

Struktury a uniony, přesnost výpočtů a vnitřní reprezentace číselných typů

Jan Faigl

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Přednáška 06

B0B36PRP – Procedurální programování



Přehled témat

■ Část 1 – Struktury a uniony

Struktury – `struct`

S. G. Kochan: kapitola 9 a 17

Proměnné se sdílenou pamětí – `union`

P. Herout: kapitola 14

■ Část 2 – Přesnost výpočtů a vnitřní reprezentace číselných typů

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

S. G. Kochan: kapitola 14 (typové konverze)

Typové konverze

Appendix B (matematické funkce)

Matematické funkce

P. Herout: kapitola 7 (typové konverze)

■ Část 3 – Zadání 6. domácího úkolu (HW06)



Část I

Část 1 – Struktury a uniony



Obsah

Struktury – struct

Proměnné se sdílenou pamětí – union



Struktura – struct

- Struktura je konečná množina prvků (proměnných), které nemusí být stejného typu
- Skladba struktury je definovaná uživatelem jako nový typ sestavený z již definovaných typů
- K prvkům struktury **přístupujeme tečkovou notací**
- K prvkům můžeme přistupovat přes ukazatel operátorem **->**
- Pro struktury stejného typu je definována operace přiřazení

```
struct1 = struct2;
```

Pro proměnné typu pole není přímé přiřazení definováno, přiřazení pole je tak nutné realizovat po prvcích.

- Struktury (jako celek) **nelze** porovnávat relačním operátorem **==**
- Struktura může být funkci předávána hodnotou i ukazatelem
- Struktura může být návratovou hodnotou funkce



Příklad struct – Definice

- Bez zavedení nového typu (`typedef`) je nutné před identifikátor jména struktury uvádět klíčové slovo `struct`

```
struct record {
    int number;
    double value;
};

typedef struct {
    int n;
    double v;
} item;
```

```
record r; /* THIS IS NOT ALLOWED! */
          /* Type record is not known */
```

```
struct record r; /* Keyword struct is required */
item i;          /* type item defined using typedef */
```

- Zavedením nového typu `typedef` můžeme používat typ struktury již bez uvádění klíčového slova `struct`

lec06/struct.c



Příklad struct – Inicializace

- Struktury:

```
struct record {  
    int number;  
    double value;  
};  
  
typedef struct {  
    int n;  
    double v;  
} item;
```

- Proměnné typu struktura můžeme inicializovat prvek po prvku

```
struct record r;  
r.value = 21.4;  
r.number = 7;
```

- nebo podobně jako pole lze inicializovat přímo při definici

```
item i = { 1, 2.3 };
```

lec06/struct.c



Příklad struct jako parametr funkce

- Struktury můžeme předávat jako parametry funkcí hodnotou

```
void print_record(struct record rec) {  
    printf("record: number(%d), value(%lf)\n",  
        rec.number, rec.value);  
}
```

- Nebo ukazatelem a realizovat tak volání odkazem

```
void print_item(item *v) {  
    printf("item: n(%d), v(%lf)\n", v->n, v->v);  
}
```

- Při předávání parametru
 - **hodnotou** se vytváří nová proměnná a původní obsah předávané struktury se kopíruje na zásobník
 - **ukazatelem** se kopíruje pouze hodnota ukazatele (adresa) a pracujeme tak s původní strukturou

[lec06/struct.c](#)



Příklad struct – Přřazení

- Hodnoty proměnné stejného typu struktury můžeme přiřadit operátorem =

```
struct record {                typedef struct {
    int number;                int n;
    double value;              double v;
};                               } item;
```

```
struct record rec1 = { 10, 7.12 };
struct record rec2 = { 5, 13.1 };
item i;
print_record(rec1); /* number(10), value(7.120000) */
print_record(rec2); /* number(5), value(13.100000) */
rec1 = rec2;
i = rec1; /* THIS IS NOT ALLOWED! */
print_record(rec1); /* number(5), value(13.100000) */
lec06/struct.c
```



Příklad struct – Přímá kopie paměti

- Jsou-li dvě struktury stejně veliké, můžeme přímo kopírovat obsah příslušné paměťové oblasti

