

Řády *k* a *q* pro parametry *u* a *v*,

Uzlové vektory $T_{\mathbf{u}}$ a $T_{\mathbf{v}}$ pro parametr *u* a *v*

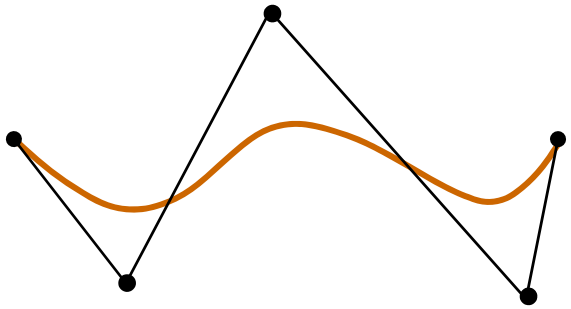
Matice (*m* x *n*) řídicích bodů $p_{i,j}$.

Bod plochy:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,k}(u) \cdot R_{j,q}(v) \cdot \mathbf{p}_{i,j}$$

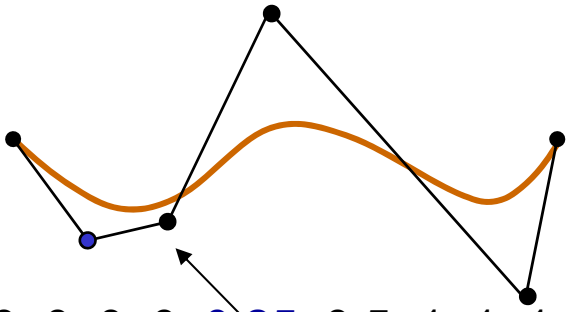
Operace nad NURBS křivkami a plochami

1. **Vkládání uzlových bodů:**
   1. Do uzlového vektoru se vloží nové uzly
   2. Hledá se nový řídicí polygon tak, aby se nezměnil tvar modelované křivky.
      $\Rightarrow$ Oslo-algoritmus,
      Boehm-algoritmus



T = [0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]

5 bodů, k=4

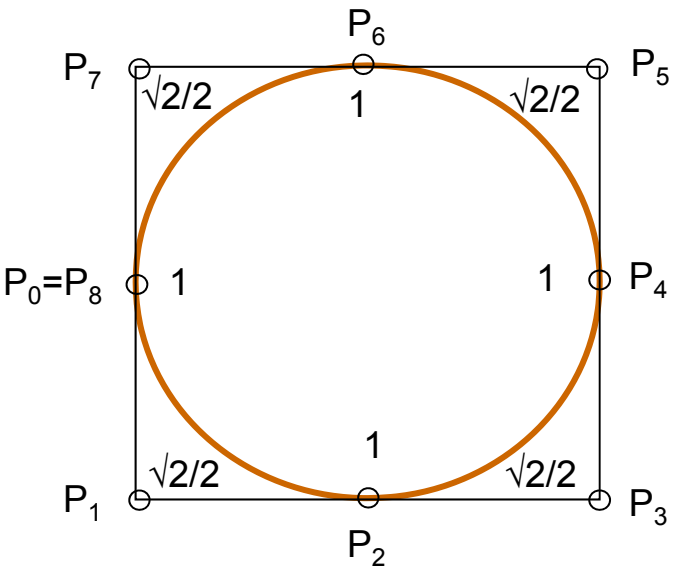


T = [0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 1, 1, 1, 1]

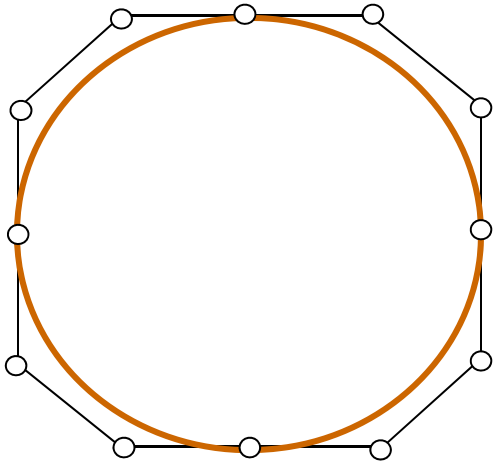
6 bodů, k=4

2. Změna řádu křivky

Výpočet řídicích bodů a uzlových bodů křivky vyššího řádu.



Kružnice řádu 3



Kružnice řádu 4

T= { 0,0,0,1/4,1/4,1/2,1/2,3/4,3/4,1,1,1]

w_i = { 1, √ 2/2, 1, √2/2, 1, √2/2, 1, √2/2, 1}… √ 2/2 = cos(45°)

Operace nad NURBS křivkami a plochami

3. Sjednocení uzlových vektorů T_1, T_2:

Jsou dány vektory T_1, T_2 dvou křivek řádu k.
Algoritmus provede sjednocení $T = T_1 \cup T_2$
tak, že se žádný uzel nebude opakovat více než k-krát.

$\Rightarrow$ **nespojitosti původních křivek se přenesou do křivky s uzlovým vektorem T**

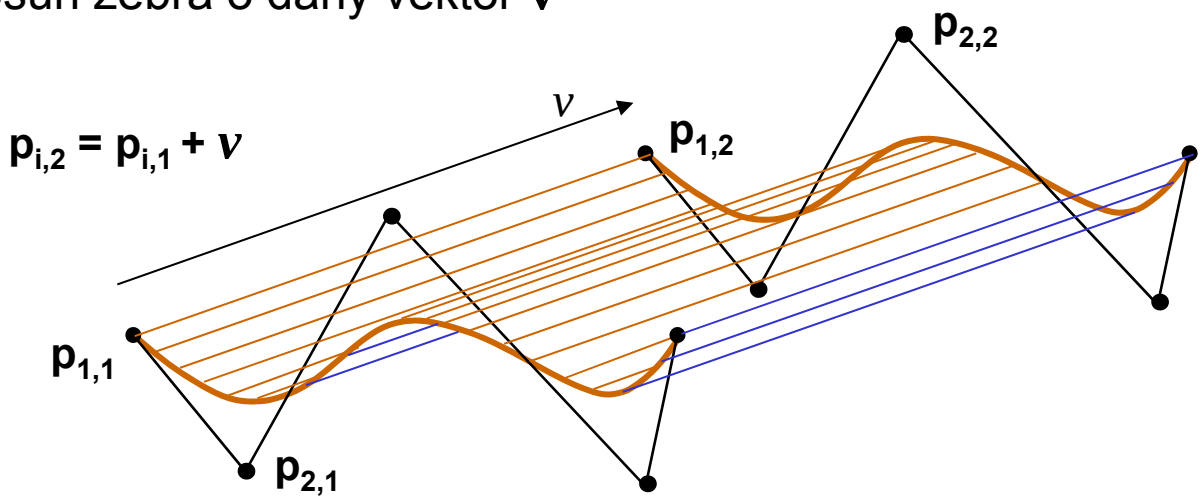
- **Důsledek operací nad NURBS:**
  - pomocí operací 1 - 3 lze různé NURBS křivky vyjádřit jako křivky stejného řádu se stejným počtem řídicích a uzlových bodů

  $\Rightarrow$ stejná forma zápisu křivek

  $\Rightarrow$ křivky mohou být použity pro modelování ploch

Techniky modelování NURBS ploch

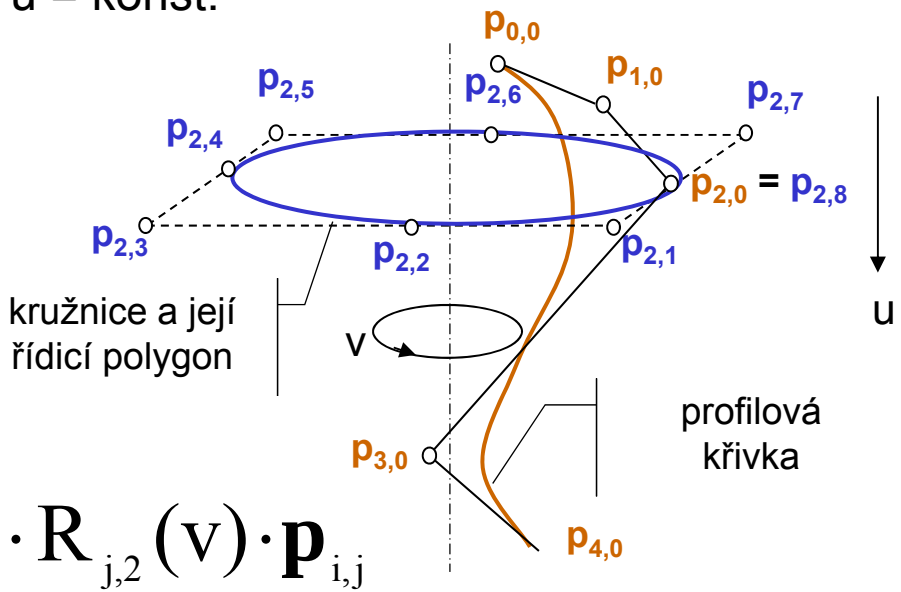
- **Tažení (sweeping, extrusion)**
  1. Modelování taženého žebra v rovině
  2. Posun žebra o daný vektor **v**