Například funkcí `memcpy()` z knihovny `string.h`

```
struct record r = { 7, 21.4};
item i = { 1, 2.3 };
print_record(r); /* number(7), value(21.400000) */
print_item(&i); /* n(1), v(2.300000) */
if (sizeof(i) == sizeof(r)) {
    printf("i and r are of the same size\n");
    memcpy(&i, &r, sizeof(i));
    print_item(&i); /* n(7), v(21.400000) */
}
```

- V tomto případě je interpretace hodnot v obou strukturách identická, obecně tomu však být nemusí

lec06/struct.c



Struktura struct a velikost

- Vnitřní reprezentace struktury nutně nemusí odpovídat součtu velikostí jednotlivých prvků

```
struct record {  
    int number;  
    double value;  
};  
  
typedef struct {  
    int n;  
    double v;  
} item;
```

```
printf("Size of int: %lu size of double: %lu\n", sizeof  
      (int), sizeof(double));  
printf("Size of record: %lu\n", sizeof(struct record));  
printf("Size of item: %lu\n", sizeof(item));
```

```
Size of int: 4 size of double: 8  
Size of record: 16  
Size of item: 16
```

lec06/struct.c



Struktura struct a velikost 1/2

- Při kompilaci zpravidla dochází k zarovnání prvků na velikost slova příslušné architektury

Např. 8 bytů v případě 64-bitové architektury.

- Můžeme explicitně předeepsat kompaktní paměťovou reprezentaci, např. direktivou `__attribute__((packed))` pro překladače `clang` a `gcc`

```
struct record_packed {  
    int n;  
    double v;  
} __attribute__((packed));
```

`lec06/struct.c`



Struktura struct a velikost 2/2

- Nebo

```
typedef struct __attribute__((packed)) {  
    int n;  
    double v;  
} item_packed;
```

- Příklad výstupu:

```
printf("Size of int: %lu size of double: %lu\n", sizeof(int),  
      sizeof(double));  
printf("record_packed: %lu\n", sizeof(struct record_packed));  
printf("item_packed: %lu\n", sizeof(item_packed));
```

```
Size of int: 4 size of double: 8  
Size of record_packed: 12  
Size of item_packed: 12
```

lec06/struct.c

- Zarovnání zpravidla přináší rychlejší přístup do paměti, ale zvyšuje paměťové nároky

<http://www.catb.org/esr/structure-packing>



Obsah

Struktury – struct

Proměnné se sdílenou pamětí – union



Proměnné se sdílenou pamětí – union

- **Union** je množina prvků (proměnných), které nemusí být stejného typu
- Prvky unionu sdílejí společně stejná paměťová místa
- Velikost unionu je dána velikostí největšího z jeho prvků
- Skladba unionu je definována uživatelem jako nový typ sestavený z již definovaných typů
- K prvkům unionu se přistupuje tečkovou notací
- Pokud nedefinujeme nový typ je nutné k identifikátoru proměnné unionu uvádět klíčové slovo **union**

Překrývají se

*Podobně jako u struktury **struct***

```

1 union Nums {
2     char c;
3     int i;
4 };
5 Nums nums; /* THIS IS NOT ALLOWED! Type Nums is not known! */
6 union Nums nums;
```



Příklad union 1/2

- Union složený z proměnných typu: `char`, `int` a `double`

```
1 int main(int argc, char *argv[])
2 {
3     union Numbers {
4         char c;
5         int i;
6         double d;
7     };
8     printf("size of char %lu\n", sizeof(char));
9     printf("size of int %lu\n", sizeof(int));
10    printf("size of double %lu\n", sizeof(double));
11    printf("size of Numbers %lu\n", sizeof(union Numbers));
12
13    union Numbers numbers;
14
15    printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c,
        numbers.i, numbers.d);
```

- Příklad výstupu:

```
size of char 1
size of int 4
size of double 8
size of Numbers 8
Numbers c: 48 i: 740313136 d: 0.000000
```

lec06/union.c



Příklad union 2/2

■ Proměnné sdílejí paměťový prostor

```
1 numbers.c = 'a';
2 printf("\nSet the numbers.c to 'a'\n");
3 printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i,
4       numbers.d);
5 numbers.i = 5;
6 printf("\nSet the numbers.i to 5\n");
7 printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i,
8       numbers.d);
9 numbers.d = 3.14;
10 printf("\nSet the numbers.d to 3.14\n");
11 printf("Numbers c: %d i: %d d: %lf\n", numbers.c, numbers.i,
12       numbers.d);
```

■ Příklad výstupu:

```
Set the numbers.c to 'a'
Numbers c: 97 i: 1374389601 d: 3.140000
```

```
Set the numbers.i to 5
Numbers c: 5 i: 5 d: 3.139999
```

```
Set the numbers.d to 3.14
Numbers c: 31 i: 1374389535 d: 3.140000
```



Část II

Část 2 – Vnitřní reprezentace číselných typů



Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



Přesnost výpočtu 1/2

- Ztráta přesnosti při aritmetických operacích.

Příklad sčítání dvou čísel

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main(void)
4 {
5     double a = 1e+10;
6     double b = 1e-10;
7
8     printf("a   : %24.12lf\n", a);
9     printf("b   : %24.12lf\n", b);
10    printf("a+b: %24.12lf\n", a + b);
11
12    return 0;
13 }
14
15 clang sum.c && ./a.out
16 a   : 10000000000.000000000000
17 b   :          0.000000000100
18 a+b: 10000000000.000000000000
```



Přesnost výpočtu 2/2

Příklad dělení dvou čísel

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main(void)
4 {
5     const int number = 100;
6     double dV = 0.0;
7     float fV = 0.0f;
8
9     for (int i = 0; i < number; ++i) {
10         dV += 1.0 / 10.0;
11         fV += 1.0 / 10.0;
12     }
13
14     printf("double value: %lf ", dV);
15     printf(" float value: %lf ", fV);
16
17     return 0;
18 }
19
20 clang division.c && ./a.out
21 double value: 10.000000 float value: 10.000002
```

lec06/division.c



Přesnost výpočtu - strojová přesnost

- Strojová přesnost ϵ_m - nejmenší desetinné číslo, které přičtením k 1.0 dává výsledek různý od 1, pro $|v| < \epsilon_m$, platí

$$v + 1.0 == 1.0.$$

Symbol == odpovídá porovnání dvou hodnot v Javě (test na ekvivalenci).

- Zaokrouhlovací chyba - nejméně ϵ_m .
- Přesnost výpočtu - aditivní chyba roste s počtem operací v řádu $\sqrt{N} \cdot \epsilon_m$.
 - Často se však kumuluje preferabilně v jedno směru v řádu $N \cdot \epsilon_m$.



Zdroje a typy chyby

- Chyby matematického modelu - matematická aproximace fyzikální situace.
- Chyby vstupních dat.
- Chyby numerické metody.
- Chyby zaokrouhlovací.

- Absolutní chyba aproximace
 $E(x) = \hat{x} - x$, \hat{x} přesná hodnota, x aproximace.
- Relativní chyba $RE(x) = \frac{\hat{x} - x}{x}$.



Podmíněnost numerických úloh

- Podmíněnost úlohy $C_p = \frac{\text{relativní chyba výstupních údajů}}{\text{relativní chyba vstupních údajů}}$
- Dobře podmíněná úloha $C_p \approx 1$.
- Výpočet je dobře podmíněný, je-li málo citlivý na poruchy ve vstupních datech.
- Numericky stabilní výpočet - vliv zaokrouhlovacích chyb na výsledek je malý.
- Výpočet je stabilní, je-li dobře podmíněný a numericky stabilní.



Možnosti zvýšení přesnosti

- Reprezentace racionálních čísel - podíl dvou celočíselných hodnot, např. *Homogenní souřadnice*.
- „Libovolná přesnost“ - speciální knihovny, např. `gmp` až do výše volné paměti.

souřadnice x,y - 7511164176768 346868669952 3739567104 ~ 2008.57, 92.76

Informativní



Příklady chyb

- Ariane 5 - 4.6.1996

40 sekund po startu explodovala. Datová konverze z 64-bitového desetinné reprezentace na 16-ti bitový znaménkový integer.

http://www.esa.int/esaCP/Pr_33_1996_p_EN.html

- Systém Patriot - 25.2.1991

Systémový čas v desetinách sekundy, převod na sekundy realizován dělením 10, registry pouze 24 bitů.