$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{1} R_{i,k}(u) \cdot R_{j,1}(v) \cdot p_{i,j}$$

Modelování NURBS křivek a ploch

- **Modelování rotačních ploch**
  1. Modelování profilové křivky
     ⇒ isoparametrická křivka pro v = konst.
     ⇒ NURBS křivka v rovině (x,z)
  2. Rotace profilové křivky kolem osy **z** o 360º
     ⇒ isoparametrická křivka pro u = konst.



$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{4} \sum_{j=0}^{8} R_{i,k}(u) \cdot R_{j,2}(v) \cdot \mathbf{p}_{i,j}$$

Aproximační metody modelování křivek

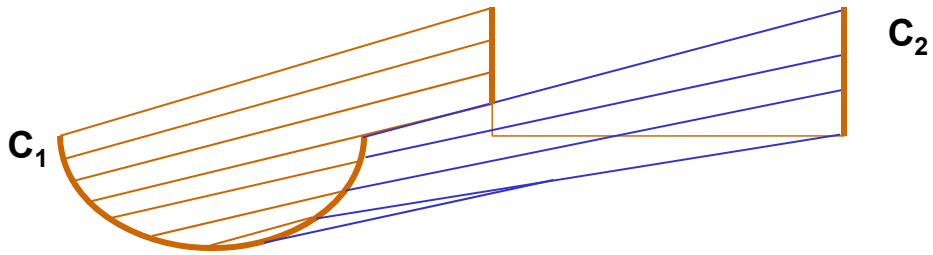
- **Modelování přímkových ploch**

1. Modelování krajních křivek
   $C_1 \Rightarrow$ řád k_1, řídicí body $\mathbf{P}_1$, uzlový vektor T_1
   $C_2 \Rightarrow$ řád k_2, řídicí body $\mathbf{P}_2$, uzlový vektor T_2
2. Úprava C_1, C_2 na stejný řád k = max (k_1, k_2) … k
3. Sjednocení uzlových vektorů $T = T_1 \cup T_2$ … T
4. Aplikace Oslo algoritmu na C_1 , C_2 řádu *k* s uzlovým vektorem T … P
   $\Rightarrow C_1$, C_2 mají stejný počet řídicích bodů n + 1

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} R_{i,k}(u) \cdot R_{j,l}(v) \cdot \mathbf{p}_{i,j}$$

$\boldsymbol{p}_{1,j}$ - řídicí body C_1

$\boldsymbol{p}_{2,j}$ - řídicí body C_2



Aproximační metody modelování křivek

- **Modelování obalových ploch (skinning)**

  Zobecnění postupu modelování přímkových ploch:

  1. Modelování m žeber - NURBS křivek C_i křivek
     $C_i \Rightarrow$ řád k_i, řídicí body $\mathbf{P}_i$, uzlový vektor T_i
  2. Úprava C_i na stejný řád $k = \max(k_i)$, $i = 1, 2, \ldots m$
  3. Sjednocení uzlových vektorů $T = \cup T_i$, $i = 1, 2, \ldots m$
  4. Aplikace Oslo algoritmu na každou křivku C_i , řádu k
     s uzlovým vektorem T
     $\Rightarrow$ C_i mají stejný počet řídicích bodů n

$$S(u,v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} R_{i,q}(v) \cdot R_{j,k}(u) \cdot \mathbf{p}_{i,j}$$

i-tý řádek matice řídicích bodů **P** = řídicí body křivky C_i
j-tý sloupec matice řídicích bodů **P** = řídicí body
ve směru parametru v

Reference

[Demidov] http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Intro.htm,

updated 12 Feb 2004, stav dne 20.5.2006.

[Alexandr] Lubomír Alexandr. Výuka počítačové grafiky cestou WWW. Diplomová práce. http://www.hyperkrychle.cz/curves/obsah.html

[MPG] Žára, Beneš, Sochor, Felkel. Moderní počítačová grafika, 2. vydání, Computer Press, 2004, kap. 5.