<http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/patriot.html>

<http://www5.informatik.tu-muenchen.de/~huckle/bugse.html>



Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



Datové typy

- Při návrhu algoritmu abstrahujeme od binární podoby paměti počítače
- S daty pracujeme jako s hodnotami různých datových typů, které jsou uloženy v paměti předepsaným způsobem
- Datový typ specifikuje:
 - Množinu hodnot, které je možné v počítači uložit

Záleží na způsobu reprezentace

 - Množinu operací, které lze s hodnotami typu provádět
- **Jednoduchý typ** je takový typ, jehož hodnoty jsou atomické, tj. z hlediska operací dále nedělitelné



Příklad číselných typů a vnitřní reprezentace

- Např. 32-bitový typ `int` umožňuje uložit celá čísla v intervalu $\langle -2147483648, 2147483647 \rangle$, pro která můžeme použít
 - aritmetické operace `+`, `-`, `*`, `/` s výsledkem hodnota typu `int`
 - relační operace `==`, `!=`, `>`, `<`, `>=`, `<=`
- Inicializovat hodnotou dekadického nebo hexadecimálního literálu

```
1 int i; //deklarace promenne typu int
2 int decI = 120; //deklarace spolu s prirazeniem
3 int hexI = 0x78; //pocatecni hodnota v 16-kove soustave
4
5 int sum = 10 + decI + 0x13; //pocatecni hodnota je vyraz
```

- Vnitřní reprezentace typů (např. `int`, `short`, `double`) umožňuje uložit čísla s definovaného rozsahu s různou přesností.
- Číselné datové typy lze vzájemně převádět implicitní nebo explicitně typovou konverzí
- **Při konverzi nemusí být hodnota zachována** – viz

`lec06/demo-types.c`



Reprezentace dat v počítači

- V počítači není u datové položky určeno jaký konkrétní datový typ je v paměti uložen
- Proto musíme přidělení paměti **deklarovat** s jakými typy dat budeme pracovat
- Překladač pak tuto deklaraci hlídá a volí odpovídající strojové instrukce pro práci s datovými položkami například jako s odpovídajícími číselnými typy

Např. neceločíselné (float) typy a využití tzv. FPU

Příklad ekvivalentních reprezentací v paměti počítače

- $(0100\ 0001)_2$ – binární zápis jednoho bajtu (8-mi bitů);
- $(65)_{10}$ – odpovídající číslo v dekadické soustavě;
- $(41)_{16}$ – odpovídající číslo v šestnáctkové soustavě;
- znak A – tentýž obsah paměťového místa $(0100\ 0001)_2$ o velikosti 1 byte může být interpretován také jako znak A.



Reprezentace dat v počítači

- V počítači není u datové položky určeno jaký konkrétní datový typ je v paměti uložen
- Proto musíme přidělení paměti **deklarovat** s jakými typy dat budeme pracovat
- Překladač pak tuto deklaraci hlídá a volí odpovídající strojové instrukce pro práci s datovými položkami například jako s odpovídajícími číselnými typy

Např. neceločíselné (float) typy a využití tzv. FPU

Příklad ekvivalentních reprezentací v paměti počítače

- $(0100\ 0001)_2$ – binární zápis jednoho bajtu (8-mi bitů);
- $(65)_{10}$ – odpovídající číslo v dekadické soustavě;
- $(41)_{16}$ – odpovídající číslo v šestnáctkové soustavě;
- znak A – tentýž obsah paměťového místa $(0100\ 0001)_2$ o velikosti 1 byte může být interpretován také jako znak A.



Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



Reprezentace celých čísel

- Číselné soustavy – poziční číselné soustavy (polyadické) jsou charakterizovány bází udávající kolik číslic lze maximálně použít

$$x_d = \sum_{i=-n}^{i=m} a_i \cdot z^i, \text{ kde } a_i \text{ je číslice a } z \text{ je základ soustavy}$$

- Unární – např. počet vypitých půllitrů
- Binární soustava (bin) – 2 číslice 0 nebo 1

$$\begin{aligned} 11010,01^2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 26,25 \end{aligned}$$

- Desítková soustava (dec) – 10 číslic, znaky 0 až 9

$$\begin{aligned} 138,24 &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} \\ &= 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 \end{aligned}$$

- Šestnáctková soustava (hex) – 16 číslic, znaky 0 až 9 a A až F

$$\begin{aligned} 0x7D_h &= 7 \cdot 16^1 + D \cdot 16^0 \\ &= 112 + 13 \\ &= 125 \end{aligned}$$



Reprezentace celých čísel

- Číselné soustavy – poziční číselné soustavy (polyadické) jsou charakterizovány bází udávající kolik číslic lze maximálně použít

$$x_d = \sum_{i=-n}^{i=m} a_i \cdot z^i, \text{ kde } a_i \text{ je číslice a } z \text{ je základ soustavy}$$

- Unární – např. počet vypitých půllitrů

- Binární soustava (bin) – 2 číslice 0 nebo 1

$$\begin{aligned} 11010,01^2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 26,25 \end{aligned}$$

- Desítková soustava (dec) – 10 číslic, znaky 0 až 9

$$\begin{aligned} 138,24 &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} \\ &= 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 \end{aligned}$$

- Šestnáctková soustava (hex) – 16 číslic, znaky 0 až 9 a A až F

$$\begin{aligned} 0x7D_h &= 7 \cdot 16^1 + D \cdot 16^0 \\ &= 112 + 13 \\ &= 125 \end{aligned}$$



Reprezentace celých čísel

- Číselné soustavy – poziční číselné soustavy (polyadické) jsou charakterizovány bází udávající kolik číslic lze maximálně použít

$$x_d = \sum_{i=-n}^{i=m} a_i \cdot z^i, \text{ kde } a_i \text{ je číslice a } z \text{ je základ soustavy}$$

- Unární – např. počet vypitých půllitrů
- Binární soustava (bin) – 2 číslice 0 nebo 1

$$\begin{aligned} 11010,01^2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 26,25 \end{aligned}$$

- Desítková soustava (dec) – 10 číslic, znaky 0 až 9

$$\begin{aligned} 138,24 &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} \\ &= 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 \end{aligned}$$

- Šestnáctková soustava (hex) – 16 číslic, znaky 0 až 9 a A až F

$$\begin{aligned} 0x7D_h &= 7 \cdot 16^1 + D \cdot 16^0 \\ &= 112 + 13 \\ &= 125 \end{aligned}$$



Reprezentace celých čísel

- Číselné soustavy – poziční číselné soustavy (polyadické) jsou charakterizovány bází udávající kolik číslic lze maximálně použít

$$x_d = \sum_{i=-n}^{i=m} a_i \cdot z^i, \text{ kde } a_i \text{ je číslice a } z \text{ je základ soustavy}$$

- Unární – např. počet vypitých půllitrů
- Binární soustava (bin) – 2 číslice 0 nebo 1

$$\begin{aligned} 11010,01^2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 26,25 \end{aligned}$$

- Desítková soustava (dec) – 10 číslic, znaky 0 až 9

$$\begin{aligned} 138,24 &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} \\ &= 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 \end{aligned}$$

- Šestnáctková soustava (hex) – 16 číslic, znaky 0 až 9 a A až F

$$\begin{aligned} 0x7D_h &= 7 \cdot 16^1 + D \cdot 16^0 \\ &= 112 + 13 \\ &= 125 \end{aligned}$$



Reprezentace celých čísel

- Číselné soustavy – poziční číselné soustavy (polyadické) jsou charakterizovány bází udávající kolik číslic lze maximálně použít

$$x_d = \sum_{i=-n}^{i=m} a_i \cdot z^i, \text{ kde } a_i \text{ je číslice a } z \text{ je základ soustavy}$$

- Unární – např. počet vypitých půllitrů
- Binární soustava (bin) – 2 číslice 0 nebo 1

$$\begin{aligned} 11010,01^2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 26,25 \end{aligned}$$

- Desítková soustava (dec) – 10 číslic, znaky 0 až 9

$$\begin{aligned} 138,24 &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} \\ &= 1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 \end{aligned}$$

- Šestnáctková soustava (hex) – 16 číslic, znaky 0 až 9 a A až F

$$\begin{aligned} 0x7D_h &= 7 \cdot 16^1 + D \cdot 16^0 \\ &= 112 + 13 \\ &= 125 \end{aligned}$$



Více-bajtová reprezentace a pořadí bajtů

- Číselné typy s více-bajtovou reprezentací mohou mít bajty uloženy v různém pořadí
 - *little-endian* – **nejméně** významný bajt se ukládá na nejnižší adresu
x86, ARM
 - *big-endian* – **nejvíce** významný bajt se ukládá na nejnižší adresu
Motorola, ARM
- Pořadí je důležité při přenosu hodnot z paměti jako posloupnosti bajtů a jejich následné interpretaci
- **Network byte order** – je definován pro síťový přenos a není tak nutné řešit konkrétní architekturu
 - Tj. hodnoty z paměti jsou ukládány a přenášeny v tomto pořadí bajtů a na cílové stanici pak zpětně zapsány do konkrétního nativního pořadí

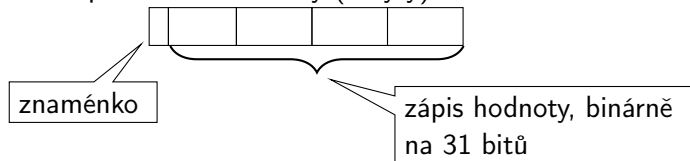
big-endian

Informativní



Příklad reprezentace celých čísel `int`

- Na 32-bitových a 64-bitových strojích je celočíselný typ `int` zpravidla reprezentován 32 bity (4 byty)



- Typ `int` je znaménkový typ
- Znaménko je zakódováno v 1 bitu a vlastní číselná hodnota pak ve zbývajících 31 bitech
 - Největší číslo je $0111\dots111 = 2^{31} - 1 = 2147483647$
Nezapomínat na 0
 - Nejmenší číslo je $-2^{31} = -2147483648$
0 už je zahrnuta
- Pro zobrazení záporných čísel je použit tzv. **doplňkový kód**
Nejmenší číslo v doplňkovém kódu $1000\dots000$ je -2^{31}



Reprezentace záporných celých čísel

- Doplnkový kód – $D(x)$
- Pro 8-mi bitovou reprezentací čísel
 - Můžeme reprezentovat $2^8=256$ čísel
 - Rozsah $r = 256$

$$D(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ r + x & \text{pro } -\frac{r}{2} \leq x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

■ Příklady

Desítkově	Doplnkový kód
0–127	0000 0000 – 0111 1111
128	nelze zobrazit na 8 bitů v doplnkovém kódu
-128	$D(-128) = 256 + (-128) = 128$ to je 1000 0000
-1	$D(-1) = 256 + (-1) = 255$ to je 1111 1111
-4	$D(-4) = 256 + (-4) = 252$ to je 1111 1100



Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



Reprezentace reálných čísel

- Pro uložení čísla vyhrajujeme omezený paměťový prostor

Příklad – zápis čísla $\frac{1}{3}$ v dekadické soustavě

- $= 33333333 \dots 3333$
- $= 0, \overline{33}$
- $\approx 0, 33333333333333333333$
- $\approx 0, 333$

$$\text{V trojkové soustavě: } 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} = (0, 1)_3$$

- Nepřesnosti v zobrazení reálných čísel v konečné posloupnosti bitů způsobují
 - Iracionální čísla, např. e , π , $\sqrt{2}$
 - Čísla, která mají v dané soustavě periodický rozvoj, např. $\frac{1}{3}$
 - Čísla, která mají příliš dlouhý zápis



Model reprezentace reálných čísel

- Reálná čísla se zobrazují jako aproximace daným rozsahem paměťového místa
- Reálné číslo x se zobrazuje ve tvaru

$$x = \text{mantisa} \cdot \text{základ}^{\text{exponent}}$$

$$x = m \cdot z^{\text{exponent}}$$

- Pro jednoznačnost zobrazení musí být mantisa normalizována

$$0,1 \leq m < 1$$

- Ve vyhrazeném paměťovém prostoru je pro zvolený základ uložen exponent a mantisa jako dvě celá čísla



Příklad modelu reprezentace reálných čísel 1/2

Reprezentace na 7 bajtů

- Délka mantisy 3 pozice (bajtů) plus znaménko
- Délka exponentu 2 pozice plus znaménko
- Základ $z = 10$
- Nula



- Příklad $x = 77,5 = 0,775 \cdot z^{+02}$



Příklad modelu reprezentace reálných čísel 2/2

Limitní zobrazitelná čísla

- Maximální zobrazitelné kladné číslo $0,999z^{99}$



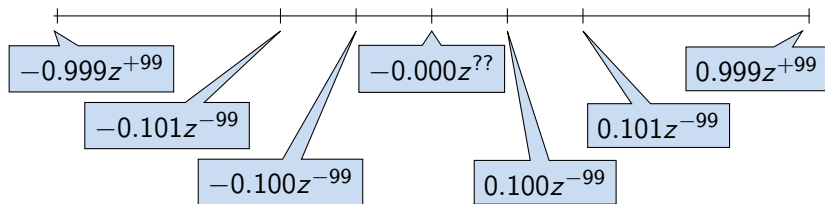
- Maximální zobrazitelné záporné číslo $-0,100z^{-99}$



- Minimální zobrazitelné kladné číslo $0,100z^{-99}$

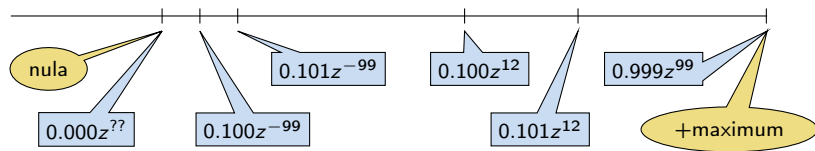


- Minimální zobrazitelné záporné číslo $-0,999z^{+99}$

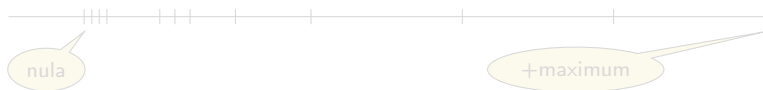


Model reprezentace reálných čísel a vzdálenost mezi aproximacemi

- Rozsah hodnot pro konkrétní exponent je dán velikostí mantisy
- Absolutní vzdálenost dvou aproximací tak záleží na exponentu
 - Mezi hodnotou 0 a 1,0 je využit celý rozsah mantisy pro exponenty $\{-99, -98, \dots, 0\}$

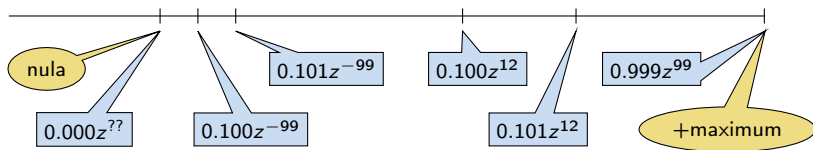


- Aproximace reálných čísel nejsou na číselné ose rovnoměrně rozloženy



Model reprezentace reálných čísel a vzdálenost mezi aproximacemi

- Rozsah hodnot pro konkrétní exponent je dán velikostí mantisy
- Absolutní vzdálenost dvou aproximací tak záleží na exponentu
 - Mezi hodnotou 0 a 1,0 je využit celý rozsah mantisy pro exponenty $\{-99, -98, \dots, 0\}$



- Aproximace reálných čísel nejsou na číselné ose rovnoměrně rozloženy



Typ **double** – reprezentace necelých čísel

- **double** – 64 bitů (8 bajtů), norma IEEE 754

ISO/IEC/IEEE 60559:2011

- **s** – 1 bit znaménko (+ nebo –)
- **exponent** – 11 bitů, tj. 2048 možností
- **mantisa** – 52 bitů \approx 4.5 biliardy možností

4 503 599 627 370 496

- Neumožňuje přesně uložit čísla se zápisem delším než 52 bitů
- Čím větší exponent, tím větší „mezery” mezi sousedními aproximacemi čísel

- Reálné číslo x se zobrazuje ve tvaru

$$x = (-1)^s \text{mantisa} \cdot 2^{\text{exponent} - \text{bias}}$$

- **bias** umožňuje reprezentovat exponent vždy jako kladné číslo

Lze zvolit, např. $\text{bias} = 2^{eb-1} - 1$, kde eb je počet bitů exponentu

<http://www.root.cz/clanky/>

[norma-ieee-754-a-pribuzni-formaty-plovouci-radove-tecky](#)



Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



Přiřazovací operátor a příkaz

- Slouží pro nastavení hodnoty proměnné

Uložení číselné hodnoty do paměti, kterou proměnná reprezentuje

- Tvar přiřazovacího operátoru

$\langle \text{proměnná} \rangle = \langle \text{výraz} \rangle$

Výraz je literál, proměnná, volání funkce, ...

- Zkrácený zápis

$\langle \text{proměnná} \rangle \langle \text{operátor} \rangle = \langle \text{výraz} \rangle$

- Přiřazení je výraz

- Asociativní zprava

- Přiřazovací příkaz – výraz zakončený středníkem ;

```
int x; //deklarace
      promenne x
int y; //deklarace
      promenne y

x = 6;
y = x = x + 6;
```

```
int x, y; //deklarace
          promennych x a y

x = 10;
y = 7;

y += x + 10;
```



Typové konverze

- Typová konverze je operace převedení hodnoty nějakého typu na hodnotu typu jiného
- Typová konverze může být
 - **implicitní** – vyvolá se automaticky
 - **explicitní** – je nutné v programu explicitně uvést
- Konverze typu **int** na **double** je implicitní

Hodnota typu int může být použita ve výrazu, kde se očekává hodnota typu double, dojde k automatickému převodu na hodnotu typu double.

Příklad

```
double x;  
int i = 1;
```

```
x = i; //hodnota 1 typu int se automaticky  
prevede na hodnotu 1.0 typu double
```

- Implicitní konverze je bezpečná



Explicitní typové konverze

- Převod hodnoty typu **double** na **int** je třeba **explicitně** předeepsat
- Dojde k „odseknutí“ necelé části hodnoty int

Příklad

```
double x = 1.2; // deklarace promenne typu
double
int i;          // deklarace prommene typu int
int i = (int)x; // hodnota 1.2 typu double se
                prevede na hodnotu 1 typu int
```

- Explicitní konverze je potenciálně nebezpečná

Příklady

```
double d = 1e30;
int i = (int)d;

// i je -2147483648
// to je asi -2e9 místo 1e30

long l = 5000000000L;
int i = (int)l;

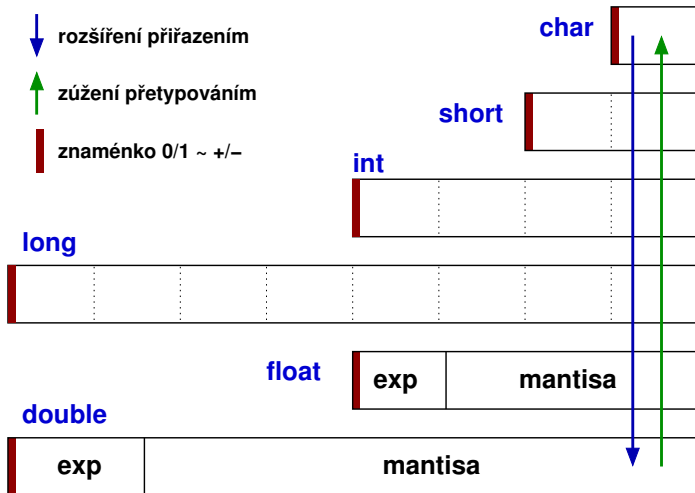
// i je 705032704
// (oriznute 4 bajty)

lec06/demo-type_conversion.c
```



Konverze primitivních číselných typů

- Primitivní datové typy jsou vzájemně nekompatibilní, ale jejich hodnoty lze převádět



Obsah

Přesnost výpočtů a numerická stability

Základní číselné typy a jejich reprezentace v počítači

Reprezentace celých čísel

Reprezentace reálných čísel

Typové konverze

Matematické funkce



Matematické funkce

■ `math.h` – základní funkce pro práci s „reálnými“ čísly

- Výpočet odmocniny necelého čísla x

```
double sqrt(double x);, float sqrtf(float x);
```

V C funkce nepřetěžujeme, proto jsou jména odlišena

- `double pow(double x, double y);` – výpočet obecné mocniny

- `double atan2(double y, double x);` – výpočet $\arctan y/x$ s určením kvadrantu

- Symbolické konstanty – `M_PI`, `M_PI_2`, `M_PI_4`, atd.

- `#define M_PI 3.14159265358979323846`

- `#define M_PI_2 1.57079632679489661923`

- `#define M_PI_4 0.78539816339744830962`

- `isfinite()`, `isnan()`, `isless()`, ... – makra pro porovnání reálných čísel.

- `round()`, `ceil()`, `floor()` – zaokrouhlování, převod na celá čísla

■ `complex.h` – funkce pro počítání s komplexními čísly

ISO C99

- `fenv.h` – funkce pro řízení zaokrouhlování a reprezentaci dle IEEE 754.



Část III

Část 3 – Zadání 6. domácího úkolu (HW06)



Zadání 6. domácího úkolu HW06

-
- Termín odevzdání: 26.11.2016, 23:59:59 AoE

AoE – Anywhere on Earth



Shrnutí přednášky

